Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 531.36 + 539.3

УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ОБЪЕКТА С ОДНОМЕРНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМОЙ

Маланов С. Б., Уткин Г. А.

Для ударного взаимодействия одномерной упругой системы и сосредоточенного объекта дается физическая интерпретация полученных ранее[1] результатов в виде законов изменения энергии и импульсов. В качестве примера рассматривается удар материальной точки о струну; приводится зависимость времени контакта и коэффициента восстановления от параметров задачи.

Вопросы о корректных условиях в точке контакта и соотношениях, справедливых в моменты начала и конца контакта, решались [1, 2] с привлечением дополнительных геометрических и физических соображений (законы сохранения энергии, импульса и т.п.). Исследование согласованного безотрывного взаимодействия на основании принципа Гамильтона[2] позволили полностью решить вопрос о корректных условиях в точке контакта без привлечения дополнительных соображений. Тот же подход к задаче с конечным временем контакта позволил получить соотношения, справедливые в моменты начала и конца контакта.

1. Рассмотрим механическую систему, состоящую из упругой направляющей (одномерной системы) и сосредоточенного объекта. В течение некоторого времени (времени контакта) сосредоточенный объект может двигаться по направляющей. Таким образом, возникает задача об описании их согласованного движения и о нахождении времени начала и окончания контакта.

Пусть x — координата вдоль одномерной системы, t — время, $D = \{(x,\ t)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_4\}$ — некоторая прямоугольная область в плоскости xt, t_2 и t_3 $(t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4)$ — время начала и конца контакта соответственно. Предположим, что закон движения нагрузки описывается некоторой обобщенной координатой $z\ (t)$ и вектор-функциями $\mathbf{u}_0\ (t)$, $\mathbf{v}_0\ (t)$. Функция z и все компоненты вектор-функций $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{v}_0$ непрерывны на $[t_1, t_4]$ и дважды непрерывно дифференцируемы на (t_k, t_{k+1}), $k=1, 2, 3$. Кривая $x = z\ (t)$, $t \in [t_2, t_3]$ и прямые $t = t_2$ и $t = t_3$ делят область D на части D_i, $i = 1, \ldots, 4$. Закон движения распределенной системы описывается набором вектор-функций обобщенных координат $\mathbf{u}\ (x,\ t)$, $\mathbf{w}\ (x,\ t)$, непрерывных в D и дважды непрерывно-дифференцируемых в D_i, $i = 1, \ldots, 4$. Кроме того, производные функций $\mathbf{u}\ (x,\ t)$ и $\mathbf{w}\ (x,\ t)$ могут претерпевать разрывы вследствие различия скоростей нагрузки и одномерного объекта в момент начала контакта.

Пусть $L'(x,\ t,\ \mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}, \mathbf{w}_x, \mathbf{w}_t)$ — плотность функции Лагранжа распределенной системы, а ${}^0L\ (t, z, z^{\boldsymbol\cdot}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0^{\boldsymbol\cdot}, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0^{\boldsymbol\cdot})$—функция Лагранжа наг-

[1] *Маланов С. Б., Уткин Г. А.* Постановка задачи об ударном взаимодействии сосредоточенного объекта с одномерной упругой системой. Горький, 1986. 12 с.—Деп. в ВИНИТИ 5.12.86; № 8304-В86.

[2] *Весницкий А. И., Крысов С. В., Уткин Г. А.* Постановка краевых задач динамики упругих систем исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского: Учеб. пособие. Горький. Горьк. ун-т. 1983. 65 с.

Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Крысов С. В., Уткин Г. А. Самосогласованные задачи динамики одномерных систем с движущимися нагрузками и закреплениями: Препринт № 159. Горький: Научн.-исслед. радиофиз. ин-т АН СССР. 1982. 25 с.

рузки, L, ${}^0L$ — дважды непрерывно-дифференцируемые функции своих аргументов. Кроме того, во время контакта имеет место соотношение $\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{u}(z(t), t)$.

