Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 531.38

РАЗДЕЛЕНИЕ БЫСТРЫХ И МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ГИРОСКОПОВ

Богатырев С. В., Соболев В. А.

Для анализа систем дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных, возникающих при решении динамических задач, предлагается применять метод асимптотического разделения быстрых и медленных движений, основанный на идеях теории интегральных многообразий Боголюбова — Митропольского. Рассматривается движение гироскопа с неконтактным подвесом в магнитном поле. Метод разделения движений позволяет свести эту задачу к исследованию регулярной конечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. Рассматриваются системы, уравнения движений которых могут быть представлены в виде

$$x^\cdot = f(t, x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon y^\cdot = g(t, x, y, \varepsilon) \tag{1.1}$$

где x и y — векторные переменные, ε — малый положительный параметр, f и g — гладкие векторные функции.

Положив в (1.1) $\varepsilon = 0$, получим так называемую порождающую систему

$$x^\cdot = f(t, x, y, 0), \quad 0 = g(t, x, y, 0)$$

Предположим, что второе уравнение этой системы имеет изолированное решение $y = h_0(t, x)$. Были приведены [1—3] достаточные условия существования интегрального многообразия (ИМ) $y = h(t, x, \varepsilon)$, $h(t, x, 0) = h_0(t, x)$, движение по которому осуществляется в соответствии с уравнением

$$x^\cdot = f(t, x, h(t, x, \varepsilon), \varepsilon) \tag{1.2}$$

Анализ этого уравнения позволяет просто решать задачи об устойчивости, о периодических решениях и другие задачи качественного исследования исходной системы.

Функция h может быть найдена в виде асимптотического разложения

$$h(t, x, \varepsilon) = h_0(t, x) + \varepsilon h_1(t, x) + \varepsilon^2 h_2(t, x) + \ldots$$

из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, h, \varepsilon) = g(t, x, h, \varepsilon) \tag{1.3}$$

Решения системы (1.1), начинающиеся вблизи ИМ, представимы в виде суммы некоторого решения, лежащего на ИМ, и малой быстро гаснущей добавки. Кроме того, задачи об устойчивости для уравнений (1.1) и (1.2) эквивалентны. Если, в частности, $f(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$, $g(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$, то $h(t, 0, \varepsilon) = 0$ и нулевое решение уравнений (1.1) устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво, устойчиво по части переменных) тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает нулевое решение уравнения (1.2). Это означает, что для ИМ $y = h(t, x, \varepsilon)$ справедлив принцип сведения, позволяющий свести исследование исходной системы уравнений к исследованию уравнений (1.2).

Такой принцип использовался при изучении устойчивости ориентации спутников с двойным вращением [2], гироскопических систем [3], систем тел с подвижными внутренними массами [4].

2. Схема разделения движений. Метод разделения быстрых и медленных движений, основанный на идеях теории ИМ, состоит во введении новых переменных u и v по формулам

$$x = \beta + uH(t, u, v, \varepsilon) \tag{2.1}$$
$$y = v + h(t, x, \varepsilon) = v + h(t, u + \varepsilon H(t, u, v, \varepsilon), \varepsilon)$$

так что получаются уравнения

$$u^\cdot = F(t, u, \varepsilon), \quad \varepsilon v^\cdot = G(t, u, v, \varepsilon) \tag{2.2}$$

первое из которых независимое. Функция h описывает ИМ $y = h(t, x, \varepsilon)$, а функция H — ИМ некоторой вспомогательной расширенной системы [5, 6]. Первое уравнение (2.2) описывает меделенные движения рассматриваемой системы, а второе — быстрые движения. Функция F определяется равенством

$$F(t, u, \varepsilon) = f(t, u, h(t, u, \varepsilon), \varepsilon) \tag{2.3}$$

Если матрица $A(t, x) = \partial g(t, x, h_0(t, x), 0)/\partial y$ обратима, то функция h вычисляется в виде разложения по степеням малого параметра из уравнения (1.3) с любой степенью точности при помощи алгебраических операций.

