

УДК 531.39 : 534.1

ДИАГРАММЫ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА С КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ОСЬЮ

Баталова З. С., Белякова Г. В.

Аналитически и численно изучаются периодические вращения маятника с гармонически колеблющейся осью подвеса. Устанавливаются общие закономерности их бифуркационных диаграмм в зависимости от четности чисел, характеризующих число оборотов маятника и период колебаний оси подвеса.

Явление динамической устойчивости верхнего положения маятника и эффект вибрационного возбуждения и поддержания его вращений нашли широкое применение в современных устройствах и механизмах [1—3]. Исследование математических моделей движений параметрически возбуждаемого маятника в виде нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений при учете сил сопротивления проводилось аналитическими методами, ряд периодических режимов изучен численно (см. [2], где дан обзор исследований и библиография, а также [4—6]). В гамильтоновом случае периодические движения вращательного типа ранее не рассматривались.

Ниже изучаются периодические вращения параметрически возбуждаемого нелинейного осциллятора без учета диссипации. Методом Чезари определяются порождающие решения, устанавливается число периодических вращений одного типа и исследуется их устойчивость при малых значениях двух параметров. Ряд решений, представляющих интерес для приложений, продолжен численно в область больших значений параметров. Построены бифуркационные диаграммы периодических решений, содержащие области их устойчивости (в первом приближении), выяснены бифуркации возникновения и смены устойчивости этих решений.

1. Постановка задачи. Простейшей математической моделью движений маятника, ось подвеса которого совершает гармонические колебания вдоль вертикальной прямой, является уравнение [7]

$$(1.1) \quad \ddot{x} + (a + |b \cos 2t|) \sin x = 0$$

где x — отклонение маятника от вертикали, a и b — параметры. Задача состоит в выяснении условий возникновения и устойчивости периодических движений маятника, синхронных с колебаниями его оси, т. е. таких решений $\Gamma_{p,q}$ уравнения (1.1), которые удовлетворяют условию $x(t + p\pi) = x(t) + 2\pi q$, где $p = 1, 2, \dots$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Здесь $|q|$ — число оборотов маятника вокруг оси в положительном ($q > 0$) или отрицательном ($q < 0$) направлении за p периодов колебаний оси, $q = 0$ соответствует состояниям покоя или колебательным движениям около вертикали.

2. Периодические решения при малых значениях параметров. При $a = b = 0$ уравнение (1.1) имеет бесконечное множество решений

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = 2tr + \alpha, \quad r = q/p, \quad \alpha = \text{const} \in [0, 2\pi)$$

где r — простая дробь из промежутка $(-\infty, \infty)$. Определим значения α , соответствующие порождающим решениям, и выясним характер устойчивости периодических решений $\Gamma_{p,q}$ при малых значениях a и b .

Вспользуемся методом Чезари¹, при помощи которого значения α находятся как простые корни бифуркационного уравнения $V(\alpha, a, b) = 0$,

¹ Сарычев В. А., Сазонов В. В. Об одном методе исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений: Препринт № 105. М.: Ин-т прикл. математики. 1976. 62 с.

а устойчивость порождаемых решений $\Gamma_{p,q}$ определяется знаком производной $dV/d\alpha$, вычисленной при соответствующих им α . При выполнении условия $dV/d\alpha \leq 0$ решение $\Gamma_{p,q}$ устойчиво (в первом приближении). Если это неравенство не выполняется, то $\Gamma_{p,q}$ неустойчиво.

Сделаем замену $u = x - 2tr$ и положим $a = a_m b^m$, где m — целое положительное число, a_m — постоянная. Получим уравнение

$$(2.2) \quad u'' + (a_m b^m + b \cos 2t) \sin(u + 2tr)$$

Следуя методу Чезари, составим вспомогательную систему

$$(2.3) \quad u'' + (a_m b^m + b \cos 2t) \sin(u + 2tr) - V(\alpha, b) = 0, \quad \int_0^{p\pi} u dt = \alpha$$

Решение этой системы — две функции $u = u(t, \alpha, b)$, $V = V(\alpha, b)$, представимые рядами

$$(2.4) \quad u(t, \alpha, b) = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, \alpha) b^k, \quad V(\alpha, b) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\alpha) b^k$$

где $u_k(t, \alpha)$ — $p\pi$ -периодические функции переменного t . Наличие простого корня $\alpha(b)$ бифуркационного уравнения $V(\alpha, b) = 0$ является необходимым и достаточным условием существования единственного $p\pi$ -периодического решения уравнения (2.2), переходящего при $b \rightarrow 0$ в решение $u \rightarrow \alpha(0)$. Если в (2.4) $v_i(\alpha) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), $v_k(\alpha) \not\equiv 0$ и существует значение α_l , для которого $v_k(\alpha_l) = 0$, $dv_k(\alpha_l)/d\alpha \not\equiv 0$, то бифуркационное уравнение имеет простой аналитический корень $\alpha(b) \rightarrow \alpha_l$ при $b \rightarrow 0$. Значит, для отыскания корней уравнения $V(\alpha, b) = 0$ при малых $b > 0$ достаточно найти первый коэффициент $v_k(\alpha) \not\equiv 0$ и исследовать его корни.

С этой целью подставим в систему (2.3) ряды (2.4), разложим функцию $\sin(u + 2tr)$ в ряд Тейлора и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях b . Получим систему

$$(2.5) \quad u_k'' = F_{k-1}(t, \alpha) \cos 2t + F_{k-m}(t, \alpha) a_m - v_k(\alpha)$$

$$(2.6) \quad \int_0^{p\pi} u_k dt = 0 \quad (m = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots)$$

Здесь

$$F(t, \alpha) = \sum_{s_j \in U_n} [i\sigma_n \cos(\alpha + 2tr) + (\sigma_n - 1) \sin(\alpha + 2tr)] \times \\ \times \prod_{j=0}^n \frac{(iu_j)^{s_j}}{s_j!}, \quad n \geq 0$$

$$F(t, \alpha) = 0, \quad n < 0; \quad u_0 = \alpha, \quad \sigma_n = 1/2 [1 - (-1)^n], \quad \lambda = \sum_{j=0}^n s_j$$

U_n — множество таких наборов целых чисел j и s_j , которые удовлетворяют условиям

$$s_0 = 0, \quad s_j \geq 0, \quad \sum_{j=0}^n j s_j = n$$

Система (2.5), (2.6) кроме неизвестных функций $u_k(t, \alpha)$, $v_k(\alpha)$ содержит неизвестные постоянные a_m и m . Для простой дроби r эти значения будем определять при последовательном отыскании решения системы (2.5), (2.6) при $m, k = 1, 2, \dots$, исходя из условий существования нетривиальной функции $v_k(\alpha)$. Для $m = 1, k = 1$ уравнение (2.5) запишется

в виде

$$(2.7) \quad u_1'' = -(a_1 + \cos 2t) \sin(\alpha + 2tr) - v_1(\alpha)$$

Интегрируя это уравнение, получим решение, зависящее от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 . Поскольку функции $u_k(t, \alpha)$ должны быть периодическими по t периода π , то здесь и в дальнейшем полагаем $C_1 = C_2 = 0$. Тогда решение уравнения (2.7) примет вид (здесь и ниже верхние и нижние знаки плюс и минус находятся в соответствии)

$$(2.8) \quad u_1 = -\frac{1}{2}(a_1 \sin \alpha + v_1)t^2 + \frac{1}{4} \sin \alpha \cos 2t, \quad r = 0$$

$$(2.9) \quad u_1 = \frac{1}{4}a_1 \sin(\alpha \pm 2t) + \frac{1}{32} \sin(\alpha \pm 4t) - \frac{1}{2}(v_1 + \frac{1}{2} \sin \alpha)t^2, \\ r = \pm 1$$

$$(2.10) \quad u_1 = \left(\frac{1}{2r}\right)^2 a_1 \sin(\alpha + 2tr) + \frac{\sin[\alpha + 2t(r+1)]}{8(r+1)^2} + \\ + \frac{\sin[\alpha + 2t(r-1)]}{8(r-1)^2} - \frac{1}{2}v_1 t^2, \quad r \neq 0, \pm 1$$

Для $r = \pm 1$ условие (2.6) определяет коэффициент $v_1(\alpha) = -\frac{1}{2} \sin \alpha$. Уравнение $v_1(\alpha) = 0$ имеет простые корни $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$, которые соответствуют двум порождающим решениям с $p = q = 1$ и двум решениям с $p = 1, q = -1$. Функция $v_1(\alpha)$ не зависит от a_1 , значит при любых малых a и b существуют два решения $\Gamma_{1,1}^i$ и два решения $\Gamma_{1,-1}^i$ ($i = 1, 2$). При достаточно малых a, b условие $dV/d\alpha \leq 0$ можно заменить неравенством

$$(2.11) \quad dv_k(\alpha_i)/d\alpha \leq 0$$

При проверке (2.11) оказалось, что корню $\alpha_1 = 0$ соответствуют устойчивые решения $\Gamma_{1,1}^1$ и $\Gamma_{1,-1}^1$, корню $\alpha_2 = \pi$ — неустойчивые $\Gamma_{1,1}^2$ и $\Gamma_{1,-1}^2$.

