Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 531.36

# НЕКОТОРЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ГЛАДКОЙ ПЛОСКОСТИ

Сумбатов А. С.

В задаче о движении тяжелого твердого тела по горизонтальной гладкой плоскости найдено в параметрической форме общее аналитическое выражение поверхности, ограничивающей тело, для которого уравнения движения допускают совокупность четырех линейных и однородных по скоростям инвариантных соотношений. Подробно рассматривается частный случай, когда тело ограничено поверхностью вращения, ось симметрии которой является осью одного из круговых сечений центрального гирационного эллипсоида. Уравнения движения такого тела допускают одиночное инвариантное соотношение. Найдены соответствующие стационарные движения тела, получено достаточное условие устойчивости некоторых многообразий стационарных движений.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(x, t),\ x \in R^l,\ t \in R \tag{1.1}$$

заданную в некоторой области изменения переменных.

Многообразие $\Sigma$ называется инвариантным, если оно составлено из интегральных кривых системы (1.1). В окрестности произвольной внутренней точки $x_0 \in \Sigma$ $(l-k)$-мерное инвариантное многообразие определяется уравнениями

$$F_1(x, t) = 0, \ldots, F_k(x, t) = 0 \tag{1.2}$$

где равенства (1.2) образуют совокупность инвариантных соотношений системы (1.1). Среди этих соотношений могут быть первые интегралы системы (постоянные интегрирования включены в функции $F_i$), одиночные инвариантные соотношения, каждое из которых локально определяет $(l-1)$-мерное инвариантное многообразие.

Уравнения (1.2) содержат некоторую информацию о поведении решений системы (1.1) и позволяют иногда элементарно получить важные классы частных решений системы [1].

Для уравнений механики изучение инвариантных многообразий (существование, свойства) естественно начать с простого случая, когда соответствующие функции $F_i$ линейны относительно обобщенных скоростей $q^{\boldsymbol{\cdot}} \in R^n$

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} c_{1i} q^{i\boldsymbol{\cdot}} = 0, \ldots, F_k = \sum_{i=1}^{k} c_{ki} q^{i\boldsymbol{\cdot}} = 0 \quad (k < n) \tag{1.3}$$

($c_{ij} = c_{ij}(q)$, $q \in R^n$ — вектор обобщенных координат механической системы). Условия существования некоторых таких многообразий получены в [2].

В дальнейшем потребуется следующий результат [2]. Пусть

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(q) q^{i\boldsymbol{\cdot}} q^{j\boldsymbol{\cdot}}, \quad U = U(q)$$

— соответственно кинетическая энергия и силовая функции голономной системы с $n$ степенями свободы. Уравнения Лагранжа допускают совокупность $n-1$ независимых инвариантных соотношений вида (1.3) тогда, а при $U \not\equiv \text{const}$ только тогда, когда первый дифференциальный параметр — функция от $U$:

$$\Delta_1 U = \sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij}(q) \frac{\partial U}{\partial q^i} \frac{\partial U}{\partial q^j} = \alpha(U) \tag{1.4}$$

Если условие (1.4) выполнено, то силовые линии — геодезические конфигурационного многообразия системы [3].

2. Применим данный критерий в следующей задаче. Тяжелое твердое тело, ограниченное регулярной выпуклой поверхностью, движется по горизонтальной абсолютно гладкой плоскости. Пусть $Ox_1x_2x_3$ — декартова система координат, образованная главными центральными осями инерции тела, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ и $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — компоненты в этих осях соответственно единичного вектора вертикали и мгновенной угловой скорости тела, $(x, y, z)$ — координаты точки $O$ в декартовой системе отсчета, плоскость $xy$ которой совпадает с опорной плоскостью, $A$, $B$, $C$ — главные центральные моменты инерции и $M$ — масса тела.

В общем случае

$$z = \beta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \tag{2.1}$$

где функция $\beta$ определяется формой, ограничивающей поверхности, и распределением масс в теле.

