Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 532.516

О ВИНТОВОМ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ДВИЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Айрапетов А. Б., Жмулин Е. М.

Получены уравнения осесимметричного винтового движения (ВД) вязкой несжимаемой жидкости. Найдены точные решения для случая однородного ВД. Сформулирован критерий близости ВД к однородному ВД. Получены точные нелинейные решения для вязких ВД с малой завихренностью.

Уравнения ВД вязкой несжимаемой жидкости, т. е. движения, в котором векторы скорости и завихренности коллинеарны, были впервые получены В. А. Стекловым [1], а затем в наиболее общем виде выписаны С. С. Бюшгенсом [2]. Однако примеры решений этой нелинейной переопределенной системы уравнений практически исчерпываются решениями для двух специальных линейных случаев: Стеклова [1] («однородное» ВД, когда отношение модулей скорости и завихренности постоянно) и Кальдонаццо [3] (однородное цилиндрическое ВД). Кроме этих решений можно указать лишь несколько примеров использования решений типа Стеклова для некоторых специальных видов течений (см., например, [4] и имеющиеся там ссылки).

Особенностью системы вязких уравнений ВД является ее переопределенность. При обсуждении в [2] возможности существования пространственного стационарного ВД вязкой несжимаемой жидкости, описывающегося нелинейной системой из шести уравнений относительно двух неизвестных, ее совместность в общем случае оценивалась как «маловероятная».

Привлечению для анализа общего случая каких-либо физических соображений в значительной степени препятствует отсутствие наглядных примеров реальных пространственных течений, которые можно было бы идентифицировать как ВД. Единственное нетривиальное исключение, по всей видимости, — случай с осевой или сферической симметрией; к этому классу можно в известном смысле обоснованно отнести такие объекты, как вихрь за гребным винтом, вихревые жгуты, сходящие с концов крыла, вторичные течения в искривленных каналах, течение в воронке, торнадо, закрученные струи и некоторые другие. Кроме, того, можно говорить о возможности создания таких течений в эксперименте. Этот относительно простой частный случай тем не менее сохраняет такие существенно характерные особенности ВД, как переопределенность описания и нелинейность, что позволяет рассматривать его как в известном смысле модельный. Анализ осесимметричного ВД вязкой несжимаемой жидкости и составляет предмет данной работы.

1. При описании движения жидкости в рассматриваемом случае (присутствие внешних потенциальных сил не нарушает общности подхода) удобно отправляться от уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости в форме Громеки — Лэмба относительно завихренности $\omega = (\omega_r, \omega_\varphi, \omega_z)$, записанных в цилиндрической системе координат. Для этой формы учет условия винтового течения

$$\Omega_\varphi V_z = \Omega_z V_\varphi, \quad \Omega_z V_r = \Omega_r V_z, \quad \Omega_r V_\varphi = \Omega_\varphi V_r \tag{1.1}$$

без преобразований приводит к системе

$$\Omega_r^{\bullet} = \nu E^2 \Omega_r, \quad \Omega_\varphi^{\bullet} = \nu E^2 \Omega_\varphi, \quad \Omega_z^{\bullet} = \nu (E^2 + r^{-2}) \Omega_z \tag{1.2}$$

$$E^2 = \partial^2/\partial r^2 - r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2, \quad \mathbf{\Omega} = r\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{V} = r\mathbf{v}$$

Кроме того, должно выполняться уравнение неразрывности

$$\partial V_r/\partial r + \partial V_z/\partial z = 0 \tag{1.3}$$

Соотношения между компонентами скорости и завихренности приводят к связям вида

$$\Omega_r = -\partial V_\varphi/\partial z, \quad \Omega_z = \partial V_\varphi/\partial r \tag{1.4}$$
$$\Omega_\varphi = \partial V_r/\partial z - \partial V_z/\partial r + r^{-1}V_z$$

Видно, что в соответствии с (1.3) существует функция тока ψ, такая, что

$$V_r = \partial\psi/\partial z, \quad V_z = -\partial\psi/\partial r$$

Подстановка этих выражений во второе соотношение (1.1) при учете первых двух соотношений (1.4) приводит к заключению, что

$$V_\varphi = V_\varphi(\psi) \equiv f(\psi) \tag{1.5}$$

Первое и третье условия (1.1) не противоречат второму и также приводят к результату (1.5).