В случае $q = 0$ находим $v_1(\alpha) = -a_1 \sin \alpha$. Корни $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$ уравнения $v_1(\alpha) = 0$ соответствуют стационарным решениям $x = 0$ и $x = \pi$, которые обозначим $\Gamma_{1,0}^1$ и $\Gamma_{1,0}^2$. Из (2.11) следует, что решение $\Gamma_{1,0}^1$ ($\Gamma_{1,0}^2$) устойчиво при $a_1 > 0$ ($a_1 < 0$) и неустойчиво при $a_1 < 0$ ($a_1 > 0$). Получаем, что значение $a = a_1 = 0$ соответствует смене устойчивости стационарных решений. Дополнительное исследование этой бифуркации проводится ниже при $m = 2$.

Для $r \neq 0, \pm 1$ условие (2.6) дает $v_1(\alpha) \equiv 0$. Поэтому в (2.5) положим $k = 2$ и рассмотрим уравнение

$$(2.12) \quad u_2'' = -(a_1 + \cos 2t) \cos(\alpha + 2tr)u_1 - v_2(\alpha)$$

Подставим (2.10) в (2.12) и найдем

$$(2.13) \quad u_2 = \left[\frac{a_1^2}{2^7 r^4} + \frac{1/r^2 + 1}{2^8 (r^2 - 1)^2} \right] \sin 2(\alpha + 2tr) + \frac{a_1}{2^8 (2r - 1)^2} \times \\ \times \left[\frac{1}{(r-1)^2} + \frac{1}{r^2} \right] \sin 2(\alpha + t(2r-1)) + \\ + \frac{a_1}{2^8 (2r+1)^2} \left[\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{1}{r^2} \right] \sin 2(\alpha + t(2r+1)) + \\ + \frac{\sin 2(\alpha + 2t(r-1))}{2^9 (r-1)^4} + \frac{\sin 2(\alpha + 2t(r+1))}{2^9 (r+1)^4} - \\ - \frac{a_1 r \sin 2t}{2^4 (r+1)^2 (r-1)^2} - \frac{r \sin 4t}{2^7 (r-1)^2 (r+1)^2} - v_2(\alpha), \\ r \neq 0, \pm 1/2, \pm 1$$

$$(2.14) \quad u_2 = \frac{1}{8} \left(a_1^2 + \frac{5}{18} \right) \sin 2(\alpha \pm t) \mp \frac{a_1}{18} \sin 2t + \frac{1}{32} \sin 2(\alpha \pm t) + \\ + \frac{1}{2592} \sin 2(\alpha \pm 3t) \mp \frac{1}{144} \sin 4t - \frac{a_1}{4} t^2 \sin 2\alpha + \\ + \frac{a_1}{576} \sin 2(\alpha \pm 2t) - \frac{v_2(\alpha)}{2} t^2, \quad r = \pm \frac{1}{2}.$$

В случае $r = \pm 1/2$ условие (2.6) определяет $v_2(\alpha) = -1/2 a_1 \sin 2\alpha$. Уравнение $v_2(\alpha) = 0$ имеет корни $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Значения $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ соответствуют порождающему решению $x_1 = \pm t$, $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = 3\pi/2$ — решению $x_2 = \pm t + \pi/2$. Как и в случае $q = 0$, решение $\Gamma_{2, \pm 1}^1$ устойчиво при $a_1 > 0$, а $\Gamma_{2, \pm 1}^2$ неустойчиво, смена их устойчивости происходит при $a_1 = a = 0$.

Для $r \neq 0, \pm 1/2, \pm 1$ коэффициент $v_2(\alpha) = 0$ при любых a_1 . При $k = 3$ уравнение (2.5) принимает вид

$$(2.15) \quad u_3'' = -(a_1 + \cos 2t)[u_2 \cos(\alpha + 2tr) - \\ - 1/2 u_1^2 \sin(\alpha + 2tr)] - v_3(\alpha)$$

Подставив (2.10), (2.13) в уравнение (2.15) и проинтегрировав его, найдем коэффициент $u_3(t, \alpha)$, который не приводим из-за его громоздкости. Используя (2.6) для $r = \pm 1/3$, находим

$$v_3(\alpha) = -\frac{3}{100} \left(\frac{7}{16} + \frac{281}{25} a_1^2 \right) \sin 3\alpha.$$

Получаем, что при любых a_1 имеется шесть корней $\alpha_s = \pi s/3$ ($s = 0, 1, \dots, 5$). Корни α_s с четным s (включая $s = 0$) соответствуют порождающему решению $x_1(t) = \pm^2/3 t$, с нечетным s — решению $x_2(t) = \pm^2/3 t + 1/3 \pi$. Проверка условия (2.11) показала, что первое решение порождает устойчивое решение $\Gamma_{3, \pm 1}^1$, второе — неустойчивое $\Gamma_{3, \pm 1}^2$. Используя (2.6) для $r = \pm^3/1$, получаем $v_3(\alpha) = -\sin \alpha$. Уравнение $v_3(\alpha) = 0$ имеет простые корни $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$. Корень α_1 соответствует устойчивому решению $\Gamma_{1, \pm 3}^1$, α_2 — неустойчивому $\Gamma_{1, \pm 3}^2$.

Для $r = \pm^2/3$ и $r = \pm^2/1$ имеем $v_3(\alpha) = -a_1 \sin 3\alpha$ и $v_3(\alpha) = -a_1 \sin \alpha$. При исследовании корней уравнения $v_3(\alpha) = 0$ оказалось, что порождающими являются решения $x_1 = \pm^4/3 t$, $x_2 = \pm^4/3 t + 1/3 \pi$ и $x_1 = \pm 4t$, $x_2 = \pm 4t + \pi$. Как и при $r = 0, \pm 1/2$, смена устойчивости порождаемых решений $\Gamma_{3, \pm 2}^1, \Gamma_{3, \pm 2}^2, \Gamma_{1, \pm 2}^1, \Gamma_{1, \pm 2}^2$ происходит при $a = 0$. Для $r \neq \pm 1/3, \pm^3/1, \pm^2/3, \pm^2/1$ функция $v_3(\alpha) \equiv 0$. Продолжая этот процесс для $k = 4, 5, \dots$, можно определить число и характер устойчивости решений $\Gamma_{p, q}$ для других значений r .

Результаты решения системы (2.5), (2.6) при $m = 1$ и целых k от 1 до 10 показали, что в случае нечетных p и q можно указать значение дроби q/p , которое определяется системой (2.5), (2.6) с нечетным индексом k . Для этого необходимо составить последовательность всех несократимых дробей $\{s/k\}$, где s — нечетное число, $0 < s/k \leq 1$. Тогда каждой дроби s/k соответствует пара дробей $p/|q|$ ($p = s, q = \pm k$) и $|q|/p$ ($q = \pm s, p = k$). При этом дроби q/p соответствует уравнение $v_k(\alpha) = \gamma_{p, q} \sin p\alpha = 0$ ($\gamma_{p, q} < 0$), имеющее $2p$ корней $\alpha_l = \pi l/p$ ($l = 0, 1, \dots, 2p - 1$). Корни с четным индексом (включая $l = 0$) отвечают устойчивому решению $\Gamma_{p, q}^1$, с нечетным — неустойчивому $\Gamma_{p, q}^2$. Эти данные позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. При достаточно малых a и b для любой пары взаимно простых нечетных чисел p и q уравнение (1.1) имеет устойчивое (в первом приближении) и неустойчивое периодические решения $\Gamma_{p, q}^1$ и $\Gamma_{p, q}^2$, порождаемые решениями $x_1(t) = 2tq/p$ и $x_2(t) = (2tq + \pi)/p$ соответственно.