Удвоенная кинетическая энергия тела и силовая функция таковы ($P$ — вес тела):

$$\begin{gathered} 2T = M(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) + (A + Mu_1^2)\omega_1^2 + (B + Mu_2^2)\omega_2^2 + \\ + (C + Mu_3^2)\omega_3^2 + 2M(u_1u_2\omega_1\omega_2 + u_2u_3\omega_2\omega_3 + u_3u_1\omega_3\omega_1) \\ u_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, \ \beta_1 = \partial\beta/\partial\gamma_1 \ (123) \\ U = -P\beta \end{gathered} \tag{2.2}$$

Опустив случай $U \equiv \text{const}$ (симметричный шар), найдем условия, при которых уравнения движения тела допускают совокупность четырех линейных и однородных по $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ инвариантных соотношений.

Поскольку уравнения движения тела имеют три циклических интеграла

$$Mx^{\cdot} = c_1, \ My^{\cdot} = c_2, \ A\gamma_1\omega_1 + B\gamma_2\omega_2 + C\gamma_3\omega_3 = c_3$$

($c_1$, $c_2$, $c_3$ — произвольные постоянные), то искомые условия гарантируют существование дополнительного линейного соотношения, которое образует с указанными интегралами при $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ инвариантную совокупность.

Инвариант $\Delta_1\beta$ удобно вычислить в квазикоординатах $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$, соответствующих квазискоростям $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$. При этом

$$\frac{\partial}{\partial \pi_i} = \gamma_{i+2} \frac{\partial}{\partial \gamma_{i+1}} - \gamma_{i+1} \frac{\partial}{\partial \gamma_{i+2}}$$

(индексы записываются по mod 3).

Имеем

$$\Delta_1\beta = \sum_{i,\,j=1}^{3} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial\omega_i \partial\omega_j} \right)^{-1} \frac{\partial\beta}{\partial\pi_i} \frac{\partial\beta}{\partial\pi_j} = \frac{1}{M} - \frac{1}{M + M^2\Lambda}$$

$$(\Lambda = au_1^2 + bu_2^2 + cu_3^2, \ a = A^{-1}, \ b = B^{-1}, \ c = C^{-1})$$

Следовательно, согласно определению силовой функции (2.2), условие (1.4) приводится к виду $\Lambda = \alpha_1(\beta)$ $(\alpha_1 > 0)$. Это равенство можно переписать так:

$$(2.3)\qquad a\left(\gamma_3\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma_2}-\gamma_2\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma_3}\right)^2+b\left(\gamma_1\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma_3}-\gamma_3\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma_1}\right)^2+ c\left(\gamma_2\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma_1}-\gamma_1\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma_2}\right)^2=1$$

$$(2.4)\qquad \sigma=\int\frac{d\beta}{\sqrt{\alpha_1(\beta)}},\quad \beta=f(\sigma)$$

Рассматривая в нем $\sigma$ как неизвестную функцию, замечаем, что равенство (2.3) — уравнение Гамильтона — Якоби в задаче о движении твердого тела по инерции вокруг неподвижной точки при дополнительном условии, что проекция вектора кинетического момента тела на вертикаль равна нулю (причем постоянная интеграла энергии $h = 1/2$). Это уравнение интегрируется в обобщенных координатах [4].

Рассмотрим два случая: 1) среди чисел $A$, $B$, $C$ есть равные, 2) $A > B > C$.

В первом случае, обозначив $\theta$ угол между осью симметрии тела и вертикалью, можно записать уравнение (2.3) в углах Эйлера $\varphi, \psi, \theta$. Координаты $\varphi, \psi$ оказываются циклическими. Поэтому, согласно (2.4), получим, что высота центра масс тела над опорной плоскостью — произвольная функция угла $\theta$. Таким свойством обладают только тела вращения. Уравнения движения тела вращения интегрируются в квадратурах [5].

Во втором случае выполним замену

$$(2.5)\qquad \gamma_1^2=\frac{(a+\lambda)(a+\mu)}{(a-b)(a-c)},\quad \gamma_2^2=\frac{(b+\lambda)(b+\mu)}{(b-c)(b-a)}$$
$$(-c<\mu<-b,\ -b<\lambda<-a)$$

в уравнении

$$(2.6)\qquad \left[a\left(\frac{\partial V}{\partial\gamma_2}\right)^2+b\left(\frac{\partial V}{\partial\gamma_1}\right)^2\right](1-\gamma_1^2-\gamma_2^2)+c\left(\gamma_2\frac{\partial V}{\partial\gamma_1}-\gamma_1\frac{\partial V}{\partial\gamma_2}\right)^2=1$$

$$(2.7)\qquad V(\gamma_1,\gamma_2)=\sigma\left(\gamma_1,\gamma_2,\sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2}\right)$$