Пусть

$$Y(t, x, z, \varepsilon) = g(t, x, z + h, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} f(t, x, z + h, \varepsilon)$$
$$(h = h(t, x, \varepsilon))$$

Тогда функция $H = H(t, u, v, \varepsilon)$ может быть найдена в виде асимптотического разложения из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial H}{\partial u} F(t, u, \varepsilon) + \frac{\partial H}{\partial v} Y(t, u + \varepsilon H, v, \varepsilon) = \tag{2.4}$$
$$= f(t, u + \varepsilon H, v + h(t, u + \varepsilon H, \varepsilon), \varepsilon) - f(t, u, h(t, u, \varepsilon), \varepsilon)$$

а функция G в (2.2) определяется равенством

$$G(t, u, v, \varepsilon) = Y(t, u + \varepsilon H(t, u, v, \varepsilon), v, \varepsilon) \tag{2.5}$$

Следует отметить, что для функций H и G выполняются неравенства

$$\| H(t, u, v, \varepsilon) \| \leqslant C \| v \|, \quad \| G(t, u, v, \varepsilon) \| \leqslant C \| v \|$$

Если корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda_i (t, x) \leqslant -2\alpha < 0 \tag{2.6}$$

то для переменной v имеет место оценка

$$\| v(t, x) \| \leqslant K \exp(-\varepsilon^{-1}\alpha (t - t_0)), \quad K > 0, \ t \geqslant t_0 \tag{2.7}$$

Из сотношений (2.1), оценки (2.7) и неравенства для H и G следует, что решения системы (1.1) представимы в виде

$$x = u + \varepsilon\varphi_1, \quad y = h(t, u, \varepsilon) + \varphi_2$$
$$\varphi_1 = H(t, u, v, \varepsilon), \quad \varphi_2 \equiv v + h(t, u + \varepsilon H(t, u, v, \varepsilon), \varepsilon) - h(t, u, \varepsilon)$$
$$\| \varphi_i \| \leqslant C \| y(t_0) - h(t_0, x(t_0), \varepsilon) \| \exp(-\varepsilon^{-1}\alpha (t - t_0))$$
$$C > 0, \ t \geqslant t_0 \ (i = 1, 2)$$

Соотношения (2.1) показывают, что решения системы (1.1) представляют собой нелинейную суперпозицию медленной переменной u и быстрой переменной v. Эти соотношения позволяют производить расщепление не только уравнений, но и начальных условий. Если для уравнений (1.1) заданы начальные условия $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, то из второго уравнения (2.1) следует, что $v(t_0) = v_0 = y_0 - h(t_0, x_0, \varepsilon)$, а $u(t_0) = u_0$, где u_0 определяется из уравнения

$$x_0 = u_0 + \varepsilon H(t_0, u_0, v_0, \varepsilon)$$

Отметим, что условие (2.6) не выполняется для уравнений движения механических систем с малой диссипацией, в частности для гироскопических систем [3, 6, 7]. Тем не менее метод ИМ может быть применен для разделения быстрых и медленных движений и для таких систем.

3. Быстрые и медленные движения гидроскопических систем. Уравнения движения широкого класса гироскопических систем можно представить в следующем виде [7]:

$$dx/dt = y,\ \varepsilon d(Ay)/dt = -[G + \varepsilon B]y + \varepsilon R + \varepsilon Q, \tag{3.1}$$
$$R = {}^1/_2 [\partial (Ay)/\partial x]^T y$$

Здесь x — n-мерный вектор обобщенных координат, A — симметрическая, положительно-определенная матрица, G — кососимметрическая матрица гироскопических сил, B — симметрическая матрица диссипативных сил, Q — вектор обобщенных сил, ε — малый положительный параметр; A, B, G, G^{-1}, Q — функции от t, x, предполагаем, что они ограничены вместе с достаточным числом частных производных по t и x.