Тогда соотношения, минимизирующие функционал действия, в соответствии с принципом Гамильтона записываются в виде

$$(1.1)\qquad L_{\mathbf{u}} - \frac{\partial}{\partial t} L_{\mathbf{u}_t} - \frac{\partial}{\partial x} L_{\mathbf{u}_x} = 0$$

$$L_{\mathbf{w}} - \frac{\partial}{\partial t} L_{\mathbf{w}_t} - \frac{\partial}{\partial x} L_{\mathbf{w}_x} = 0; \quad (x, t) \in D_i, \quad i = 1, \ldots, 4$$

$$(1.2)\qquad [\mathbf{u}(x, t)] = 0, \ [\mathbf{w}(x, t)] = 0$$

$$(1.3)\qquad {}^0L_z - \frac{d}{dt}\, {}^0L_{z^\cdot} = [L - (\mathbf{u}_x, L_{\mathbf{u}_x} - z^\cdot L_{\mathbf{u}_t}) - (\mathbf{w}_x, L_{\mathbf{w}_x} - z^\cdot L_{\mathbf{w}_t})]$$

$${}^0L_{\mathbf{u}_0} = \frac{d}{dt}\, {}^0L_{\mathbf{u}_0^\cdot} = [L_{\mathbf{u}_x} - z^\cdot L_{\mathbf{u}_t}]$$

$$[L_{\mathbf{w}_x} - z^\cdot L_{\mathbf{w}_t}] = 0, \quad {}^0L_{\mathbf{v}_0} - \frac{d}{dt}\, {}^0L_{\mathbf{v}_0^\cdot} = 0$$

$$(1.4)\qquad {}^0L_z - \frac{d}{dt}\, {}^0L_{z^\cdot} = 0, \quad {}^0L_{\mathbf{u}_0} - \frac{d}{dt}\, {}^0L_{\mathbf{u}_0^\cdot} = 0$$

$${}^0L_{\mathbf{v}_0} - \frac{d}{dt}\, {}^0L_{\mathbf{v}_0^\cdot} = 0, \quad t \in [t_1, t_2) \cup (t_3, t_4]$$

$$(1.5)\qquad \{\langle L - (L_{\mathbf{u}_t}, \mathbf{u}_t) - (L_{\mathbf{w}_t}, \mathbf{w}_t)\rangle + {}^0L - {}^0L_{z^\cdot} z^\cdot -$$

$$- ({}^0L_{\mathbf{u}_0^\cdot}, \mathbf{u}_0^\cdot) - ({}^0L_{\mathbf{v}_0^\cdot}, \mathbf{v}_0^\cdot)\} = 0$$

$$\{L_{\mathbf{u}_t}\} = 0, \quad \{L_{\mathbf{w}_t}\} = 0, \quad \{(L_{\mathbf{u}_t}, \mathbf{u}_x) + (L_{\mathbf{w}_t}, \mathbf{w}_x)\} = 0$$

$$\{{}^0L_{\mathbf{u}_0^\cdot}\} = 0, \quad \{{}^0L_{\mathbf{v}_0^\cdot}\} = 0, \quad \{{}^0L_{z^\cdot}\} = 0$$

Здесь

$$[A(x, t)] = A(z(t) + 0, t) - A(z(t) - 0, t), \ t \in [t_2, t_3]$$

$$\{A(x, t)\} = A(x, t_k + 0) - A(x, t_k - 0)$$

$$x \in [a, z(t_k)) \cup (z(t_k), b], \ k = 2, 3$$

$$\langle A(x, t)\rangle = \int_a^b A(x, t)\, dx$$

Очевидно, что соотношения (1.1) задают дифференциальные уравнения для распределенной системы, выражения (1.2), (1.3) — условия сопряжения при согласованном движении. Соотношения (1.4) задают дифференциальные уравнения движения нагрузки до и после контакта, а (1.5) — условия сопряжения в моменты начала и конца контакта.

2. Обозначим [3] $\mathbf{p}(x, t)$ вектор размерности $n + m + l$, компоненты которого представляют собой плотность обобщенного импульса, соответствующего обобщенным координатам $\mathbf{u}(x, t)$ и $\mathbf{w}(x, t)$ распределенной системы. Запишем этот вектор, плотность внешней силы и внутреннюю потенциальную силу в сечении x в виде

$$\mathbf{p}(x, t) = (L_{u_t^1}, \ldots, L_{u_t^n}, L_{w_t^1}, \ldots, L_{w_t^m}, 0, \ldots, 0)$$

$$\mathbf{Q}(x, t) = (L_{u^1}, \ldots, L_{u^n}, L_{w^1}, \ldots, L_{w^m}, 0, \ldots, 0)$$

$$\mathbf{T}(x, t) = (L_{u_x^1}, \ldots, L_{u_x^n}, L_{w_x^1}, \ldots, L_{w_x^m}, 0, \ldots, 0)$$