представляющем сужение уравнения (2.3) на подмногообразие $\gamma_3 - \sqrt{1-\gamma_1^2-\gamma_2^2} = 0$. Здесь $\lambda$, $\mu$ — эллиптические координаты на поверхности центрального эллипсоида инерции тела

$$(2.8)\qquad x_1^2/a^2+x_2^2/b^2+x_3^2/c^2=1$$

В переменных $\lambda$, $\mu$ уравнение (2.6) принимает вид

$$(2.9)\qquad \frac{\varkappa(\lambda)}{\lambda}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)^2-\frac{\varkappa(\mu)}{\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)^2=\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}$$
$$(\varkappa(x)=(a+x)(b+x)(c+x))$$

т. е. переменные разделяются. Полный интеграл этого уравнения ($e_1$, $e_2$ — постоянные)

$$(2.10)\qquad V=r(-b,e_1,\lambda)+r(-c,e_1,\mu)+e_2$$
$$\left(r(s,k,\rho)=\int_s^\rho\sqrt{(kx-1)\varkappa^{-1}(x)}\,dx\right)$$

Согласно теории [6], для получения общего решения уравнения (2.9) необходимо в формуле (2.10) придать параметрам $e_1$, $e_2$ постоянные значения либо связать их одной зависимостью, например $e_2 = f(e_1)$, и подставить в (2.10) решение $e_1(\lambda, \mu)$ интегрального уравнения

$$r_1(-b, e_1, \lambda) + r_1(-c, e_1, \mu) + df_1/de_1 = 0$$

$$\left(r_1(s, k, \rho) = \frac{1}{2}\int_s^\rho \frac{x\,dx}{\sqrt{(kx-1)\varkappa(x)}}\right.$$

Формулы (2.1), (2.4), (2.7), (2.10) позволяют выразить высоту $z$ центра масс тела над опорной плоскостью как функцию переменных $\lambda$, $\mu$. В выражение для $z$ входят две произвольные функции $f$ и $f_1$, стесненные только условием, чтобы поверхность $S$, ограничивающая тело, была выпуклой.

Получим уравнения поверхности $S$ в параметрической форме. При произвольном положении тела вертикаль, проведенная через центр масс $O$, протыкает поверхность (2.8) в точке со значениями $\lambda_0$, $\mu_0$ эллиптических координат $\lambda$, $\mu$. Если точке $O_1$ соприкосновения поверхности $S$ с опорной плоскостью в рассматриваемом положении тела поставить в соответствие эти значения $\lambda_0$, $\mu_0$ гауссовых координат, то параметрическое задание поверхности $S$ будет определено, причем глобально, так как поверхность выпуклая.

Имеем

$$z(\lambda, \mu) = l\gamma_1 + m\gamma_2 + n\gamma_3 \tag{2.11}$$

$$\gamma_3^2 = 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \frac{(c+\lambda)(c+\mu)}{(c-a)(c-b)}$$

где $(l, m, n)$ — компоненты радиуса-вектора $OO_1$ в осях $Ox_1x_2x_3$, величины $\gamma_1$, $\gamma_2$ определяются из формул (2.5).

Дифференцированием (2.11) находим

$$\partial_\rho z = l\partial_\rho\gamma_1 + m\partial_\rho\gamma_2 + n\partial_\rho\gamma_3 \quad (\partial_\rho = \partial/\partial\rho,\ \rho = \lambda, \mu)$$

Отсюда при учете соотношения (2.11) получаем

$$l = \frac{\gamma_1}{\lambda-\mu}\left[(\lambda-\mu)z - 2(b+\lambda)(c+\lambda)\partial_\lambda z + 2(b+\mu)(c+\mu)\partial_\mu z\right] \tag{2.12}$$

$$(lmn,\ 123,\ abc)$$

Эти формулы дают искомое параметрическое описание поверхности, ограничивающей тело.