Система (3.1) имеет ИМ $y = \varepsilon h(t, x, \varepsilon)$, движение по которому описывается уравнением

$$dx/dt = \varepsilon h(t, x, \varepsilon) \tag{3.2}$$

Исходные переменные x и y связаны с новыми медленной u и быстрой v переменными соотношениями

$$x = u + \varepsilon H(t, u, v, \varepsilon) \tag{3.3}$$
$$y = v + \varepsilon h(t, x, \varepsilon) = v + \varepsilon h(t, u + \varepsilon H(t, u, v, \varepsilon), \varepsilon)$$

Из уравнений, аналогичных (1.3), (2.4), находим приближенные выражения

$$h(t, x, \varepsilon) = h_1(t, x) + \varepsilon h_2(t, x) + \varepsilon^2 \ldots$$
$$H(t, u, v, \varepsilon) = H_1(t, u, v) + \varepsilon H_2(t, u, v) + \varepsilon^2 \ldots$$
$$h_1 = G^{-1}Q,\ h_2 = -G^{-1}[Bh_1 + \partial (Ah_1)/\partial t]$$
$$H_1 = -G^{-1}Av,\ H_2 = -[(\partial G^{-1}/\partial t)A - G^{-1}B]G^{-1}Av +$$
$$+ O(\|v\|^2)$$

В выражениях для h_1, h_2 матрицы A, B, G и функция Q зависят от t и x, а в выражениях для H_1, H_2 — от t и u.

Уравнения для переменных u и v имеют вид

$$du/dt = \varepsilon h(t, u, \varepsilon),\ \varepsilon d(Av)/dt = -(G + \varepsilon B)v + \varepsilon R(t, u, v) + \tag{3.4}$$
$$+ \varepsilon^2 R_1(t, u, v, \varepsilon)$$
$$A = A(t, u + \varepsilon H),\ B = B(t, u + \varepsilon H),\ G = G(t, u + \varepsilon H)$$
$$P(t, x, y, \varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}y\right)^T h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}h\right)^T y - \left(\frac{\partial Ah}{\partial x}\right)y$$
$$h = h(t, u + \varepsilon H, \varepsilon),\ H = H(t, u, v, \varepsilon)$$
$$R_1(t, u, v, \varepsilon) = P(t, u + \varepsilon H(t, u, v, \varepsilon), v, \varepsilon)$$

Первое уравнение (3.4) описывает медленные прецессионные колебания гироскопической системы, а второе — быстрые нутационные колебания. Первая формула в (3.3) показывает, что вектор обобщенных координат x представляет собой суперпозицию прецессионных и нутационных колебаний.

Таким образом, систему уравнений (3.1) удается расщепить на два уравнения (3.4) при помощи замены (3.3). При этом для функций h и H получены приближенные представления.

Если, в частности, для уравнений (3.1) заданы начальные условия $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = \varepsilon y_0$, то $v(t_0) = \varepsilon v_0 = \varepsilon(y_0 - h(t_0, x_0, \varepsilon))$, а начальное условие $u(t_0) = u_0$ для первого уравнения (3.4) определяется из уравнения

$$x_0 = u_0 + \varepsilon H(t_0, u_0, \varepsilon v_0, \varepsilon)$$

в виде асимптотического разложения

$$u_0 = x_0 + \varepsilon^2 G^{-1}(t_0, x_0) A(t_0, x_0) [y_0 - G^{-1}(t_0, x_0) Q(t_0, x_0)] + \varepsilon^3 \ldots$$

Важно отметить, что рассмотренные выше вопросы тесно связаны с задачей о допустимости использования уравнений прецессионной теории [3, 6—10]. Для первого уравнения (3.4) прецессионными являются уравнения

$$[G(t, x) + \varepsilon B(t, x)]\, dx/dt = \varepsilon Q(t, x) \tag{3.5}$$

или, в эквивалентной форме

$$dx/dt = \varepsilon [G(t, x) + \varepsilon B(t, x)]^{-1} Q(t, x)$$

Можно проверить, что правая часть этого уравнения совпадает с правой частью уравнения (3.2) с точностью до членов $O(\varepsilon)$ включительно для неавтономной системы и с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$ включительно для автономной системы.

Учитывая, что при сформулированных выше предположениях для системы (3.1) нутационные колебания гаснут и справедлив принцип сведения, можно сделать заключение о допустимости использования «укороченных» уравнений (3.2) или (3.5) вместо исходных уравнений (3.1).