Для взаимно простых чисел p и q , одно из которых четное, выясним бифуркацию, происходящую при смене характера устойчивости решения $\Gamma_{p, q}$ при $a = 0$. Так же как и в случае $m = 1$, для $m = 2, 3, \dots, 8$ были найдены функции $u_k(t, \alpha)$ и $v_k(\alpha)$ при всех k от 1 до 14.

Сформулируем сначала некоторые общие выводы, вытекающие из полученных результатов, затем проиллюстрируем их конкретными примерами.]

1°. Для всех значений $k \neq 2(m-1)$, $2m$ коэффициент $v_k(\alpha) \equiv 0$ (сюда включен также случай, в котором исследование корней уравнения $v_k(\alpha) = 0$ не приводит к новым данным по сравнению с $m = 1$).

2°. Если $k = 2(m-1)$, $2m$, то функция $v_k(\alpha)$ имеет вид

$$(2.16) \quad v_k(\alpha) = -\sin p\alpha (a_m A_k + B_k \cos p\alpha)$$

где A_k и B_k — положительные постоянные, зависящие от p и q .

3°. Для установления значений p и q , которые определяются системой (2.5), (2.6) с $k = 2(m-1)$ и $k = 2m$, необходимо составить соответственно последовательности $\{s/(m-1)\}$ ($0 \leq s/(m-1) < 1$) и $\{s/m\}$ ($0 < s/m < 1$) всех несократимых дробей, где s — четное (нечетное) число, если знаменатель дроби — нечетное (четное) число, $s = 0$ при $m = 2$ (для первой последовательности). Каждой дроби $s/(m-1)$ отвечает дробь $|q|/p$, дроби s/m — дробь $p/|q|$.

В качестве первого примера проведем исследование решений $\Gamma_{1,0}$, соответствующих нижнему или верхнему положению равновесия маятника или колебаниям его около них. При $m = 2$ и $k = 1$ получим уравнение (2.7), в котором отсутствует a_1 . Условие (2.6) для решения (2.8) определяет $v_1(\alpha) \equiv 0$, что подтверждает вывод 1°. При $k = 2(m-1) = 2$ имеем

$$u_2'' = -a_2 \sin \alpha - u_1 \cos 2t \cos \alpha - v_2(\alpha)$$

Подставим сюда (2.8) и найдем решение. Используя (2.6), получим функцию $v_2(\alpha) = -\sin \alpha (a_2 + 1/8 \cos \alpha)$. Кроме корней $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$ (ср. $m = 1$) уравнение $v_2(\alpha) = 0$ при $|a_2| = |a/b^2| < 1/8$ имеет простые корни $\alpha_3 = \arccos(-8a/b^2)$, $\alpha_4 = 2\pi - \arccos(-8a/b^2)$, которые отвечают π -периодическим решениям $\Gamma_{1,0}^3$ и $\Gamma_{1,0}^4$ колебательного типа. Корни α_3 и α_4 являются непрерывными функциями параметров a , b . При возрастании значения a/b^2 в интервале $(-1/8, 1/8)$ корень α_3 возрастает от нуля до π , а α_4 уменьшается от 2π до π . Поскольку функция $v_2(\alpha)$ периодическая периода 2π , то при $a = -b^2/8$ корни α_3 и α_4 сливаются с корнем $\alpha_1 = 0$, а при $a = b^2/8$ — с $\alpha_2 = \pi$.

Получаем, что кроме двух стационарных решений $\Gamma_{1,0}^1: x(t) = 0$ и $\Gamma_{1,0}^2: x(t) = \pi$ в области $|a/b^2| < 1/8$ при малых a и b существуют два периодических решения $\Gamma_{1,0}^3$, $\Gamma_{1,0}^4$. На кривых $l_{1,0}: a = -b^2/8$ и $l'_{1,0}: a = b^2/8$ происходит слияние периодических решений колебательного типа с решениями $\Gamma_{1,0}^1$ и $\Gamma_{1,0}^2$ соответственно.

Чтобы выяснить характер устойчивости решений, найдем производную $dv_2/d\alpha = -((a/b^2) \cos \alpha + 1/8 \cos 2\alpha)$ и вычислим ее значение при $\alpha = \alpha_i$. Пользуясь (2.11), получаем, что в области $a > b^2/8$ решение $\Gamma_{1,0}^1$ устойчиво, а $\Gamma_{1,0}^2$ неустойчиво. В области $a < -b^2/8$, наоборот, решение $\Gamma_{1,0}^1$ неустойчиво, а $\Gamma_{1,0}^2$ устойчиво. При $|a| < b^2/8$ оба эти решения устойчивы, а периодические решения $\Gamma_{1,0}^3$ и $\Gamma_{1,0}^4$, соответствующие корням α_3 и α_4 , неустойчивы. Таким образом, смена характера устойчивости решений $x(t) = 0$ и $x(t) = \pi$ на кривых $l_{1,0}$ и $l'_{1,0}$ соответственно сопровождается возникновением двух неустойчивых периодических решений $\Gamma_{1,0}^3$ и $\Gamma_{1,0}^4$. Этот вывод согласуется с численными результатами исследования стационарных и периодических решений $\Gamma_{1,0}$ ².

Далее, при $m = 2$ возьмем значение $k = 2m = 4$. Последовательность $\{s/m\}$ содержит одну дробь $1/2$, т. е. получим нетривиальную функцию $v_4(\alpha)$ для случая $q/p = \pm 2/1$. Не останавливаясь на решении системы (2.5), (2.6) при значениях $k_s = 1, 2, 3$, для которых функция $v_k(\alpha) \equiv 0$, запишем уравнение (2.5) при $k = 4$

$$u_4'' = -a_2[u_2 \cos(\alpha \pm 4t) - 1/2 u_1^2 \sin(\alpha \pm 4t) - \cos 2t[(u_3 - 1/6 u_1^3) \times \\ \times \cos(\alpha \pm 4t) - u_1 u_2 \sin(\alpha \pm 4t)]] - v_4(\alpha)$$

² Баталова З. С., Белякова Г. В. О структуре фазового пространства уравнения движений маятника с колеблющейся точкой подвеса. Горький, 1984. 37с.— Деп. в ВИНТИ 31.05.84: № 3539-84.

Подставляя сюда найденные для u_1, u_2, u_3 выражения, найдем решение $u_4(t, \alpha)$. Условие (2.6) определяет коэффициент $v_4(\alpha) = -\sin \alpha (288a_2 + 25 \cos \alpha)$. Отсюда следует, что уравнение $v_4(\alpha) = 0$ при любых a_2 имеет простые корни $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$. Кроме того, при $|a_2| = |a/b^2|$ существуют корни $\alpha_3 = \arccos(-a/(kb^2)), \alpha_4 = 2\pi - \alpha_3$ ($k = 25/288$). При возрастании a/b^2 от $-k$ до k корень α_3 растет от нуля до π , а α_4 убывает от 2π до π .

Используя эти данные и условие (2.11), получаем, что при достаточно малых a, b имеются две бифуркационные кривые $l_{1,2}: a = -kb^2$ и $l'_{1,2}: a = kb^2$, которые разделяют окрестность точки $(0, 0)$ на три области. В области $|a| < kb^2$ существуют четыре решения $\Gamma_{1,\pm 2}^i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), причем $\Gamma_{1,\pm 2}^2$ и $\Gamma_{1,\pm 2}^3$ устойчивы в первом приближении, $\Gamma_{1,\pm 2}^1$ и $\Gamma_{1,\pm 2}^4$ неустойчивы. В области $a > kb^2$ ($a < -kb^2$) существуют устойчивое решение $\Gamma_{1,\pm 2}^1$ ($\Gamma_{1,\pm 2}^2$) и неустойчивое $\Gamma_{1,\pm 2}^2$ ($\Gamma_{1,\pm 2}^1$). На бифуркационных кривых $l_{1,2}$ и $l'_{1,2}$ происходит смена устойчивости решений $\Gamma_{1,\pm 2}^1$ и $\Gamma_{1,\pm 2}^2$ соответственно, приводящая к возникновению неустойчивых решений $\Gamma_{1,\pm 2}^3$ и $\Gamma_{1,\pm 2}^4$.