Для тел, поверхности которых принадлежат к данному классу, и только для таких тел (случай симметричного шара не рассматривается) уравнения движения допускают совокупность четырех инвариантных соотношений вида (1.3). Эту совокупность составляют, например, соотношения

$$x^{\cdot} = 0,\ y^{\cdot} = 0,\ A\gamma_1\omega_1 + B\gamma_2\omega_2 + C\gamma_3\omega_3 = 0,\ Au_3\omega_1 - \\ - Cu_1\omega_3 = 0$$

Они линейно независимы, коэффициенты удовлетворяют условию ортогональности.

3. Разберем подробнее частный случай: $e_1$ и $e_2$ — постоянные.

Чтобы функции $r(-b, e_1, \lambda)$ и $r(-c, e_1, \mu)$ в (2.10) принимали вещественные значения, должны выполняться соответственно неравенства

$$e_1 \geqslant 1/\lambda \quad \text{при } -b < \lambda < -a$$

$$e_1 \leqslant 1/\mu \quad \text{при } -c < \mu < -b$$

Следовательно, постоянное значение параметра $e_1$ может быть только единственным

$$e_1 = -1/b = -B \tag{3.1}$$

При этом значении $e_1$ интегралы в (2.10) выражаются через элементарные функции.

Определим геометрию тела. Пусть $H$ — основание перпендикуляра, опущенного из центра масс $O$ на опорную плоскость, $N$ — точка пересечения опорной плоскости и оси одного из круговых сечений центрального гирационного эллипсоида. Вектор с компонентами $(\pm\sqrt{b-a}, 0, \sqrt{c-b})$ в осях $Ox_1x_2x_3$ имеет направление $ON$. Пользуясь формулами (2.5) для компонент вектора вертикали и параметрическими уравнениями (2.12) поверхности тела, записанными для рассматриваемого случая (3.1), можно убедиться, что при любых значениях $\lambda$, $\mu$ точки $O, O_1, H, N$ лежат в одной плоскости $p$.

Выясним, как по отношению к телу расположен вектор кинематически допустимой угловой скорости $\omega$, если зафиксировать в неподвижном пространстве плоскость $p$ и наложить еще одну связь: $OH = \mathrm{const}$. Так как мгновенная скорость точки $O_1$ тела лежит в опорной плоскости, то вектор $\omega$ принадлежит плоскости $p$ (считаем, что точки $O_1$ и $H$ различны). Из условия, что ось $ON$ тоже принадлежит $p$, следует коллинеарность векторов $ON$ и $\omega$. Значит, тело может только поворачиваться вокруг неподвижной оси $ON$. С учетом произвольности значения $OH$ заключаем, что в случае (3.1) тело ограничено поверхностью вращения, ось симметрии которой — ось одного из круговых сечений центрального гирационного эллипсоида тела.

Уравнения движения такого тела допускают одиночное инвариантное соотношение [7]

$$c\sqrt{b-a}\ \omega_1 \pm a\sqrt{c-b}\ \omega_3 = 0 \tag{3.2}$$

В системе с известными инвариантными соотношениями (в том числе, с известными первыми интегралами) стационарным точкам одного инвариантного соотношения при фиксированных значениях постоянных других соотношений отвечают действительные движения системы, называемые стационарными [1, 8].

Найдем стационарные по отношению к интегралу энергии движения тела, ограниченного поверхностью вращения, ось симметрии которой проходит через центр масс тела, лежит в плоскости, ортогональной средней оси центрального эллипсоида инерции, и составляет острый угол $\theta$ с наименьшей осью этого эллипсоида:

$$\operatorname{tg}\theta = \mp\sqrt{(c-b)/(b-a)} \tag{3.3}$$

(знаки в формулах (3.2) и (3.3) согласованы). При этом, не нарушая общности, полагаем, что проекция центра масс тела на опорную плоскость остается неподвижной, т. е. $x^{\cdot} = y^{\cdot} = 0$.

Вместо переменных $\gamma_i$ удобнее использовать три угла: $\varphi$ — угол собственного вращения тела вокруг оси симметрии, $\psi$ — угол поворота вертикальной плоскости меридионального сечения тела, $\alpha$ — угол наклона оси симметрии к горизонту $(-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2)$.