Подстановка первого соотношения (1.4) при учете (1.5) в первое соотношение (1.1) дает

$$\Omega_\varphi = -f df/d\psi$$

Сравнивая это равенство с результатом подстановки (1.5) в последнее соотношение (1.4), получаем уравнение для ψ

$$E^2\psi = F(\psi), \quad F(\psi) \equiv -f df/d\psi \tag{1.6}$$

Выраженные через функцию тока величины Ω_r, Ω_φ, Ω_z должны удовлетворять системе уравнений динамики (1.2). Соответствующие подстановки дают

$$\partial Lf/\partial z = 0, \quad \partial Lf/\partial r = 0 \tag{1.7}$$
$$LF = 0, \quad L = \partial/\partial t - \nu E^2$$

Из первых уравнений (1.7) следует $Lf = a(t)$, где $a(t)$— произвольная функция времени, которая может быть положена равной нулю, поскольку $a(t) \neq 0$ соответствует присутствию произвольного безвихревого поля. Таким образом

$$Lf = 0 \tag{1.8}$$

Сравнение этого уравнения с последним уравнением (1.7) показывает, что, за исключением тривиального случая $f = F = 0$, уравнения совместны тогда и только тогда, когда функции f и F связаны линейной зависимостью, т. е.

$$-f df/d\psi = cf + c_0, \quad c, \ c_0 = \text{const} \tag{1.9}$$

Полученное уравнение представляет собой условие совместности переопределенной системы (1.6), (1.8) и имеет решение (с точностью до постоянной)

$$\psi = -c^{-1}f + c_0c^{-2}\ln(f + c_0c^{-1}) \tag{1.10}$$

Перейдя при помощи (1.10) в уравнении (1.6) от ψ к f, можно получить второе уравнение для f

$$(f + c_0c^{-1})[fE^2f + c^2(f + c_0c^{-1})] + c_0c^{-1}(f_r^2 + f_z^2) = 0 \tag{1.11}$$

которое вместе с линейным параболическим уравнением (1.8) образует переопределенную систему, описывающую осесимметричное ВД вязкой несжимаемой жидкости. Отметим, что решение системы вида $f = -c_0c^{-1}$ тривиально, поскольку соответствует безвихревому течению.

2. Рассмотрим сначала два предельных случая соотношения (1.9): $c_0 = 0$, $c = 0$.

В первом случае система уравнений имеет вид

(2.1) $$f_t = \nu E^2 f,\quad E^2 f + c^2 f = 0$$

и имеет нестационарное решение (стационарное решение тривиально)

(2.2) $$f = \exp(-\nu c^2 t) G(r, z)$$

где G — решение уравнения $E^2 G + c^2 G = 0$. Это решение совпадает с рассмотренным Стекловым, однако, в отличие от [1], где вид решения отыскивался на основании только уравнения типа первого (2.1), приведенный вывод оказывается строгим.