Используя выражения (1.1), можно убедиться, что справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} = \mathbf{Q}, \quad \frac{\partial p^*}{\partial t} + \frac{\partial T^*}{\partial x} = Q^*, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = N$$

$$p^*(x, t) = -(L_{\mathbf{u}_t}, \mathbf{u}_x) - (L_{\mathbf{w}_t}, \mathbf{w}_x)$$

$$T^*(x,\ t) = L - (L_{\mathbf{u}_x},\ \mathbf{u}_x) - (L_{\mathbf{w}_x},\ \mathbf{w}_x)$$
$$h(x,\ t) = -L + (L_{\mathbf{u}_t},\ \mathbf{u}_t) + (L_{\mathbf{w}_t},\ \mathbf{w}_t)$$
$$S(x,\ t) = (L_{\mathbf{u}_x},\ \mathbf{u}_t) + (L_{\mathbf{w}_x},\ \mathbf{w}_t)$$

где p^* — плотность импульса волны, T^* — поток волнового давления, $Q^*(x,\ t) = L_x$ — плотность силы волнового давления, обусловленного распределенным отражением, h — плотность обобщенной энергии, S — поток волновой энергии, а $N(x,\ t) = -L_t$ — плотность мощности источника, изменяющего параметры распределенной системы.

Аналогично полный обобщенный импульс нагрузки представим в виде вектора размерности $n + m + l$:

$$\mathbf{p}_0(t) = ({}^0L_{u_0^{\cdot 1}}, \ldots, {}^0L_{u_0^{\cdot n}}, 0, \ldots, 0, {}^0L_{v_0^{\cdot 1}}, \ldots, {}^0L_{v_0^{\cdot l}})$$

а обобщенную потенциальную силу

$$\mathbf{Q}_0(t) = ({}^0L_{u_0^1}, \ldots, {}^0L_{u_0^n}, 0, \ldots, 0, {}^0L_{v_0^1}, \ldots, {}^0L_{v_0^l})$$

Учитывая это, из соотношений (1.3), (1.4) можно получить дифференциальные законы изменения импульсов и энергии нагрузки во время контакта

$$\frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = [\mathbf{T} - z^{\cdot}\mathbf{p}] + \mathbf{Q}_0, \quad \frac{dp_0^*}{dt} = [T^* - z^{\cdot}p^*] + Q_0^*$$
$$dh_0/dt = [S - z^{\cdot}h] + N_0$$

и при отсутствии контакта

$$\frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = \mathbf{Q}_0, \quad \frac{dp_0^*}{dt} = Q_0^*, \quad \frac{dh_0}{dt} = N_0$$

Здесь $p_t^*(t) = {}^0L_{z^{\cdot}}$ — импульс нагрузки, $Q_0^*(t) = {}^0L_z$ — потенциальная сила, $h_0(t) = -{}^0L_0 + {}^0L_{z^{\cdot}}z^{\cdot} + ({}^0L_{\mathbf{u}_0^{\cdot}},\ \mathbf{u}_0^{\cdot}) + ({}^0L_{\mathbf{v}_0^{\cdot}},\ \mathbf{v}_0^{\cdot})$ — полная энергия нагрузки, а $N_0(t) = -{}^0L_t$ — мощность сил, изменяющих параметры нагрузки. В моменты начала и окончания контакта импульсы и энергия системы сохраняются, что следует из соотношений (1.5), которые можно записать в виде

$$\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{p}_0\} = 0, \{p^*\} = \{p_0^*\} = \{\langle h\rangle + h_0\} = 0$$

Для системы в целом справедливы следующие глобальные законы изменения импульсов и энергии:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\Delta\mathbf{T} + \langle\mathbf{Q}\rangle + \mathbf{Q}_0, \quad \frac{dP^*}{dt} = -\Delta T^* + \langle Q^*\rangle + Q_0^*$$
$$dH/dt = -\Delta S + \langle N\rangle + N_0, \quad \Delta A = A(a) - A(b)$$
$$\mathbf{P}(t) = \langle\mathbf{p}\rangle + \mathbf{p}_0, \ P^*(t) = \langle p^*\rangle + p_0^*, \ H(t) = \langle h\rangle + h_0$$

где $\mathbf{P}$ — вектор полных обобщенных импульсов системы, P^* — ее полный волновой импульс, а H — полная энергия системы.