В следующем примере возьмем $m = 3$. Определим значения p, q , для которых могут быть найдены корни бифуркационного уравнения. Для $k = 2(m-1) = 4$ и $k = 2m = 6$ последовательности, указанные в п. 3, содержат дроби $1/2$ и $2/3$ соответственно. Следовательно, в результате последовательного решения системы (2.5), (2.6) получим нетривиальную функцию $v_4(\alpha)$ для $q/p = \pm 1/2$ и функцию $v_6(\alpha)$ для $q/p = \pm 3/2$.

В случае $q/p = \pm 1/2$ уравнение $v_4(\alpha) = -1/4 \sin 2\alpha (3a_3 + 1/8 \cos 2\alpha) = 0$ при любых a_3 имеет простые корни $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Корни 0 и π соответствуют порождающему решению $x_1(t) = \pm t$, корни $\pi/2$ и $3\pi/2$ — решению $x_2(t) = \pm t + \pi/2$. При условии $|a_3| = |a/b^2| < 1/24$ это уравнение имеет еще корни $\alpha_1^3 = 1/2 \arccos(-a/(24b^3)), \alpha_2^3 = \pi + \alpha_1^3, \alpha_1^4 = 2\pi - \alpha_1^3, \alpha_2^4 = \pi - \alpha_1^3$, которые соответствуют двум порождающим решениям $x_3(t) = \pm t + \alpha_1^3$ и $x_4(t) = \pm t + \alpha_1^4$. При возрастании a/b^3 в интервале $(-1/24, 1/24)$ корни α_1^3 и α_2^3 возрастают от нуля до $\pi/2$ и от π до $3\pi/2$ соответственно, а корни α_1^4 и α_2^4 уменьшаются от 2π до $3\pi/2$ и от π до $\pi/2$. Учитывая эти данные и условие (2.11) для анализа устойчивости решений $\Gamma_{2,\pm 1}^i$, порождаемых решениями $x_i(t)$, получаем следующий результат. При достаточно малых a, b имеются две бифуркационные кривые $l_{1,2}: a = -b^3/24$ и $l'_{1,2}: a = b^3/24$, которые разбивают окрестность точки $(0, 0)$ на три области. При $|a| < b^3/24$ существуют два устойчивых решения $\Gamma_{2,\pm 1}^1$ и $\Gamma_{2,\pm 1}^2$ и два неустойчивых $\Gamma_{2,\pm 1}^3$ и $\Gamma_{2,\pm 1}^4$. В области $a > b^3/24$ решение $\Gamma_{2,\pm 1}^2$ устойчиво, $\Gamma_{2,\pm 1}^1$ неустойчиво, в области $a < -b^3/24$, наоборот, $\Gamma_{2,\pm 1}^1$ неустойчиво, $\Gamma_{2,\pm 1}^2$ устойчиво. При переходе точки (a, b) через бифуркационную кривую $l_{2,1}$ ($l'_{2,1}$) в область $|a| < b^3/24$ смена устойчивости решения $\Gamma_{2,\pm 1}^1$ ($\Gamma_{2,\pm 1}^2$) сопровождается возникновением решений $\Gamma_{2,\pm 1}^3$ и $\Gamma_{2,\pm 1}^4$.

В последнем примере для $m = 7$ укажем значения p и q , для которых получены значения корней бифуркационного уравнения. Для $k = 2(m-1) = 12$ последовательность несократимых дробей (см. п. 3^о) содержит дроби: $1/6, 5/6$. Нетривиальная функция $v_{12}(\alpha)$ вида (2.16) с $p = 6$ получена для значений $q/p = \pm 1/6$ и $q/p = \pm 5/6$. Для $k = 2m = 14$ последовательность содержит дроби: $2/7, 4/7, 6/7$. Функция $v_{14}(\alpha)$ с $p = 2, 4, 6$ получена для $q/p = \pm 7/2, \pm 7/4, \pm 7/6$.

Во всех случаях найдены бифуркационные кривые $l_{p,q}$ и $l'_{p,q}$, на которых происходит смена устойчивости периодических решений $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^2$, сопровождающаяся возникновением двух неустойчивых решений $\Gamma_{p,q}^3$ и $\Gamma_{p,q}^4$. Эти результаты и рассмотренные ранее частные случаи $a = 0$ и $q = 0$ ³ позволяют сформулировать общее утверждение.

Теорема 2. При достаточно малых a и b для любой пары взаимно простых чисел p и q , одно из которых — четное число (включая $q = 0$), существуют периодические решения $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^2$, порождаемые решениями $x_1(t) = 2tq/p$ и $x_2(t) = (2tq + \pi)/p$ соответственно. Бифуркационные кривые $l_{p,q}: a = -a_m b^m$ и $l'_{p,q}: a = a_m b^m$ ($a_m > 0$), выходящие из точки $(0, 0)$,

³ Баталова З. С., Бухалова Н. В. Периодические движения маятника с колеблющейся вертикальной осью вращения. Горький, 1984. 21 с. — Деп. в ВИНТИ 01.02. 84; № 618-84. См. также работу, указанную в сноске ².

разбивают окрестность этой точки на три области. Справа от кривой $l'_{p,q}$ решение $\Gamma_{p,q}^1$ устойчиво, а $\Gamma_{p,q}^2$ неустойчиво, слева от кривой $l_{p,q}$ решение $\Gamma_{p,q}^1$ неустойчиво, а $\Gamma_{p,q}^2$ устойчиво. На кривых $l_{p,q}$ и $l'_{p,q}$ происходит смена устойчивости решений $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^2$ соответственно, сопровождающаяся возникновением еще двух решений $\Gamma_{p,q}^3$ и $\Gamma_{p,q}^4$. В области, расположенной между кривыми $l_{p,q}$ и $l'_{p,q}$, существуют четыре решения: устойчивые $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^2$ и неустойчивые $\Gamma_{p,q}^3$ и $\Gamma_{p,q}^4$.

3. Области существования и устойчивости периодических вращений маятника. Изучение периодических вращений $\Gamma_{p,q}$ было продолжено в области больших значений параметров a и b при помощи комплекса алгоритмов и программ [8]. В ограниченной области $G_{p,q}$ изменения параметров проводилось отыскание координат начальной точки $N_{p,q}(x(0), x'(0))$, соответствующей решению $\Gamma_{p,q}$, и вычисление мультипликаторов ρ_1 и ρ_2 , характеризующих его устойчивость в первом приближении. Шаг Δ по параметрам a и b выбирался в зависимости от величины мультипликаторов: для значений $|\rho_{1,2}|$, близких к $+1$, величина Δ не превышала 10^{-2} , для других значений $\rho_{1,2}$ решение прослеживалось с шагом $\Delta \leq 0,2$. Результаты изучения решений $\Gamma_{p,q}$ представлены в виде диаграмм устойчивости на плоскости параметров a, b и графиков, отражающих зависимость начальных значений $x(0)$ и $x'(0)$ от a и b . Графики приводятся для решения $\Gamma_{p,q}$ с $q > 0$, поскольку при одинаковых значениях a и b решения с $q > 0$ и $q < 0$ имеют одинаковый характер устойчивости, а соответствующие им начальные точки расположены симметрично относительно оси x (см. работу, указанную в сноске ²).

