

УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ С ОДНИМ УБЕГАЮЩИМ

Левченков А. Ю.

Рассматривается задача простого преследования двумя объектами одного на плоскости. Предполагается, что преследующие объекты имеют различные ограничения на максимальную скорость, причем убегающий движется не быстрее самого медленного преследователя. Время игры фиксировано. Функционал платы — расстояние между преследуемым объектом и ближайшим к нему преследователем в момент окончания игры. Не используя явный вид функции программного максимина, удается показать ее u -стабильность во всем пространстве, т. е. совпадение с ценой дифференциальной игры. Доказано также, что время программного поглощения является временем оптимального быстрогодействия.

Ранее [1] было получено оптимальное решение игровой задачи сближения в случае, когда ограничения по скорости у преследователей совпадают.

Статья продолжает исследования [1—3]. В работе [4] для одинаковых преследователей решена задача оптимального быстрогодействия. Используемая формализация дифференциальных игр изложена в работах [5—7].

1. Пусть движение преследователей $S(x)$ — медленного, $Q(y)$ — быстрого и преследуемого объекта $E(z)$ описывается уравнениями

$$(1.1) \quad \dot{x}_i = u_i, \quad \dot{y}_i = v_i, \quad \dot{z}_i = w_i; \quad i = 1, 2$$

Векторы управления преследователей и убегающего удовлетворяют ограничениям

$$(1.2) \quad (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \leq \mu, \quad (v_1^2 + v_2^2)^{1/2} \leq \lambda, \quad (w_1^2 + w_2^2)^{1/2} \leq \nu$$

причем выполняется условие превосходства преследователей

$$(1.3) \quad \nu \leq \mu < \lambda$$

Игра рассматривается на отрезке времени $[t_0, \vartheta]$. Функционал платы — евклидово расстояние между преследуемым объектом и ближайшим к нему преследователем в момент окончания игры $t = \vartheta$, т. е.

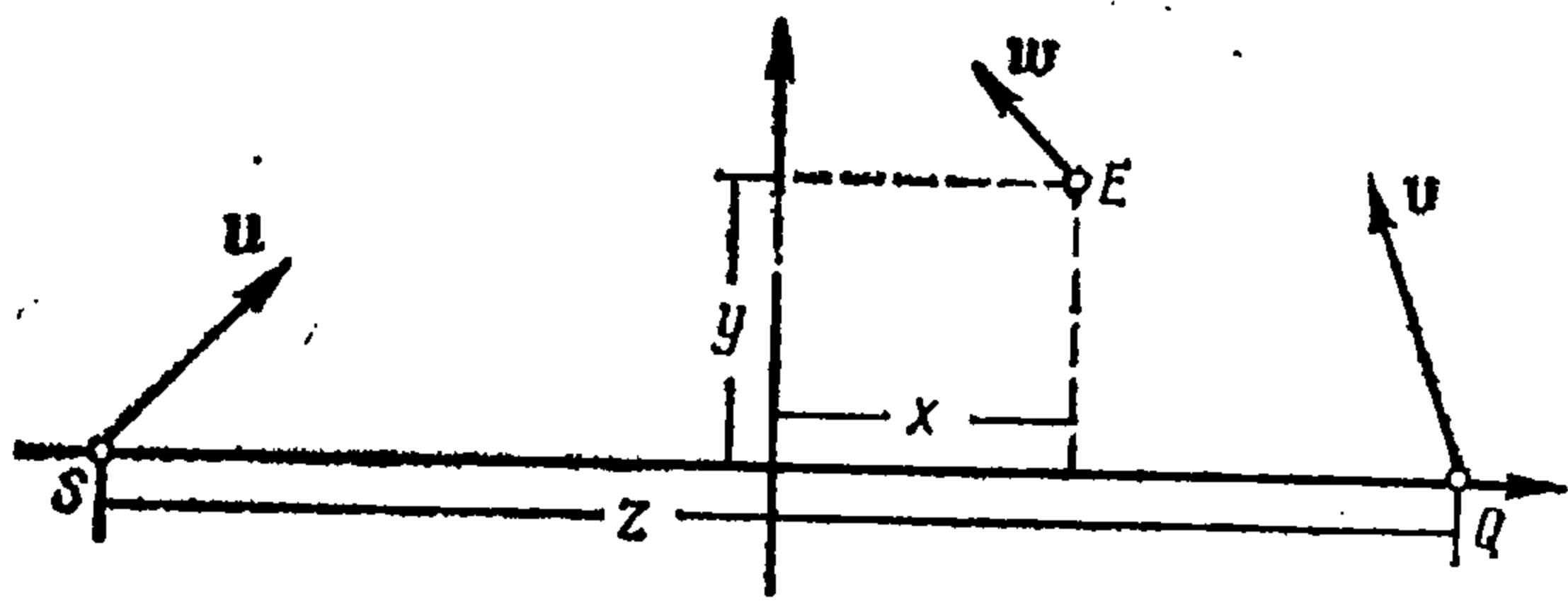
$$(1.4) \quad \sigma = \min \{ \|z(\vartheta) - x(\vartheta)\|, \|z(\vartheta) - y(\vartheta)\| \}$$