4. Некоторые обобщения. Метод ИМ может с успехом применяться для исследования задач теории управления [5, 11], систем с несколькими малыми параметрами [12], систем со случайными параметрами [13] и широкого круга других задач механики. Но особый интерес представляет применение этого метода к исследованию систем с распределенными параметрами. Нужно только показать, что некоторая граничная задача для уравнений в частных производных может быть сформулирована как операторное уравнение в подходящем гильбертовом пространстве. Такая процедура часто оказывается вполне осуществимой для многих задач, встречающихся на практике. В частности, ниже это будет сделано для некоторых задач динамики твердого проводящего тела в магнитном поле.

Рассматриваются системы уравнений вида

$$x^{\cdot} = f(t, x, y, \varepsilon), \quad \varepsilon y^{\cdot} + Ay = g(t, x, y, \varepsilon) \tag{4.1}$$

где A — неограниченный оператор в некотором гильбертовом пространстве Y. При некоторых условиях, обеспечивающих устойчивость оператора A, система (4.1) имеет ИМ $y = h(t, x, \varepsilon)$, являющееся экспоненциально устойчивым и удовлетворяющее принципу сведения. Отметим, что условия устойчивости оператора A заключаются в том, что спектр этого оператора лежит в некотором секторе, расположенном в правой полуплоскости C, а резольвента имеет при $|\lambda| \to \infty$ вне этого сектора асимптотическую оценку вида $O(|\lambda|^{-1})$.

Можно показать, что метод разделения движения допускает обобщение на системы вида (4.1), т. е. существует замена переменных

$$x = u + H(t, u, v, \varepsilon),\ y = v + h(t, x, \varepsilon) \tag{4.2}$$

приводящая систему (4.1) к системе вида

$$u^{\cdot} = F(t, u, \varepsilon),\ \varepsilon v^{\cdot} + Av = G(t, u, v, \varepsilon) \tag{4.3}$$

в которой быстрые и медленные движения уже разделены. Функции h, H в (4.2) и функции F, G в (4.3) определяются способом, аналогичным изложенному в п. 2. Существуют определенные трудности в нахождении асимптотического разложения функции H, а значит, и в построении функции G, но в некоторых важных частных случаях это удается сделать.

Рассмотрим следующий частный случай системы (4.1):

$$x^{\cdot} = f_0(t, x) + f_1(t, x)y,\ \varepsilon y^{\cdot} + Ay = \varepsilon g(t, x) \tag{4.4}$$

и зададим для этой системы начальные условия

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0 \tag{4.5}$$

Пользуясь алгоритмами построения асимптотических разложений функций $h(t, x, \varepsilon)$ и $H(t, u, v, \varepsilon)$, приведенными в п. 2, можно получить асимптотические представления

$$\begin{gathered} H(t, u, v, \varepsilon) = -\varepsilon f_1(t, u)(A^{-1}v) + \varepsilon^2 \ldots \\ h(t, x, \varepsilon) = \varepsilon A^{-1} g(t, x) - \varepsilon^2 A^{-2}\left[\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} f_0(t, x)\right] + \varepsilon^3 \ldots \end{gathered} \tag{4.6}$$

Тогда замена переменных (4.2) приводит задачу (4.4), (4.5) к виду

$$\begin{gathered} u^{\cdot} = f_0(t, u) + \varepsilon[f_1(t, u) A^{-1} g(t, u)] - \\ - \varepsilon^2\left[f_1(t, u) A^{-2}\left(\frac{\partial g(t, u)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, u)}{\partial u} f_0(t, u)\right)\right] + \varepsilon^3 \ldots \\ \varepsilon v^{\cdot} + Av = -\varepsilon^2 A^{-1}\left[\frac{\partial g(t, u)}{\partial u} f_1(t, u) v\right] + \varepsilon^3 \ldots \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$u(t_0) = u_0,\ v(t_0) = v_0 \tag{4.8}$$

где для u_0, v_0 имеются асимптотические представления

$$\begin{gathered} u_0 = x_0 + \varepsilon f_1(t_0, x_0) A^{-1} y_0 + \varepsilon^2 \ldots \\ v_0 = y_0 - \varepsilon A^{-1} g(t_0, x_0) + \varepsilon^2 \ldots \end{gathered} \tag{4.9}$$

5. О движении проводящего твердого тела около центра масс в магнитном поле. Рассматривается задача о вращении проводящего твердого тела около центра масс, помещенного в однородное магнитное поле. Предполагается, что тело — однородный изотропный идеальный магнетик с проводимостью λ и магнитной проницаемостью μ и характерное время диффузии вихря поля в теле существенно меньше характерного времени изменения внешнего магнитного поля в системе координат, связанной с телом.