Связь между величинами $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ и $\psi^{\cdot}$, $\alpha^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$ при $\cos\alpha \neq 0$ дается формулами

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \psi^{\cdot}(\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta\cos\varphi) - \alpha^{\cdot}\sin\theta\sin\varphi + \\ &+ \varphi^{\cdot}\cos\theta \\ \omega_2 &= -\psi^{\cdot}\cos\alpha\sin\varphi + \alpha^{\cdot}\cos\varphi \\ \omega_3 &= -\psi^{\cdot}(\sin\alpha\sin\theta + \cos\alpha\cos\theta\cos\varphi) - \alpha^{\cdot}\cos\theta\sin\varphi - \\ &- \varphi^{\cdot}\sin\theta \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из соотношения (3.2) получим ($\varepsilon$ — новая переменная)

(3.5) $\omega_1 = \varepsilon BA^{-1} \sin\theta,\ \omega_3 = \varepsilon BC^{-1}\cos\theta$

Используя формулы (3.3)—(3.5), перепишем выражение для полной механической энергии тела в виде

$$H = {}^1/_2(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) + {}^1/_2 Mz'^2\alpha^{\cdot 2} + Pz =$$
$$= {}^1/_2 B(\varepsilon^2 + \omega_2^2) + {}^1/_2 Mz'^2\Phi'^2(\varphi) + Pz$$
$$\Phi(\varphi) = \varepsilon\cos\varphi + \omega_2\sin\varphi,\ z' = dz/d\alpha,\ \Phi' = d\Phi/d\varphi$$

Необходимо найти стационарные точки этой функции на многообразии, определяемом интегралом площадей (постоянная $c_3$ фиксирована)

(3.6) $-B\Phi(\varphi)\cos\alpha = c_3$

Условия стационарности ($\sigma$ — множитель Лагранжа)

(3.7)
$$B\varepsilon - Mz'^2\Phi'(\varphi)\sin\varphi - B\sigma\cos\varphi\cos\alpha = 0$$
$$B\omega_2 + Mz'^2\Phi'(\varphi)\cos\varphi - B\sigma\sin\varphi\cos\alpha = 0$$
$$\Phi'(\varphi)\,[Mz'^2\Phi(\varphi) + B\sigma\ \cos\alpha] = 0$$
$$Mz'd^2z/d\alpha^2\Phi'^2(\varphi) + Pz' + B\sigma\Phi(\varphi)\sin\alpha = 0$$

Из первых двух уравнений (3.7) находим

(3.8) $\Phi'(\varphi) = 0$

Следовательно

(3.9) $\varepsilon = \sigma\cos\alpha\cos\varphi,\ \omega_2 = \sigma\cos\alpha\sin\varphi$

Третье равенство (3.7) выполняется тождественно, а четвертое принимает вид

(3.10) $Pz' + B\sigma\Phi(\varphi)\sin\alpha = 0$

В силу соотношений (3.4), (3.5) условие (3.8) означает, что $\alpha^{\cdot} = 0$, т. е. в стационарном движении тело сохраняет постоянный наклон оси симметрии к горизонту: $\alpha = \alpha_0$.

Пусть $z'(\alpha_0) \neq 0$.

Решение уравнений (3.7) дается формулами (3.9), где $\sigma = -bc_3\sec\alpha_0$, а значение $\alpha_0$ определяется из уравнения

$$Pz'(\alpha_0) + bc_3^2\operatorname{tg}\alpha_0 = 0$$

Из формул (3.4), (3.5) получим

(3.11)
$$\psi^{\cdot} = -\sigma,\ \varphi^{\cdot} = (\operatorname{tg}\alpha_0 - k\cos\varphi)\,\sigma\cos\alpha_0$$
$$k^2 = (1 - B/A)\,(B/C - 1),\ \operatorname{sign} k = \operatorname{sign}\theta$$

Тело равномерное вращается вокруг вертикали. При этом, если $|\operatorname{tg}\alpha_0| > k$, оно также вращается вокруг оси симметрии с периодически изменяющейся по величине угловой скоростью. Если $|\operatorname{tg}\alpha_0| \leqslant k$, то угловая скорость собственного вращения тела монотонно уменьшается до нуля при $t \to \infty$, причем тело не успевает сделать один оборот вокруг оси симметрии.

Указанные стационарные движения образуют многообразие $\Sigma_3$ размерности три и не содержат равновесий. Эти движения существуют, только когда

(3.12) $z'\sin\alpha < 0$

Данное неравенство выполняется, например, в окрестности статически устойчивого положения равновесия несимметричного шара. Напротив, для симметричного тела, ограниченного эллипсоидальной поверхностью вращения, ось которой совпадает с наибольшой осью эллипсоида, неравенство (3.15) вообще не выполняется.