Фазовое пространство системы фактически трехмерное. Для полного описания текущей позиции игры достаточно задать тройку чисел (x, y, z) , где $z = \|SQ\|$, а пара (x, y) — декартовы координаты точки E в системе, связанной с преследователями (фиг. 1). Вырожденный случай $S(t_0) = Q(t_0)$ сводится к игре сближения между быстрым преследователем Q и убегающим E , для которой цена известна (обозначим ее ρ^{11}). В дальнейшем предполагаем, что $S(t_0) \neq Q(t_0)$.

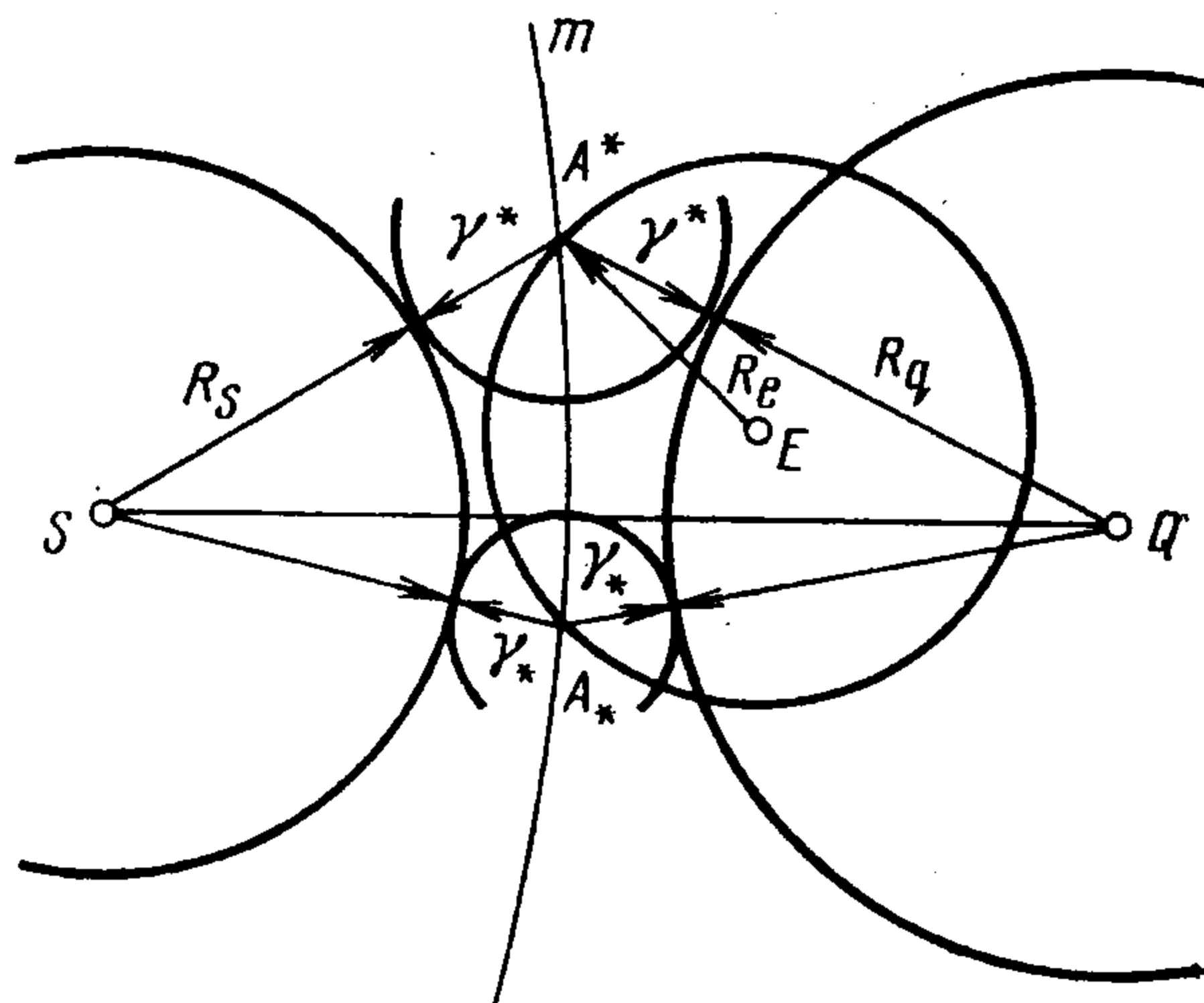
Динамика фазового вектора относительных координат $\zeta = (x, y, z)$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= w_1 - (u_1 + v_1)/2 + y(v_2 - u_2)/z \\ \dot{y} &= w_2 - (u_2 + v_2)/2 - x(v_2 - u_2)/z \\ \dot{z} &= v_1 - u_1 \end{aligned}$$