Эта задача решается путем совместного исследования уравнений движения твердого тела около центра масс и уравнений электродинамики, записанных в квазистационарном приближении

$$I\omega^{\cdot} + \omega \times I\omega = N,\ \Gamma^{\cdot} = -\Omega\Gamma \tag{5.1}$$

(5.2) $$\frac{4\pi}{c^2}B^{\cdot} + \frac{1}{\lambda\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}B = 0, \quad \operatorname{div}B = 0 \quad (r \in V)$$
$$\operatorname{rot}B^{(0)} = 0, \ \operatorname{div}B^{(0)} = 0 \quad (r \in V_0)$$
$$B_\tau = B_\tau^{(0)}|_S, \quad \mu B_n = B_n^{(0)}|_S; \quad B^{(0)}|_\infty = \Gamma B^\infty$$

Здесь I — тензор инерции тела, ω — вектор угловой скорости в теле, Γ — матрица перехода от инерциальной абсолютной системы координат к системе, жестко связанной с телом, B^∞ — вектор внешнего магнитного поля в абсолютной системе координат, Ω — матрица, поставленная в соответствие вектору ω так, чтобы для всех $r \in R^3$ выполнялось равенство $\Omega r = \omega \times r$, B и $B^{(0)}$ — векторы напряженности магнитного поля соответственно в теле V и вне тела V_0, $B_\tau|_S$ и $B_n|_S$ — касательная и нормальная компоненты вектора B на поверхности тела S. Момент сил N, действующий на тело в магнитном поле, выражается через тензор напряжений Максвелла T по формуле

$$N = \int_S [r \times Tn]\, ds, \quad T = \left\{T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(B_i^{(0)}B_j^{(0)} - \frac{1}{2}\|B^{(0)}\|^2\delta_{ij}\right)\right\}$$
$$(i, j = 1, 2, 3)$$

В качестве единицы измерения времени t выбирается характерное время изменения внешнего магнитного поля в связанной системе координат, а в качестве единицы измерения пространственных переменных — характерный размер тела. Тогда, при сделанных ранее предположениях, в уравнениях (5.2) параметр $\varepsilon = 4\pi/c^2$ будет малым.

Ранее в подобной постановке задача о движении проводника в магнитном поле изучалась в работах [14—17].

Для преобразования задачи (5.1), (5.2) к виду (4.4) делается замена переменных

$$B = b + (E + \Psi)\Gamma B^\infty, \quad B^{(0)} = b^{(0)} + (E + \Psi^{(0)})\,\Gamma B^\infty$$

приводящая к нулевому условию на бесконечности и сохраняющая однородность условий на S. Здесь E — единичная матрица, а матрицы Ψ и $\Psi^{(0)}$ допускают представление

$$\Psi = \|\nabla\psi_1, \nabla\psi_2, \nabla\psi_3\|, \quad \Psi^{(0)} = \|\nabla\psi_1^{(0)}, \nabla\psi_2^{(0)}, \nabla\psi_3^{(0)}\|$$

где функции ψ_j, $\psi^{(0)}{}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ — решения задачи

$$\Delta\psi_j = 0 \ (r \in V), \ \Delta\psi_j^{(0)} = 0 \ (r \in V_0) \ (j = 1, 2, 3)$$
$$\psi_j = \psi_j^{(0)}|_S, \quad \mu\frac{d\psi_j}{dn} - \frac{d\psi_j^{(0)}}{dn}\bigg|_S = (1-\mu)(e_j)_n|_S; \quad \psi_j|_\infty = 0$$

e_j $(j = 1, 2, 3)$ — орты связанной системы координат.