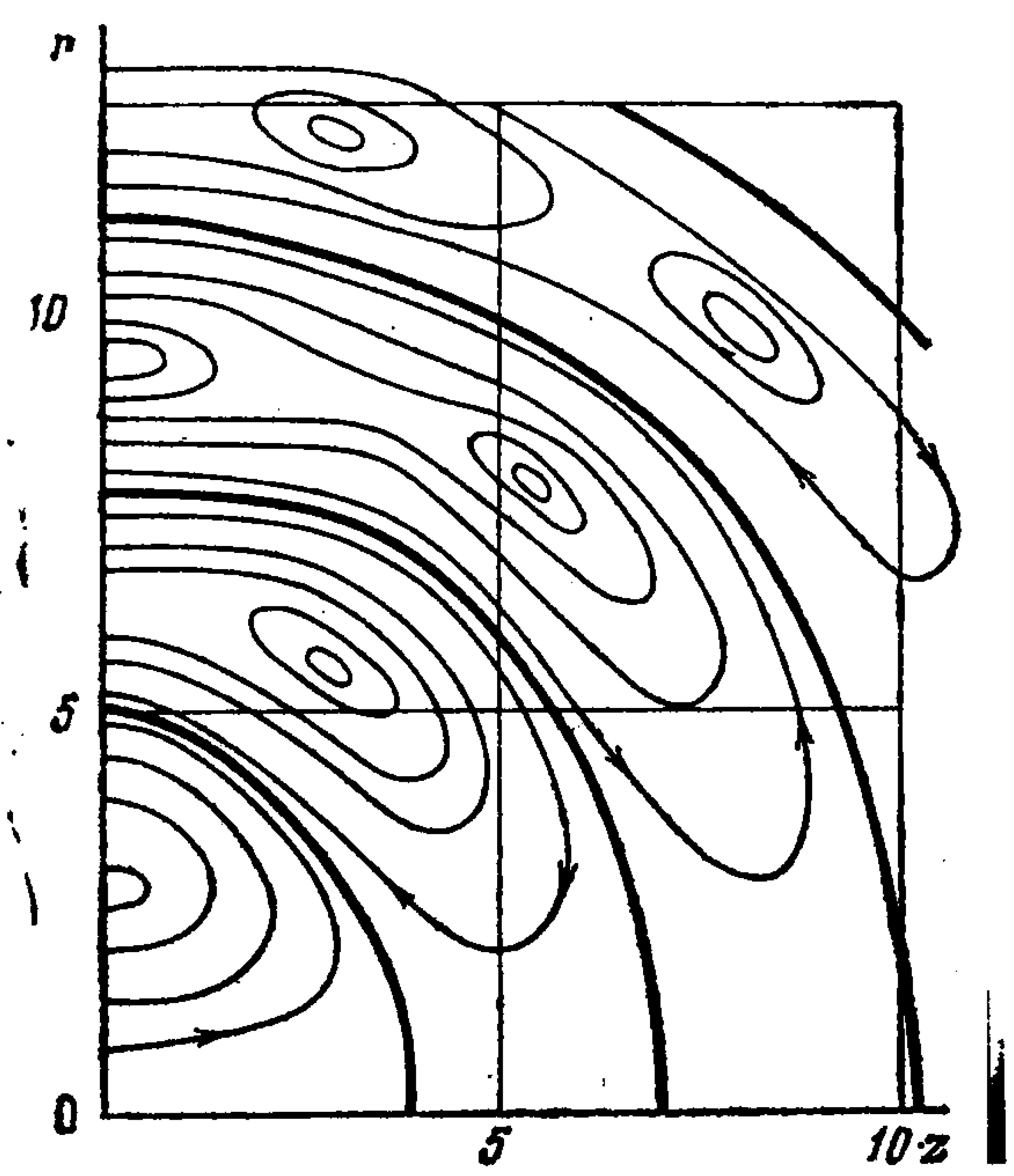
Последнее уравнение имеет, например, ограниченное на бесконечности решение, обобщающее решение [3] на двумерный случай

$$G = \exp(i\lambda z) r J_1(\sqrt{c^2 - \lambda^2}\, r),\ \lambda = \mathrm{const}$$

где J_1 — функция Бесселя. Используя это решение, в силу линейности системы можно построить «фундаментальное», не зависящее от волнового числа λ, решение системы (2.1), скажем, следующим образом:

$$f^\circ(t, r, z) = \int_{-c}^{c} f(t, r, z, \lambda)\, d\lambda = -\pi \exp(-\nu c^2 t)\, \eta^{-1} (\xi^2 - \eta^2) \times$$
$$\times [J_0(\xi - \eta) J_1(\xi + \eta) + J_1(\xi - \eta) J_0(\xi + \eta)]$$
$$\zeta = \frac{1}{2} c \sqrt{r^2 + z^2},\quad \eta = \frac{1}{2} cz$$

Линии тока такого течения $f^\circ = \mathrm{const}$ ($\psi = -f/c$) для фиксированного момента времени приведены на фигуре при $c = 1$ (выделены линии тока $\psi = 0$). Видно, что течение имеет осесимметричную слоистую структуру с особенностями, напоминающими тероидальные вихри. Сходная картина течения была получена в численных расчетах для нестационарной задачи движения жидкости между концентрическими сферами при мгновенной раскрутке внешней сферы [5]. Можно отметить также некоторое сходство полученной картины с ячеистой системой вторичных вихрей Тейлора в течении между вращающимися цилиндрами и вихрями Гёртлера, причем качественная близость кинематики последних и строго винтовых течений позволяет предполагать определенную обусловленность такого сходства.