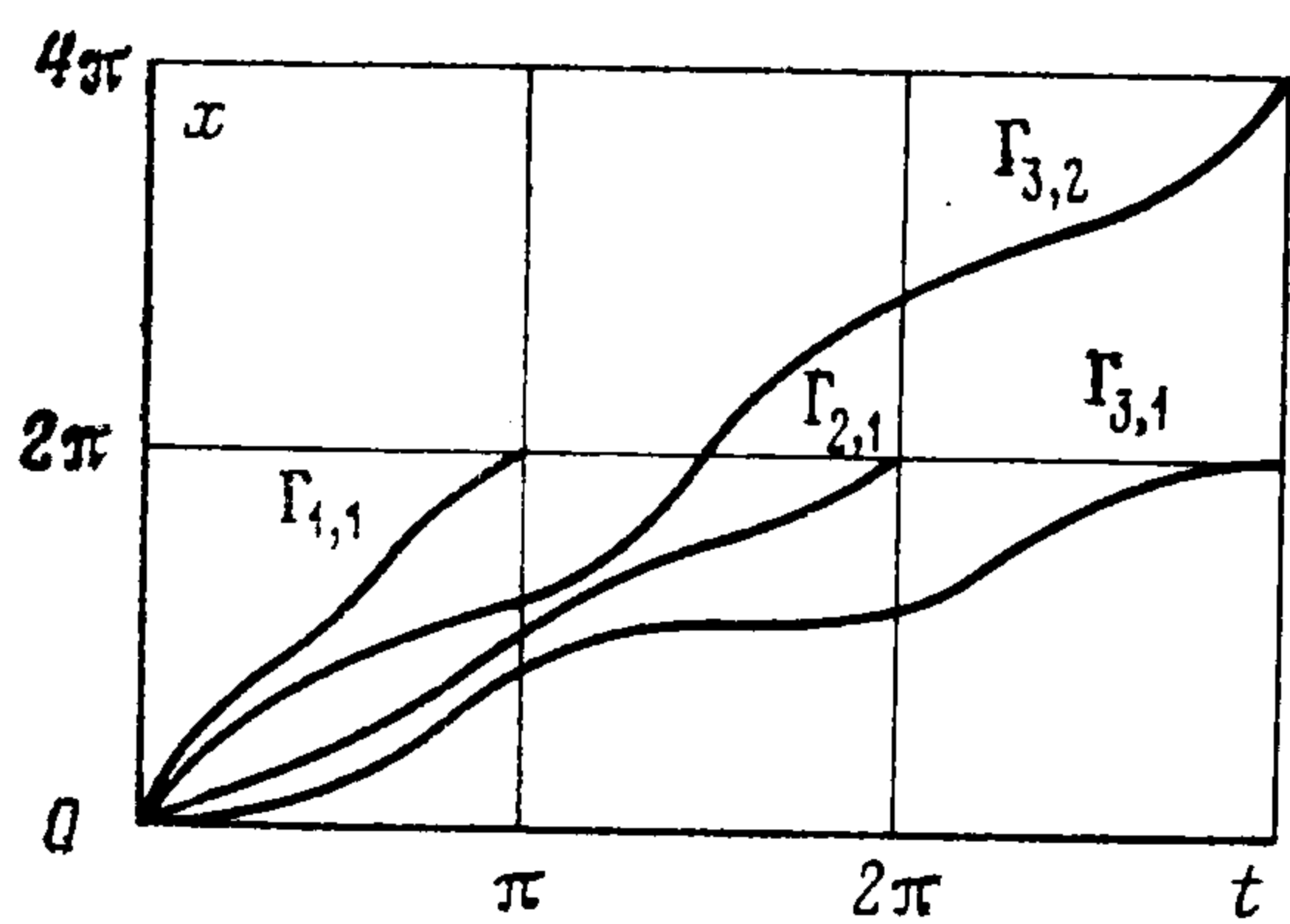
Перейдем к рассмотрению конкретных периодических решений $\Gamma_{p,q}$ уравнения (1.1). Вид некоторых решений представлен на фиг. 1.

Решения $\Gamma_{1,1}^1$ и $\Gamma_{1,1}^2$, порождаемые решениями $x(t) = 2t$ и $x(t) = 2t + \pi$, исследовались в области $G_{1,1} \{ |a| \leq 2, 0 \leq b \leq 7 \}$. Как следует из п. 2, при $a = b = 0$ им соответствуют начальные точки $N_{1,1}^1(0, 2)$, $N_{1,1}^2(\pi, 2)$. С ростом a и b значения абсцисс этих точек не меняются и остаются равными нулю и π . Графики зависимости ординат $x'(0)$ для решений $\Gamma_{1,1}^1$ и $\Gamma_{1,1}^2$ (сплошная и штриховая линии) приведены на фиг. 2, а.

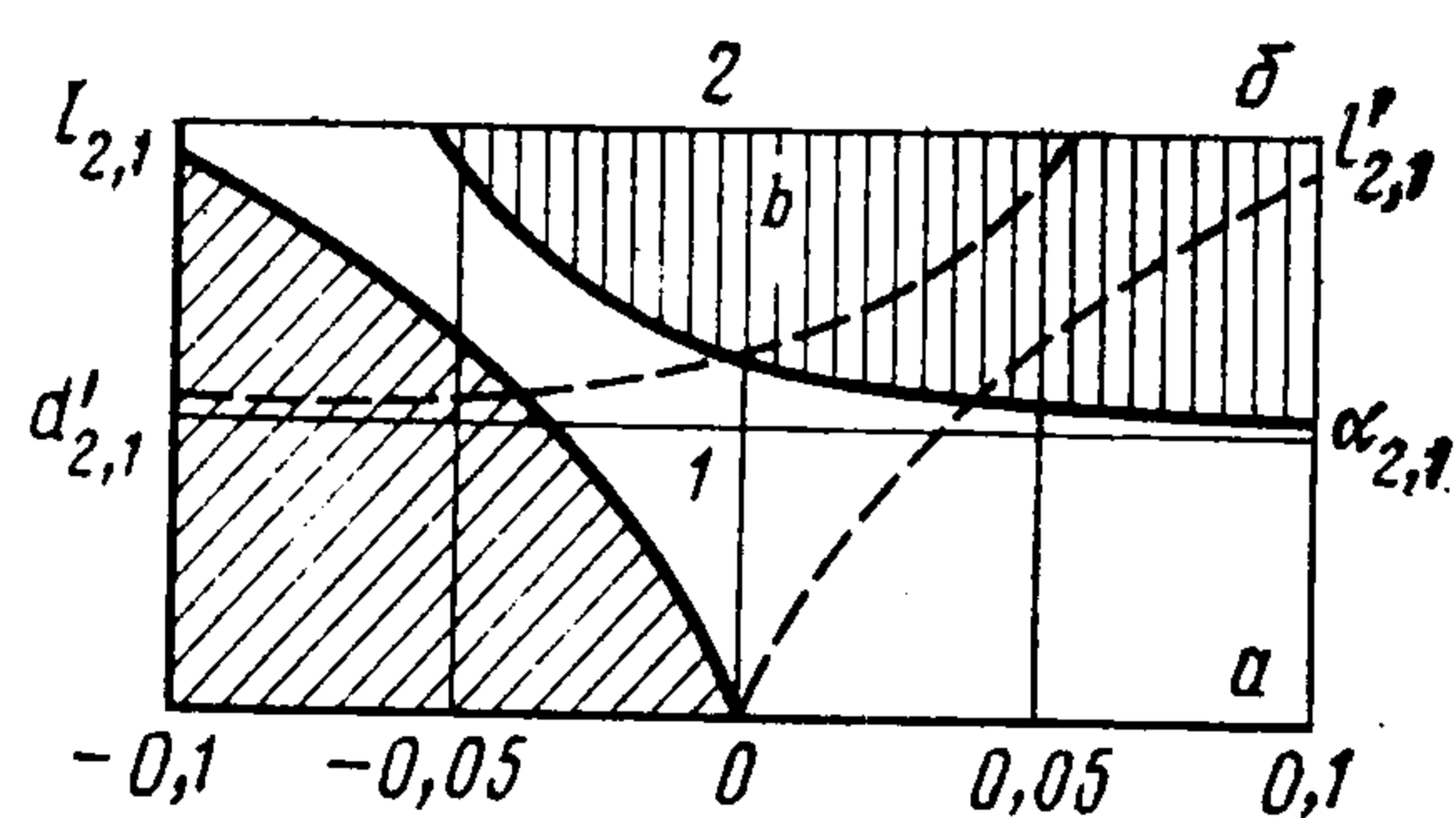
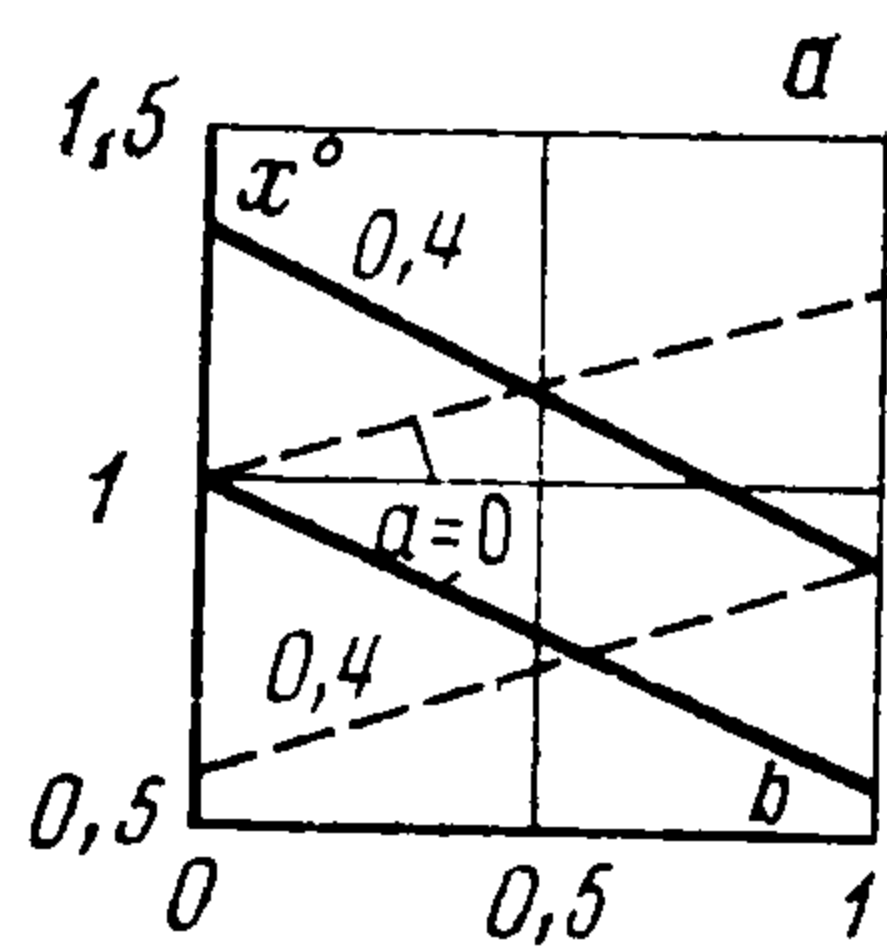
Вычисление мультипликаторов ρ_1 и ρ_2 решения $\Gamma_{1,1}^2$ показало, что с увеличением a и b от нуля ρ_1 возрастает от единицы, $\rho_2 = \rho_1^{-1}$, т. е. в области $G_{1,1}$ решение $\Gamma_{1,1}^2$ неустойчиво. Анализ мультипликаторов решения $\Gamma_{1,1}^1$ позволил построить бифуркационную диаграмму, приведенную на фиг. 2, б. В заштрихованных областях решение $\Gamma_{1,1}^1$ неустойчиво, вертикальная штриховка отвечает отрицательным значениям $\rho_{1,2}$ и $|\rho_1| < 1, |\rho_2| > 1$, косая — положительным, незаштрихованные области соответствуют областям устойчивости решения $\Gamma_{1,1}^1$; здесь $\rho_{1,2} = \exp(\pm i\varphi(a, b))$. В точках кривых $l_{1,1}$ и $d_{1,1}$ значения $\rho_{1,2} = -1$, в точках $s_{1,1}$ имеем $\rho_{1,2} = +1$. Таким образом, в области $G_{1,1}$ существуют два периодических решения $\Gamma_{1,1}^1$ и $\Gamma_{1,1}^2$. Решение $\Gamma_{1,1}^2$ неустойчиво, бифуркационная диаграмма решения $\Gamma_{1,1}^1$ симметрична относительно прямой $a = 0$ и содержит две области устойчивости, ограниченные линиями $b = 0, l_{1,1}$ и $d_{1,1}, d_{1,1}$.