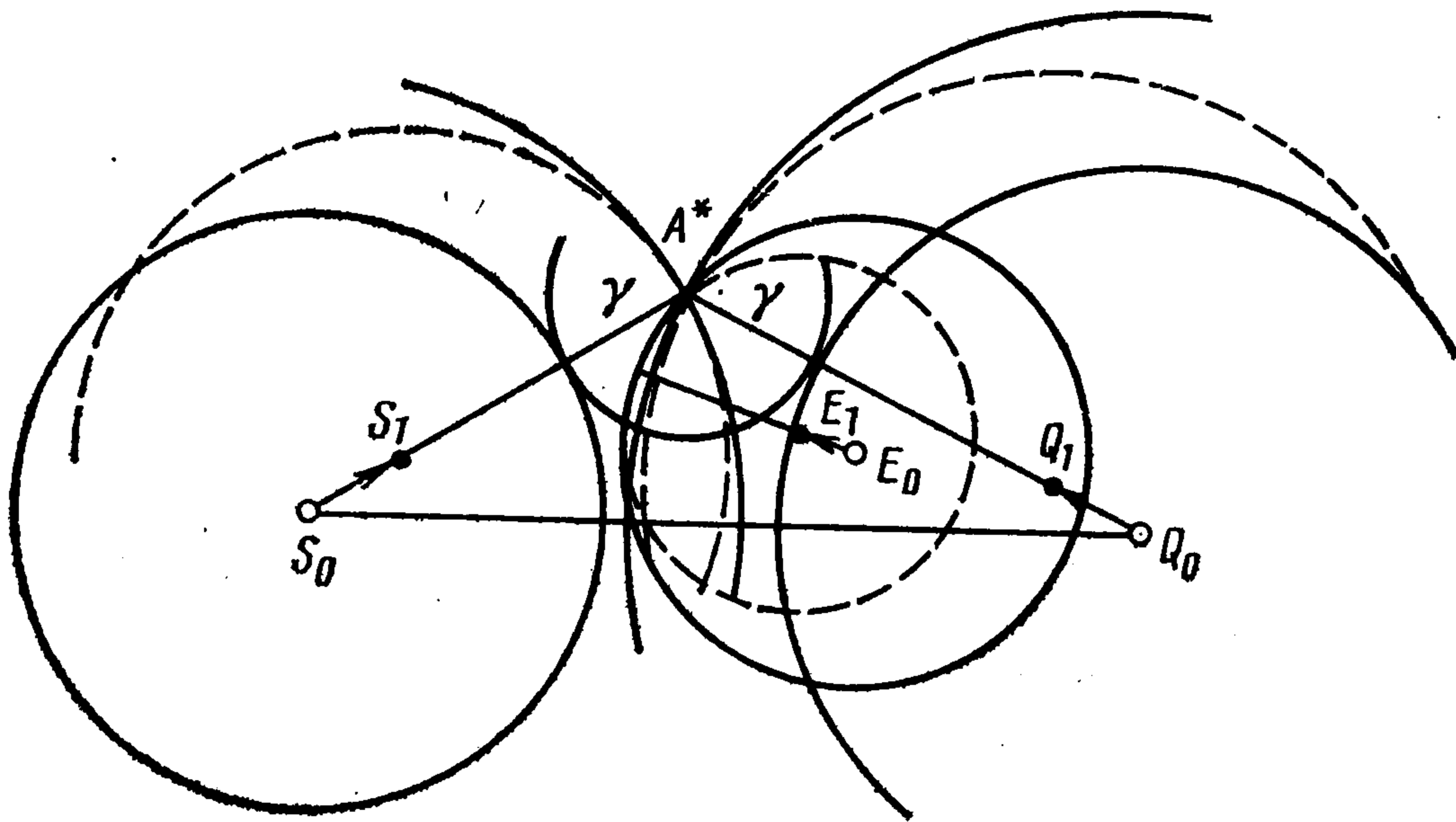
В плоскости игры изобразим области достижимости игроков. Этими областями будут круги G_s, G_q, G_e с радиусами $R_s = \mu(\vartheta - t_0)$, $R_q =$