Для анализа второго случая ($c = 0$) удобно вернуться от f к ψ:

(2.3) $$E^2\psi = c_0,\quad \psi\psi_t - \nu c_0 \psi + {}^1/_2 \nu (\psi_r^2 + \psi_z^2) = 0$$

Вопрос о совместности системы (2.3) не может рассматриваться в отрыве от возможных краевых задач. В частности, в случае движения жидкости в пространстве, не содержащем границ, система (2.3) оказывается несовместной.

Действительно, наличие переменных

$$t_0 = c_0 t,\ r_0 = \sqrt{c_0}\, r,\ z_0 = \sqrt{c_0}\, z$$

(масштаб, связанный с вязкостью, не является характерным для системы в силу того, что первое уравнение (2. 3) невязкое), в которых система уравнений не содержит явно c_0, означает, что второе уравнение (2. 3) должно обладать автомодельными решением вида

$$\psi = A t_0^{\alpha} G(\zeta), \quad \zeta = B(r_0^2 + z_0^2)/t_0$$

где A, B — произвольные постоянные, $\alpha = 1$, а $G(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(2.4) \qquad 2\nu B \zeta G'^2 - \zeta G G' + G^2 - \nu G/A = 0$$

В то же время для первого уравнения (2.3) формальное решение такого класса имеет вид

$$G(\zeta) = \zeta/(2AB) + \mathrm{const}\cdot \zeta^{1/2}$$

которое не удовлетворяет (2.4) и по существу соответствует решению более общего вида

$$\psi = {}^1/_2\,(r_0^2 + z_0^2) + T(t_0)\, R(r_0, z_0)$$

где $E^2 R = 0$, а $T(t_0)$ — произвольная функция, не удовлетворяющему второму уравнению (2.3) ни при каких $T(t_0)$.

3. Последний пример показывает, что вопрос совместности общей системы (1.8), (1.11), т. е. существования решений, описывающих осесимметричные вязкие винтовые течения, вообще говоря, не тривиален. Физически это соответствует существованию определенных условий, при которых возможна реализация винтового течения. Как показывает первый пример п. 2, определенный класс решений системы (1.8), (1.11) существует при условии однородности течения ($c_0 = 0$). Естественно было бы ожидать, что течения, соответствующие достаточно малым величинам c_0 (или иным, связанным с ней), о которых можно предположительно говорить как о близких к однородным винтовым, реализуемы и решения системы (1.8), (1.11) такого класса существуют.

Если ограничиться рассмотрением класса течений, непрерывным образом включающих такие слабонеоднородные течения, то в первую очередь должен быть выработан критерий неоднородности, на основании которого могут быть сформулированы по крайней мере необходимые условия близости течения к однородному. С этой целью рассмотрим не затрагивавшийся до сих пор вопрос о выборе произвольных постоянных c и c_0 в соотношении (1.9). Эти постоянные, имеющие размерности обратной длины и скорости соответственно, должны нести функции параметров, определяющих класс течения, поскольку они могут быть естественным образом связаны с параметрами, характерными для того или иного класса течений. Так, например, решение задачи Стеклова вида (2.2) показывает, что в отсутствие характерного масштаба времени и геометрического масштаба их роль играют соответственно $1/\nu c^2$ и $1/c$.