Периодические решения $\Gamma_{3,1}^1$ и $\Gamma_{3,1}^2$, порождаемые решениями $x_1(t) = \frac{2}{3}t$ и $x_2(t) = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}\pi$, рассматривались в области $G_{3,1} \{ |a| \leq 0,25, 0 \leq b \leq 2,2 \}$. При $a = b = 0$ им соответствуют начальные точки $N_{3,1}^1(0, \frac{2}{3})$ и $N_{3,1}^2(\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3})$. С ростом a и b от нуля абсциссы точек не меняются. Кривые зависимости начальной скорости $x'(0)$ решений $\Gamma_{3,1}^1$ и $\Gamma_{3,1}^2$ (сплошная и штриховая линии) приведены на фиг. 3, а).

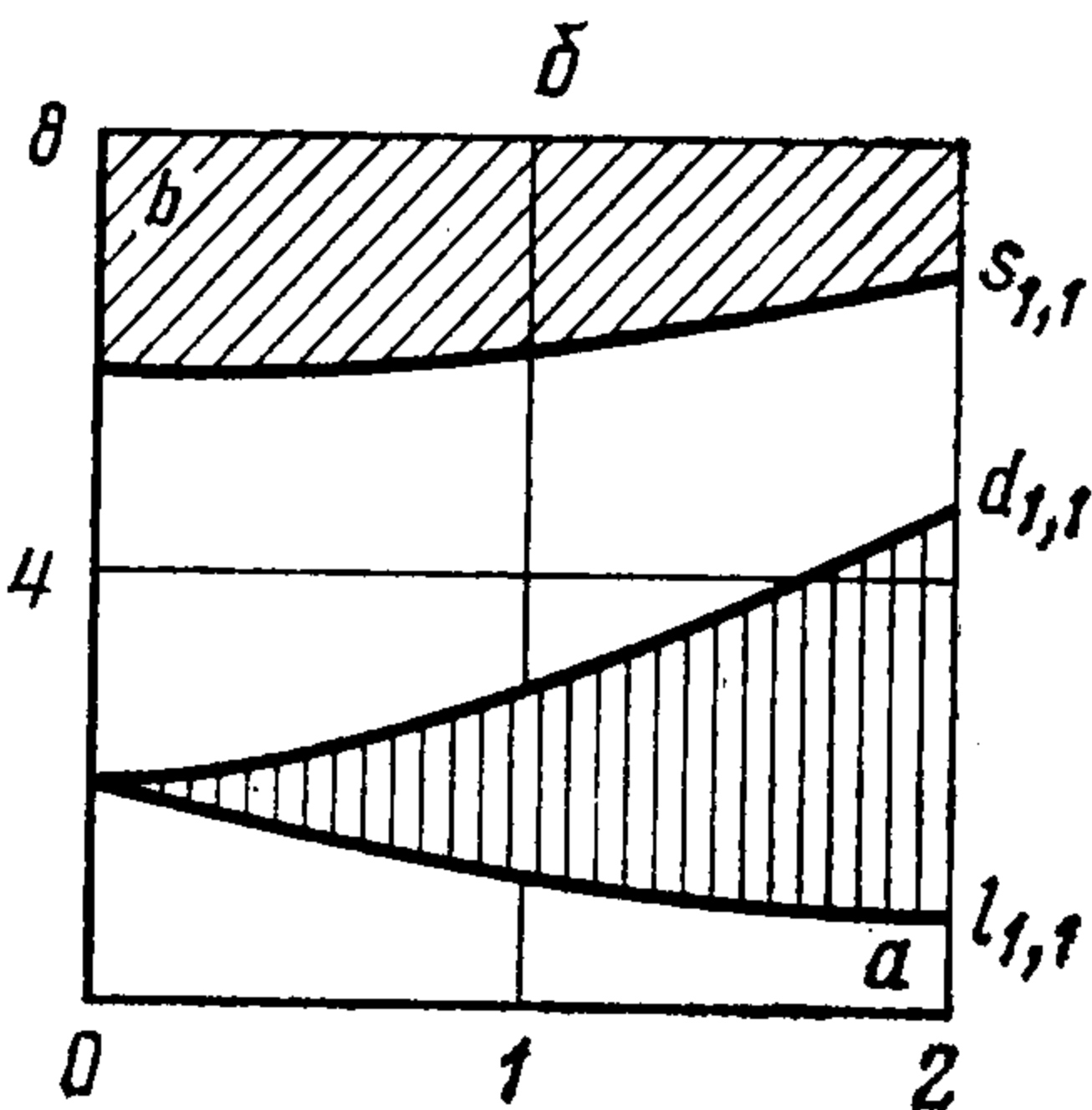
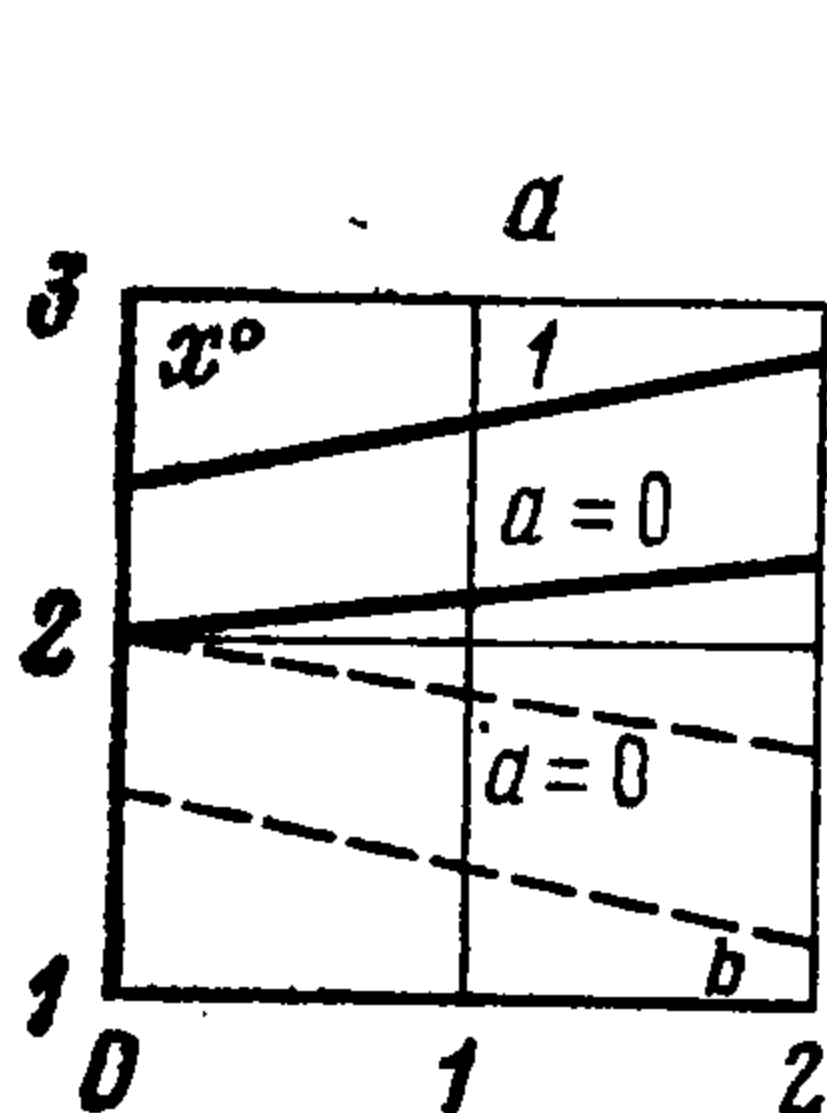
Вычисление мультипликаторов решения $\Gamma_{3,1}^2$ показало, что в области $G_{3,1}$ оно неустойчиво. Бифуркационная диаграмма решения $\Gamma_{3,1}^1$, симметричная относительно прямой $a = 0$, представлена на фиг. 3, б. В области, ограниченной линиями $l_{3,1}$ и $d_{3,1}$ (вертикальная штриховка), значения ρ_1 и ρ_2 отрицательны, в точках (a, b) , лежащих выше кривой $s_{3,1}$ (косая штриховка), они положительны. На кривых $l_{3,1}$ и $d_{3,1}$ значения $\rho_{1,2} = -1$, на кривой $s_{3,1}$ имеем $\rho_{1,2} = 1$. В незаштрихованных областях решение $\Gamma_{3,1}^1$ устойчиво; здесь $\rho_{1,2} = \exp(\pm i\varphi(a, b))$.