3. Рассмотрим центральный удар материальной точки по ограниченной покоящейся струне. В предположении малых поперечных колебаний струны плотность ее функции Лагранжа запишем в виде: $L = {}^1/_2\,(\rho u_t^2 - Nu_x^2)$, где ρ — погонная плотность, N — натяжение, $u(x,\ t)$ — поперечное отклонение струны. Функцию Лагранжа для точки массы m зададим в виде ${}^0L = {}^1/_2 m\,(z^{\cdot 2} + u_0^{\cdot 2})$. Здесь $z^{\cdot}$ и $u_0^{\cdot}$ — составляющие скорости точки по осям x и u соответственно.

В силу симметрии задачи, точка не будет перемещаться по струне, т. е. $z^{\cdot}(t) \equiv 0$. Без потери общности положим $z(t) \equiv 0$, $u_0(0) = 0$. Используя первое соотношение (1.1), первое соотношение (1.2) и второе соотношение (1.3), приходим к уравнениям, описывающим движение системы во время контакта

(3.1) $$\rho u_{tt} - N u_{xx} = 0$$
$$u(-0, t) = u(+0, t) = u_0(t), \quad m u_0^{\cdot\cdot} = [N u_x]$$

К этим уравнениям добавим краевые и начальные условия

(3.2) $$u(-a, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad a > 0$$
$$u_0(0) = 0, \quad u_0^{\cdot}(0) = -V$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ -V, & x = 0 \end{cases}$$

Используя интегральное преобразование Лапласа по времени [4], получим закон движения нагрузки

(3.3) $$u_0^{\cdot}(t) = -V\left(e^{-\alpha\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q}(L_n(2q) - L_{n-1}(2q))\,\theta(q)\right)$$
$$\tau = \frac{ct}{a}, \quad c = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \quad \alpha = \frac{2\rho a}{m}, \quad q = \alpha\tau - 2n\alpha,$$
$$L_n(y) = \frac{e^y}{n!}\frac{d^n}{dy^n}(y^n e^{-y})$$

Здесь τ — безразмерное время, c — скорость распространения волн в струне, α — безразмерный параметр, характеризующий отношение масс струны и точки, L_n — полиномы Лагерра и θ — единичная функция Хевисайда.

Рассмотрим вопрос о времени окончания контакта $t_з$. Функция $u(x, t)$ непрерывна всюду, следовательно, имеет место равенство $\{u(x, t_з)\} = 0$, $x \in [-a, a]$, из которого в свою очередь следуют соотношения

$$\{u_x(z(t_з) - 0, \ t_з)\} = 0, \quad \{u_x(z(t_з) + 0, t_з)\} = 0$$

После окончания контакта функция $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема (за исключением изломов на характеристиках), т. е.

$$u_x(z(t_з) + 0, t_з + 0) - u_x(z(t_з) - 0, t_з + 0) = 0$$

Отсюда приходим к следующему условию: $[u_x(x, t_з - 0)] = 0$. Обращаясь к третьему из соотношений (3.1), получаем выражение для определения момента окончания контакта