Для нестационарной задачи, описываемой системой (1.8), (1.11) относительно f, введем геометрический масштаб течения l, характерное время τ и азимутальную скорость U. В безразмерных переменных

$$\bar t = \frac{t}{\tau}, \quad \bar r = \frac{r}{l}, \quad \bar z = \frac{z}{l}, \quad \bar f = \frac{f}{lU}, \quad \bar\psi = \frac{\psi}{l^2 U}$$

система (1.8), (1.11) и соотношения (1.10) принимают вид (черточки опущены)

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} & f_t = \mathrm{Re}^{-1} E^2 f \\ & (f + \varepsilon)[f E^2 f + \beta^2 (f + \varepsilon)] + \varepsilon (f_r^2 + f_z^2) = 0 \\ & \beta\psi = -f + \varepsilon \ln (f + \varepsilon) \\ & \mathrm{Re} = \frac{l^2}{\nu\tau}, \quad \beta = cl, \quad \varepsilon = \frac{1}{lU}\frac{c_0}{c} \end{aligned}$$

Система (3.1) для рассматриваемого класса течений, непрерывно включающих однородные, должна отвечать требованию предельного по $\varepsilon \to 0$ перехода к системе Стеклова для однородного винтового течения. Это предопределяет независимость U от τ и l, которые, таким образом, должны относиться к движению не в азимутальном, а в осевом направлении. Кроме того, в соответствии с последним уравнением (3.1) должно быть выбрано $\beta = 1$, т. е. $c = l^{-1}$, а c_0 для обеспечения возможности $\varepsilon \to 0$ необходимо задать единственным образом: $c_0 = \nu l^{-1}$. При этом $\varepsilon = \nu/lU = \mathrm{Re}_\varphi^{-1}$, где Re_φ — число Рейнольдса, определенное по характерной азимутальной скорости.

Полученная система при фиксированном Re отвечает требованиям предельного по $\varepsilon \to 0$ перехода к системе Стеклова и, таким образом, число Re_φ может служить критерием неоднородности винтового течения, а близость ε к нулю — характеризовать степень близости течения к однородному.

Можно показать, что стационарного решения полученная система не имеет.

Действительно, если бы существовало нетривиальное решение системы

$$(3.2) \qquad E^2\varphi = 0, \quad \varphi_r^2 + \varphi_z^2 = -\varepsilon^{-1}\varphi^3, \quad \varphi = f + \varepsilon$$

то оно в соответствии с видом второго уравнения должно было бы удовлетворять условию $\varphi < 0$. Введем функцию Φ, такую, что $\varphi = -\Phi^{-2} < < 0$, для которой система имеет вид

$$\Phi E^2\Phi = {}^3/_4\varepsilon^{-1}, \quad \Phi_r^2 + \Phi_z^2 = {}^1/_4\varepsilon^{-1}$$

Интегралам второго уравнения соответствуют плоскости или конические круговые поверхности, не являющиеся решениями первого уравнения.

4. В качестве иллюстрации принципиальной возможности существования решений нелинейной системы (3.1) ниже будет приведено несколько примеров, относящихся к нелинейному случаю слабозавихренного винтового потока, когда (в безразмерной форме)

$$\omega_i/v_i \ll 1, \quad i = r, \varphi, z$$

что эквивалентно условию на φ из (3.2) $\varphi \ll 1$.

В таком случае невырожденная система наинизшего порядка, получающаяся из (3.1) отбрасыванием членов $O(\varphi^3)$, имеет вид

$$(4.1) \qquad \varphi_t = \mathrm{Re}^{-1}E^2\varphi, \quad \varphi E^2\varphi = \varphi_r^2 + \varphi_z^2$$

В случае цилиндрического винтового течения $\varphi = \varphi(t, r)$ система имеет точное решение

$$\varphi(t, r) = \mathrm{const} \cdot \exp[-r^2/(4\varepsilon_0 t)], \quad \varepsilon_0 = \mathrm{Re}^{-1}$$

причем постоянную в силу симметрии следует положить равной ε:

$$v_\varphi = r^{-1}f = \varepsilon r^{-1}\{\exp[-r^2/(4\varepsilon_0 t)] - 1\}$$

Это решение совпадает по азимутальной скорости с классическим решением, описывающим диффузию прямолинейной вихревой нити в вязкой жидкости, но отличается от него наличием осевого течения со скоростью $v_z = -(2\varepsilon_0 t)^{-1} r v_\varphi$.