В новых переменных система (5. 2) перепишется в виде

(5.3) $$\varepsilon b^{\cdot} + \frac{1}{\lambda\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}b = -\varepsilon(E + \Psi)(\Gamma B^{\cdot\infty} + \Gamma B^\infty \times \omega)$$
$$\operatorname{div}b = 0 \ (r \in V); \ \operatorname{rot}b^{(0)} = 0, \ \operatorname{div}b^{(0)} = 0 \ (r \in V_0)$$
$$b_\tau = b_\tau^{(0)}|_S, \quad \mu b_n = b_n^{(0)}|_S, \quad b^{(0)}|_\infty = 0$$

Для момента сил тогда будет иметь место представление

$$N = [J\Gamma B^\infty \times \Gamma B^\infty] + \left(\frac{\mu-1}{4\pi}\int b\, dr + \frac{1}{8\pi}\int [r \times \operatorname{rot}b]\, dr\right) \times \Gamma B^\infty$$
$$J = \frac{\mu-1}{4\pi}\int \Psi\, dr$$

Здесь и далее интегрирование ведется по объему тела V.

Задача (5.1), (5.3) теперь может быть переписана в виде системы (4.4), если подходящим образом определить оператор A и функции f_0, f_1, g.

В самом деле, введем обозначения $x' = \omega$, $x'' = \Gamma$, $X' = \Omega$, $y = b$ и через $x = (x', x'')$ условимся обозначать вектор, составленный последовательно из элементов вектора x' и элементов векторов-столбцов матрицы x''. Пусть

$$f_0(t, x) = (f_0'(t, x),\ f_0''(t, x)) = (I^{-1}(Ix' \times x' + Jx''B^\infty \times x''B^\infty),\ -X'x'')$$
$$f_1(t, x)\, y = (f_1'(t, x)\, y,\ f_1''(t, x)\, y) =$$
$$= \left(I^{-1}\left[\left(\frac{\mu-1}{4\pi}\int y\, dr + \frac{1}{8\pi}\int [r \times \operatorname{rot} y]\, dr\right) \times x''B^\infty\right],\ 0\right)$$
$$g(t, x) = -(E + \Psi)(x''B^{\cdot\infty} + x''B^\infty \times x')$$

Оператор $A: Y \to Y$ определим равенством $Ay = (\lambda\mu)^{-1} \operatorname{rot} \operatorname{rot} y$, и пусть пространство Y состоит из квадратично суммируемых по области V векторов y, удовлетворяющих условию соленоидальности

(5.4) $$\operatorname{div} y = 0$$

А область определения оператора A состоит из векторов y, принадлежащих пространству Соболева $H^2(V)$, удовлетворяющих условию соленоидальности (5.4) и имеющих продолжение $\Pi y \in H^2(V_0)$, обладающее свойствами

$$\operatorname{div} \Pi y = 0,\ \operatorname{rot} \Pi y = 0\ (r \in V_0)$$
$$y_\tau = (\Pi y)_\tau|_S,\quad \mu y_n = (\Pi y)_n|_S$$

Здесь при определении операторов div, rot используются обобщенные производные. Было доказано [18], что определенный таким способом оператор A будет удовлетворять требуемым условиям устойчивости.

Теперь очевидно, что после подобной переформулировки задача (5.1), (5.3) перепишется в виде системы (4.4).

Уравнение (4.7) для медленных движений $u = (\omega, \Gamma)$ будет иметь вид

(5.5) $$\begin{aligned} I\omega^{\cdot} + \omega \times I\omega = {} & J\Gamma B^\infty \times \Gamma B^\infty + \varepsilon P_1 [\Gamma B^{\cdot\infty} + \Gamma B^\infty \times \omega] \times \\ & \times \Gamma B^\infty + \varepsilon^2 P_2 [\Gamma B^{\cdot\cdot\infty} + 2\Gamma B^{\cdot\infty} \times \omega + (\Gamma B^\infty \times \omega) \times \omega + \\ & + \Gamma B^\infty \times I^{-1}(I\omega \times \omega + J\Gamma B^\infty \times \Gamma B^\infty)] \times \Gamma B^\infty + \dots \\ \Gamma^{\cdot} = {} & -\Omega\Gamma \end{aligned}$$

Здесь J — тензор, характеризующий намагничивание тела во внешнем магнитном поле, а P_1, $P_2, \dots$ — тензоры магнитной поляризуемости тела [15]. Все эти тензоры определяются только формой тела и его электрическими и магнитными характеристиками. Их вычисление сводится к решению некоторых классических стационарных краевых задач.