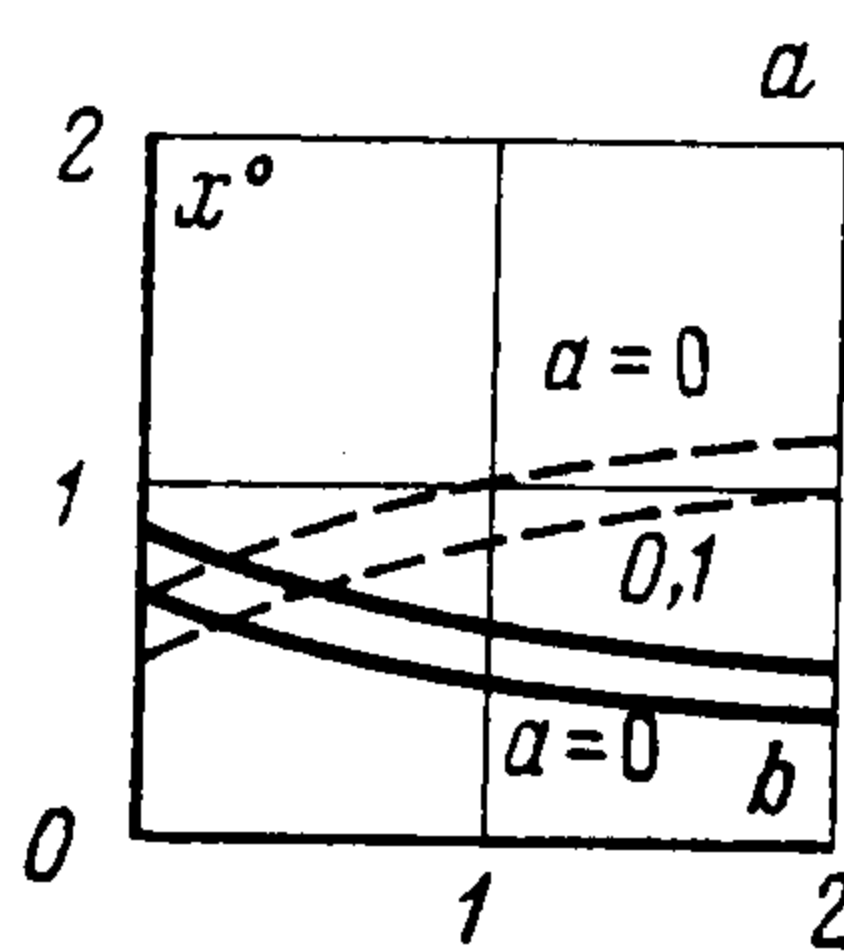
Фиг. 1



Фиг. 4



Фиг. 2



Фиг. 3

Проведенное в п. 2 аналитическое исследование и численное изучение других решений $\Gamma_{p,q}$ при нечетных p и q позволяют высказать следующее утверждение.

Теорема 3. В ограниченной области изменения параметров a и b для любой пары взаимно простых нечетных чисел p и q существуют два периодических решения $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^2$. Решение $\Gamma_{p,q}^2$, порожденное решением $x_2(t) = (2tq + \pi)/p$, неустойчиво. Бифуркационная диаграмма решения $\Gamma_{p,q}^1$, порожденного решением $x_1(t) = 2tq/p$, содержит две области устойчивости, ограниченные линиями $b = 0$, $l_{p,q}$ и $d_{p,q}$, $s_{p,q}$. При смене устойчивости на кривых $l_{p,q}$ и $d_{p,q}$ мультипликаторы $\rho_{1,2} = -1$. На кривой $s_{p,q}$ мультипликаторы $\rho_{1,2} = +1$. При любых a , b абсциссы начальных точек решений $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^2$ равны нулю и π/p соответственно.