Наличие вблизи оси области заторможенного потока соответствует картине, наблюдаемой экспериментально в сходных течениях [6].

В общем случае $\varphi = \varphi(t, r, z)$ система (4.1) имеет точное решение

$$\varphi(t, r, z) = k\varepsilon \exp[\varepsilon_0\lambda^2 t - \lambda z - r^2/(4\varepsilon_0 t)], \quad \lambda = \mathrm{const} > 0$$

неограниченно растущее, начиная с некоторого момента времени, в фиксированной точке пространства. Такой тип решения может быть качественно соотнесен с эффектом «распада» («взрыва») прямолинейного вихря [7].

Как было показано в п. 3, строго стационарных решений система 3.1, равно как и (4.1), не имеет. Однако в случае достаточно больших осевых чисел Рейнольдса Re можно показать существование неких квазистационарных решений, удовлетворяющих системе (4.1) с точностью $O(\varepsilon_0)$.

В силу независимости второго уравнения (4.1) от ε_0 такое квазистационарное приближение будет описываться системой

$$\varphi_t = 0,\quad \varphi E^2\varphi = \varphi_r^2 + \varphi_z^2 \tag{4.2}$$

Заменой $\varphi = \exp(\theta)$ нелинейное уравнение сводится к линейному $E^2\theta = 0$, имеющему точные, ограниченные на бесконечности решения

$$\theta = \begin{cases} -\alpha r^2 - \beta z, \quad \alpha, \beta = \mathrm{const} > 0 \\ r \sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_1(\mu_n r)\exp(\mu_n z) \end{cases}$$

где Z_1 — функция Бесселя первого порядка первого или второго рода, в зависимости от типа комплексной величины μ_n. Решение φ при этом имеет достаточно сложный вид

$$\varphi = \mathrm{const}\begin{cases} \exp(-\alpha r^2 - \beta z) \\ \exp\left[r \sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_1(\mu_n r)\exp(\mu_n z)\right] \end{cases}$$

Более наглядно интерпретируется одномерный случай цилиндрического винтового течения, описывающийся точным решением системы (4.2)

$$\varphi = \mathrm{const}\cdot\exp(-\alpha r^2),\quad \alpha = \mathrm{const} > 0$$

что соответствует полю скоростей

$$v_\varphi = \varepsilon r^{-1}[1 - \exp(-\alpha r^2)],\quad v_z = 2\alpha r v_\varphi$$

Это решение совпадает с известным решением для предельного по времени состояния растягивающегося в осевом потоке прямолинейного вихря (вихрь Бюргерса), использовавшегося рядом авторов в качестве эвристической модели внешнего закрученного потока при исследовании механизма распада вихря [7]. Величина постоянной α может быть оценена из условия v_φ, $v_z = O(1)$: $\alpha \sim \varepsilon^{-1}$, что соответствует экспериментальным результатам Гарга [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стеклов В. А.* Один случай движения вязкой несжимаемой жидкости // Сообщ. Харьков. мат. о-ва. 1986. Сер. 2. Т. 5. № 3—4. С. 101—124.
2. *Бюшгенс С. С.* О винтовом потоке// Науч. зап. Моск. гидромелиорат. ин-та. 1948. Т. 17. С. 71—90.
3. *Caldonazzo B.* Moti elicoidali, simmetrici ad un asse, di liquidi viscosi // Rend. R. Ist. Lombardo sci. e lettere. 1926. V. 59. P. 657—665.
4. *Ярмицкий А. Г.* Течение вязкой жидкости, обусловленные винтообразным движением тела вращения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 47—52.
5. *Pearson C. E.* Anumerical study for the time-dependent viscous flow between two rotating concentric spheres // J. Fluid Mech. 1967. V. 28. Pt 2. P. 323—336.
6. *Лапин В. М., Рыбаков В. И., Эпштейн Л. А.* Исследование по визуализации следа течения на больших расстояниях за крылом // Уч. зап. ЦАГИ. 1982. Т. 13. № 6. С. 77—82.
7. *Лейбович С.* Распад вихря // Вихревые движения жидкости. М.: Мир. 1979. С. 160—196.

Москва

Поступила в редакцию
28.XII.1986