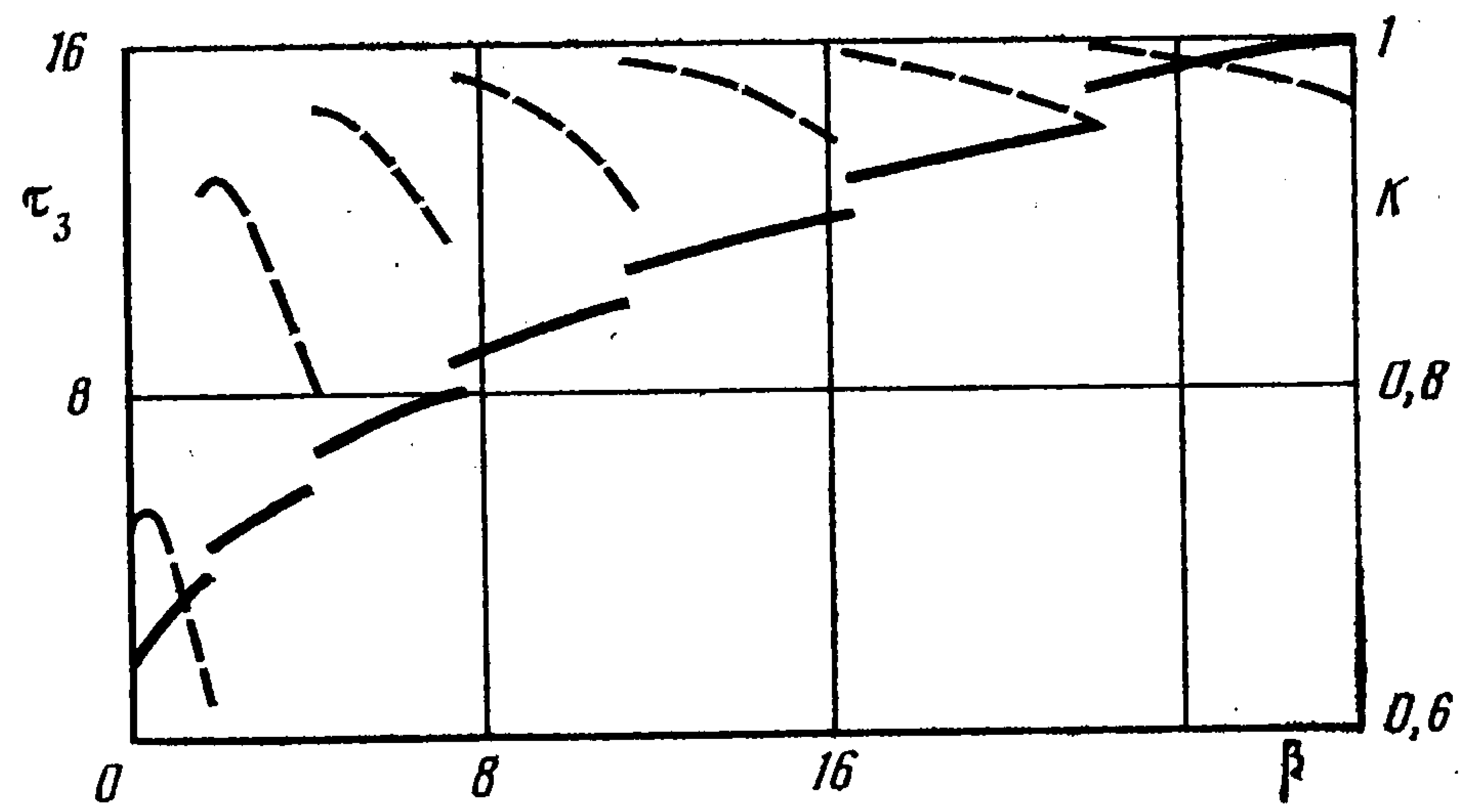
(3.4) $$u_0^{\cdot\cdot}(t_з) = 0$$

Из соотношений (3.3) и (3.4) следует, что безразмерное время окончания контакта $\tau_з$ — первый положительный корень алгебраического уравнения

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha, \tau)\,\theta(\tau - 2n) = 0$$
$$F_n(\alpha, \tau) = e^{2n\alpha}(L_n(2\alpha\tau - 4\alpha n) + L_{n-1}(2\alpha\tau - 4\alpha n))$$

На фигуре сплошными линиями приведена зависимость $\tau_з(\beta)$, $\beta \in [0, 28]$, где $\beta = 1/\alpha$, полученная при помощи ЭВМ. Разрывный характер этой зависимости обусловлен разрывом в начальной скорости струны (3.2), который, в свою очередь, возник вследствие удара точки о струну. Разрыв $\tau_з(\beta)$ происходит при «критических» значениях β_n, которые находятся из уравнения

$$1 + \sum_{k=1}^{n} F_k(\alpha_n, 2n + 2) = 0, \quad \beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$$



а величина разрыва — из равенства $\Delta\tau_n = \tau_n - 2n - 2$, где τ_n — корень уравнения

$$1 + \sum_{k=1}^{n+1} F_k(\alpha_n, \tau_n) = 0$$

Штрихами приведена зависимость $K(\beta)$, где $K = u_0^{\cdot}(t_3)/V$ — так называемый коэффициент восстановления. При $t > t_3$ раздельное движение объектов определяется путем решения уравнений

$$\rho u_{tt} - N u_{xx} = 0, \quad u_0^{\cdot\cdot}(t) = 0$$

с учетом соотношений $\{u_t\} = 0$, $\{u_t u_x\} = 0$, $\{u_0^{\cdot}\} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин X. А.* О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 6. С. 449—462.
2. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. М.: Высш. шк. 1980. 408 с.
3. *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.* Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 863—866.
4. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.; Л.: Гостехиздат. 1951. 432 с.

Горький

Поступила в редакцию
9.III.1987