Пусть $z'(\alpha_0) = 0$.

Если $\alpha_0 \neq 0$, то из формул (3.5), (3.9), (3.10) следует, что стационарные движения тела — равновесия.

Для случая $\alpha_0 = 0$ справедливы уравнения (3.11). Стационарные движения образуют двумерное многообразие $\Sigma_2$ и включают равновесия. При неравновесных стационарных движениях наименьшая и наибольшая оси центрального эллипсоида инерции тела стремятся асимптотически во времени занять горизонтальные положения.

Когда ось симметрии вертикальна, стационарные движения — равновесия, которые могут быть реализованы, поскольку, в силу симметрии ограничивающей тело поверхности, $z'(\pm\pi/2) = 0$.

Чтобы исследовать устойчивость стационарных движений, рассмотрим функцию

$$R = H + \sigma(f_3 + c_3) + {}^1/_2\sigma^2 B\cos^2\alpha_0 - Pz(\alpha_0) =$$
$$= {}^1/_2 B(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + {}^1/_2 Mz'^2 (\Omega_1 \sin\varphi - \Omega_2\cos\varphi)^2 + P[z(\alpha) -$$
$$- z(\alpha_0)] + {}^1/_2 bc_3^2 (1 - \cos^2\alpha/\cos^2\alpha_0)$$

$$f_3 = -B\Phi(\varphi)\cos\alpha - c_3,\ \Omega_1 = \varepsilon - \sigma\cos\alpha\cos\varphi,\ \Omega_2 =$$
$$= \omega_2 - \sigma\cos\alpha\sin\varphi$$

Пусть $z(\alpha_0)$ — строгий минимум функции $z(\alpha)$. Тогда функция $R$ определенно положительна по переменным $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\alpha - \alpha_0$. Следовательно [9], соответствующие многообразия равновесных стационарных движений и многообразие $\Sigma_2$ условно устойчивы по отношению к отклонениям, характеризуемым этими переменными. Условная устойчивость понимается в том смысле, что начальные точки траекторий возмущенного движения должны удовлетворять уравнению (3.2) и, как было оговорено, уравнениям $x^{\cdot} = y^{\cdot} = 0$.

Пусть $z'(\alpha_0) \neq 0$. Условие положительной определенности квадратичной формы $\delta^2 R$ на линейном многообразии $\delta f_3 = 0$:

$$(B\cos\varphi\cos\alpha_0)\,\delta\Omega_1 + (B\sin\varphi\cos\alpha_0)\,\delta\Omega_2 + 2c_3\sin\alpha_0\,\delta\alpha =$$
$$= 0$$

приводится к единственному неравенству

$$b^2c_3^4 + 3[Pz'(\alpha_0)]^2 + bc_3^2Pz''(\alpha_0) > 0$$

Таким образом, при достаточно больших значениях угловой скорости многообразие $\Sigma_3$ стационарных движений тела условно устойчиво по отношению к отмеченным отклонениям.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Levi-Civita T.* Sur la recherche des solutions particulières des systèmes differentiels et sur les mouvements stationnaires // Prace mat.-fis., W-wa. 1906. T. 17. P. 1—40. (см. также *Levi-Civita T.* Opere mathematiche (1901—1907). V. 2. Bologna: Zanichelli. 1956. 635 p.).
2. *Сумбатов А. С.* Об однородных линейных инвариантных соотношениях уравнений динамики // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 32—42.
3. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука. 1967. 664 с.
4. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз. 1960. 487с.
5. *Колосов Г. В.* О некотором видоизменении начала Гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела // Сборник Института инженеров путей сообщения. СПБ. 1903. Вып. 71. 76 с.

6. *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л.; М.: Гостехиздат. 1934. 359 с.
7. *Буров А. А.* О частных интегралах уравнений движения твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1985. С. 118—121.
8. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука. 1983. 544 с.
9. *Карапетян А. В., Рубановский В. Н.* О модификации теоремы Рауса об устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высш. шк. 1986. Вып. 17. С. 91—99.

**Москва**

**Поступила в редакцию 31.XII.1986**