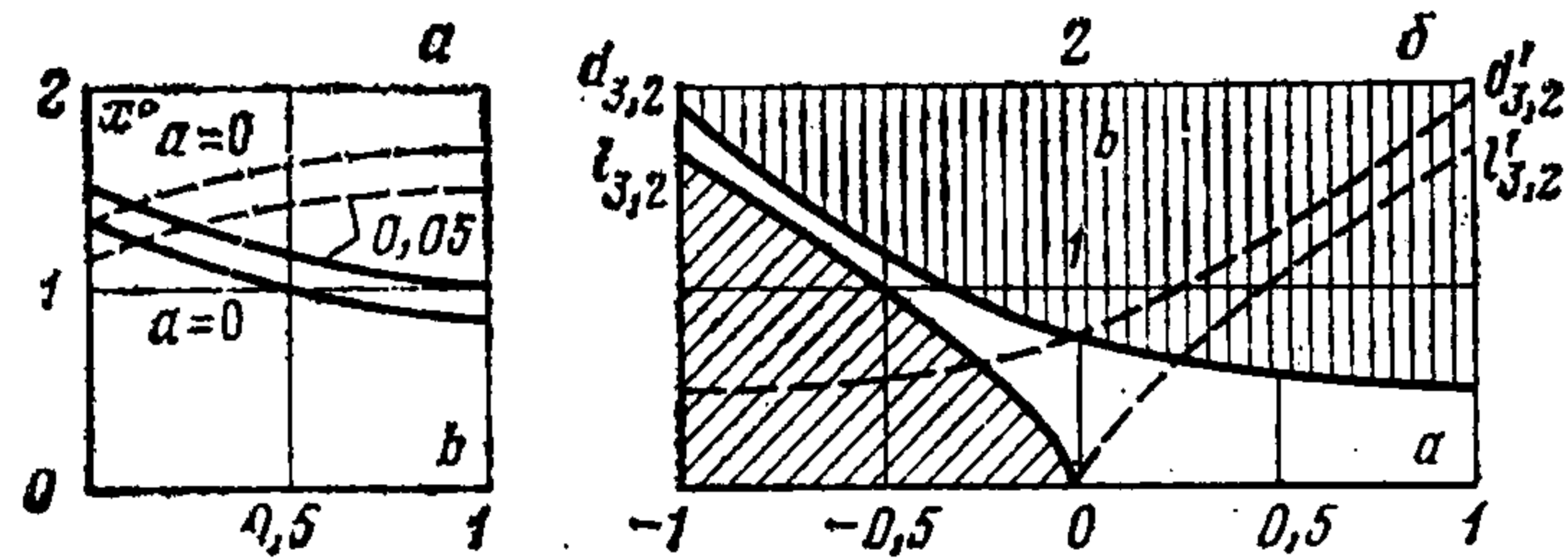
Далее рассмотрим периодические решения $\Gamma_{p,q}$ с четным p или q .

Решения $\Gamma_{2,1}^i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) изучались в области $G_{2,1} \{ |a| \leq 0,45, 0 \leq b \leq 1,6 \}$. Решения $\Gamma_{2,1}^1$ и $\Gamma_{2,1}^2$ порождены решениями $x_1(t) = t$ и $x_2(t) = t + 1/2\pi$. Вычисление координат начальных точек $N_{2,1}^1$ и $N_{2,1}^2$ показало, что при любых a и b их абсциссы равны нулю и $\pi/2$ соответственно. Графики на фиг 4, а характеризуют изменение начальной скорости $x'(0)$ решений $\Gamma_{2,1}^1$ и $\Gamma_{2,1}^2$ (сплошная и штриховая линии). На фиг. 4, б приведена бифуркационная диаграмма решения $\Gamma_{2,1}^1$. В заштрихованных областях решение $\Gamma_{2,1}^1$ неустойчиво. В точках области, расположенной выше кривой $d_{2,1}$ (вертикальная штриховка), мультипликаторы отрицательны. В области, ограниченной полупрямой $a < 0$, $b = 0$ и кривой $l_{2,1}$, они положительны. Незаштрихованная область является областью устойчивости решения $\Gamma_{2,1}^1$; здесь $\rho_{1,2} = \exp(\pm i\varphi(a|b))$.

Бифуркационная диаграмма решения $\Gamma_{2,1}^2$; симметрична диаграмме решения $\Gamma_{2,1}^1$ относительно оси b . Область устойчивости решения $\Gamma_{2,1}^2$ ограничена линиями $d_{2,1}'$, $l_{2,1}'$ и полупрямой $a < 0$, $b = 0$. При смене устойчивости решения $\Gamma_{2,1}^2$ на кривой $l_{2,1}'$ происходит возникновение двух неустойчивых решений $\Gamma_{2,1}^3$ и $\Gamma_{2,1}^4$. При вычислении координат их начальных точек $N_{2,1}^3$ и $N_{2,1}^4$ оказалось, что при движении точки (a, b) от кривой $l_{2,1}'$ к $l_{2,1}$ они удаляются от точки $N_{2,1}^2$ и сближаются с точкой $N_{2,1}^1$. На кривой $l_{2,1}$ точки $N_{2,1}^3$ и $N_{2,1}^4$ сливаются с $N_{2,1}^1$. Это приводит к смене устойчивости решения $\Gamma_{2,1}^1$. Таким образом, область существования решений $\Gamma_{2,1}^3$ и $\Gamma_{2,1}^4$ — мно-

жество точек, ограниченное кривыми $l_{2,1}$ и $l'_{2,1}$, выходящими из точки $(0, 0)$. Вычисление мультипликаторов решений $\Gamma_{2,1}^3$ и $\Gamma_{2,1}^4$ показало, что они в этой области неустойчивы.

Аналогичные данные были получены для решений $\Gamma_{3,2}^i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) в области $G_{3,2}\{|a| \leq 0,8, 0 \leq b \leq 1,2\}$ (фиг. 5, а). На кривых $l_{3,2}$ и $l'_{3,2}$ (фиг. 5, б) происходит смена устойчивости решений $\Gamma_{3,2}^1$ и $\Gamma_{3,2}^2$ соответственно, приводящая к возникновению двух неустойчивых решений $\Gamma_{3,2}^3$ и $\Gamma_{3,2}^4$. На плоскости ab область устойчивости решений $\Gamma_{3,2}^1$ ($\Gamma_{3,2}^2$) ограничена кривыми $l_{3,2}$ и $d_{3,2}$ и полупрямой $a > 0, b = 0$ ($l'_{3,2}$, $d'_{3,2}$ и $a < 0, b = 0$).



Фиг. 5

Аналогичные результаты были получены при исследовании ряда других решений $\Gamma_{p,q}$ в случае, когда p или q — четное число. При $q = 0$ рассматривалась область $G_{1,0}\{|a| \leq 1, 0 \leq b \leq 10\}$, содержащая первые области устойчивости и «клювы» неустойчивости стационарных решений $x(t) = 0$ и $x(t) = \pi$ (см. также работы, указанные в сносках 2 и 3).

Теорема 4. Для взаимно простых чисел p и q , одно из которых четное (включая $q = 0$), в ограниченной области изменения параметров a и b существуют два периодических решения $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^2$, порождаемых решениями $x_1(t) = 2tq/p$ и $x_2(t) = (2tq + \pi)/p$. Бифуркационная диаграмма решения $\Gamma_{p,q}^1$ ($\Gamma_{p,q}^2$) содержит одну область устойчивости, ограниченную кривыми $d_{p,q}$, $l_{p,q}$ и полупрямой $a > 0, b = 0$ ($d'_{p,q}$, $l'_{p,q}$ и $a < 0, b = 0$). В точках кривых $l_{p,q}$ и $l'_{p,q}$ и прямой $b = 0$ значения $\rho_{1,2} = +1$, в точках кривых $d_{p,q}$ и $d'_{p,q}$ значения $\rho_{1,2} = -1$. Кроме того, в области, ограниченной кривыми $l_{p,q}$ и $l'_{p,q}$, выходящими из точки $(0,0)$, существуют два неустойчивых решения $\Gamma_{p,q}^3$ и $\Gamma_{p,q}^4$, возникающих при смене устойчивости решения $\Gamma_{p,q}^1$ ($\Gamma_{p,q}^2$) на кривой $l_{p,q}$ ($l'_{p,q}$). При любых a, b абсциссы начальных точек решений $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^2$ равны нулю и π/p соответственно. При движении точки (a, b) от линии $l_{p,q}$ к $l'_{p,q}$ абсцисса начальной точки решения $\Gamma_{p,q}^3$ ($\Gamma_{p,q}^4$) меняется от нуля до π/p ($-\pi/p$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теорет. физики (ЖЭТФ). 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588—597.
2. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука. 1971. 894 с.
3. Чуриков Б. В. Взаимодействие нелинейных резонансов. Новосибирск: Изд-е Новосибирск. ун-та. 1978. 79 с.
4. Гадионенко А. Я. Резонансные колебания и вращения маятника с вибрирующей точкой подвеса // Укр. мат. журн. 1966. Т. 18. № 2. С. 102—106.
5. Laughlin I. V. Periodic-doubling bifurcations and chaotic motion for parametrically forced pendulum // J. Stat. Phys. 1981. V. 24. No. 2. P. 375—388.
6. Баталова З. С., Бухалова Н. В. Иерархия структуры фазового пространства уравнения движений маятника с колеблющейся осью вращения // Динамика систем: Устойчивость, синхронизация и стохастичность. Горький: Изд-е Горьк. ун-та. 1983. С. 85—112.
7. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука. 1972. 470 с.
8. Неймарк Ю. И., Баталова З. С., Белякова Г. В. и др. Алгоритмы и программы численного исследования динамических систем. Горький: Изд-е Горьк. ун-та. 1983. 80 с.