Из свойств ИМ медленных движений следует, что для каждого решения $(\omega(t), \Gamma(t), b(t))$ системы (5.1), (5.3) найдется такое решение $(\omega_*(t), \Gamma_*(t))$ системы (5.5), что для всех $t \geqslant t_0$ будет иметь оценка

(5.6) $$\|\omega(t) - \omega_*(t)\| + \|\Gamma(t) - \Gamma_*(t)\| \leqslant K \exp(-\varepsilon^{-1}\alpha(t - t_0))$$

Если решение $(\omega(t), \Gamma(t), b(t))$ определяется начальными условиями, то начальные условия для решения $(\omega_*(t), \Gamma_*(t))$ системы (5.5), удовлетворяющего неравенству (5.6), определяются из соотношений (4.9) единственным образом.

Выражение в правой части первого уравнения (5.5) является асимптотическим разложением медленной части момента сил N по степеням малого параметра ε. В частном случае $\lambda = 1$, $\mu = 1$ это разложение совпадает с разложением момента сил, найденным в [15].

Фактически система уравнений (5.5) описывает движение тела около центра масс под действием момента сил от вихревых токов и намагничивания тела во внешнем магнитном поле вне некоторого начального временного интервала.

Важно отметить, что в результате разделения быстрых и медленных движений задачу, описываемую системой уравнений в частных производных с сингулярными возмущениями, удается свести к исследованию регулярной конечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основные результаты работы докладывались на VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике [19].

Авторы благодарят В. В. Стрыгина за советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука. 1973. 512 с.
2. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Влияние геометрических и кинематических параметров и диссипации энергии на устойчивость ориентации спутников с двойным вращением // Космич. исследования. 1976. Т. 14. № 3. С. 366—371.
3. *Соболев В. А., Стрыгин В. В.* О допустимости перехода к прецессионным уравнениям гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 10—17.
4. *Соболев В. А., Стрыгин В. В.* Асимптотические методы в задачах о стабилизации вращающихся тел при помощи пассивных демпферов // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 5. С. 24—31.
5. *Sobolev V. A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // Systems Control Letters. 1984. V. 5. No. 3. P. 169—179.
6. *Соболев В. А.* Быстрые и медленные движения гироскопических систем // Periodica Polytechnica. Electrical Engineering. Budapest. 1985. V. 29. No. 1. P. 57—66.
7. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Гостехиздат. 1956. 299 с.
8. *Ишлинский А. Ю.* Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР. 1963. 482 с.
9. *Бутенин Н. В., Климов Д. М., Лунц Я. Л., Степаненко Н. П.* Нелинейные задачи теории гироскопических систем // Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М.: Наука. 1973. С. 379—401.
10. *Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г., Новожилов И. В.* О прецессионных уравнениях гироскопических систем // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 230—237.
11. *Kokotovic P. V.* Control theory in the 80's // Trend in feedback design: Proc. 9th World Congr. of IFAC. Budapest. 1984. P. 16—26.
12. *Пендюхова Н. В., Соболев В. А., Стрыгин В. В.* Движение твердого тела с гироскопом и подвижной массой // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 12—18.
13. *Соболев В. А.* Сингулярно возмущенные стохастические уравнения // IV Междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятности и математической статистике. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР. 1985. Т. 3. С. 146—148.
14. *Голубков В. В.* Момент сил в магнитном поле // Космич. исследования. 1972. Т. 10. Вып. 1. С. 20—39.
15. *Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г.* Движение проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1981. Т. 261. № 5. С. 1067—1073.
16. *Кобрин А. И.* Асимптотическое решение задачи о движении твердого тела в магнитном поле // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 10. С. 1808—1811.
17. *Богатырев С. В., Стрыгин В. В.* Об устойчивости стационарных движений твердого проводящего тела около центра масс в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 30—35.
18. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 46—93.
19. *Богатырев С. В., Соболев В. А., Стрыгин В. В.* О разделении быстрых и медленных движений в задачах динамики систем твердых тел и гироскопов // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Нац. ком-т СССР по теорет. и прикл. механике. 1986. С. 115.

Куйбышев

Поступила в редакцию
9.XII.1986