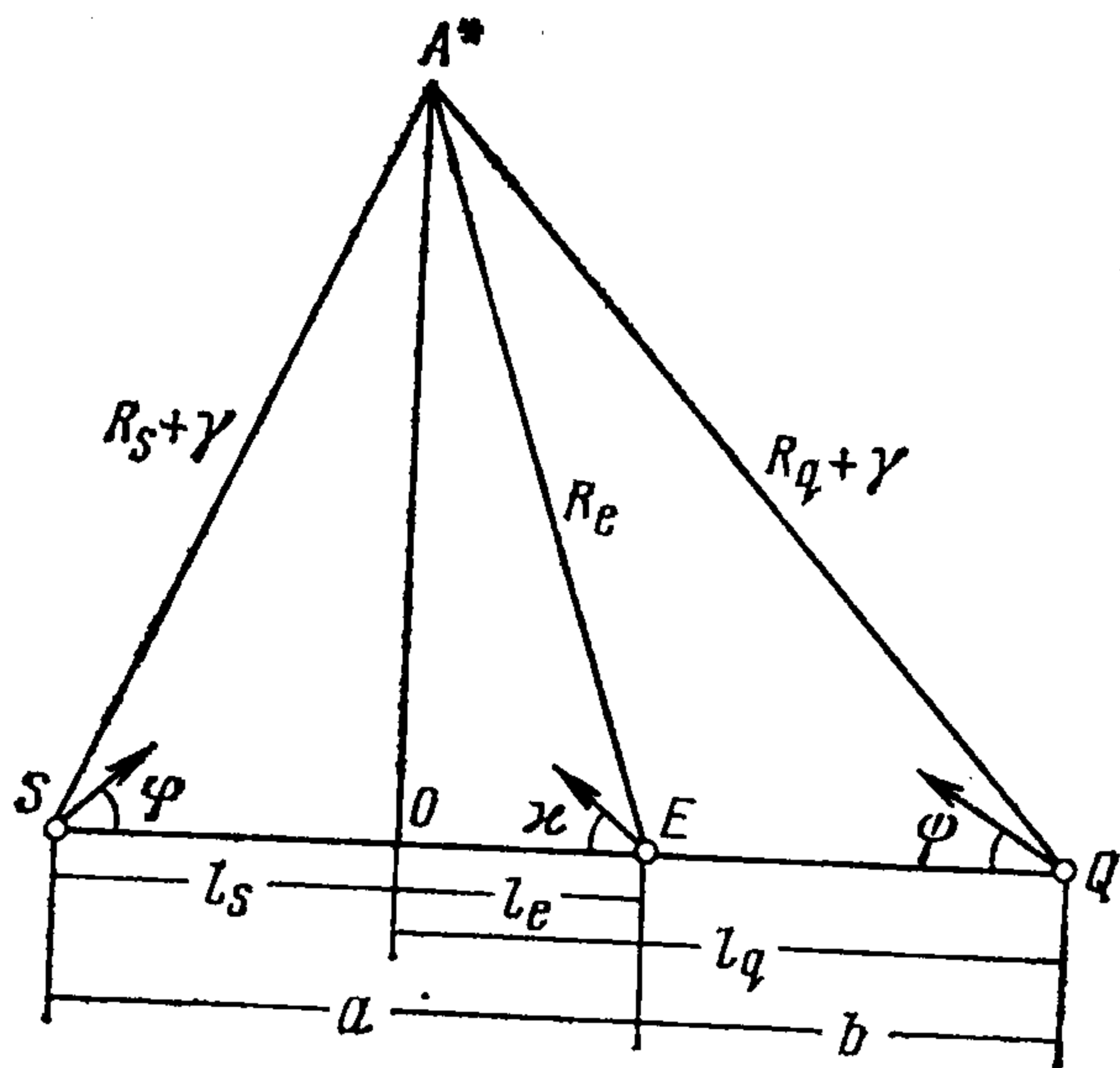
Фиг. 1



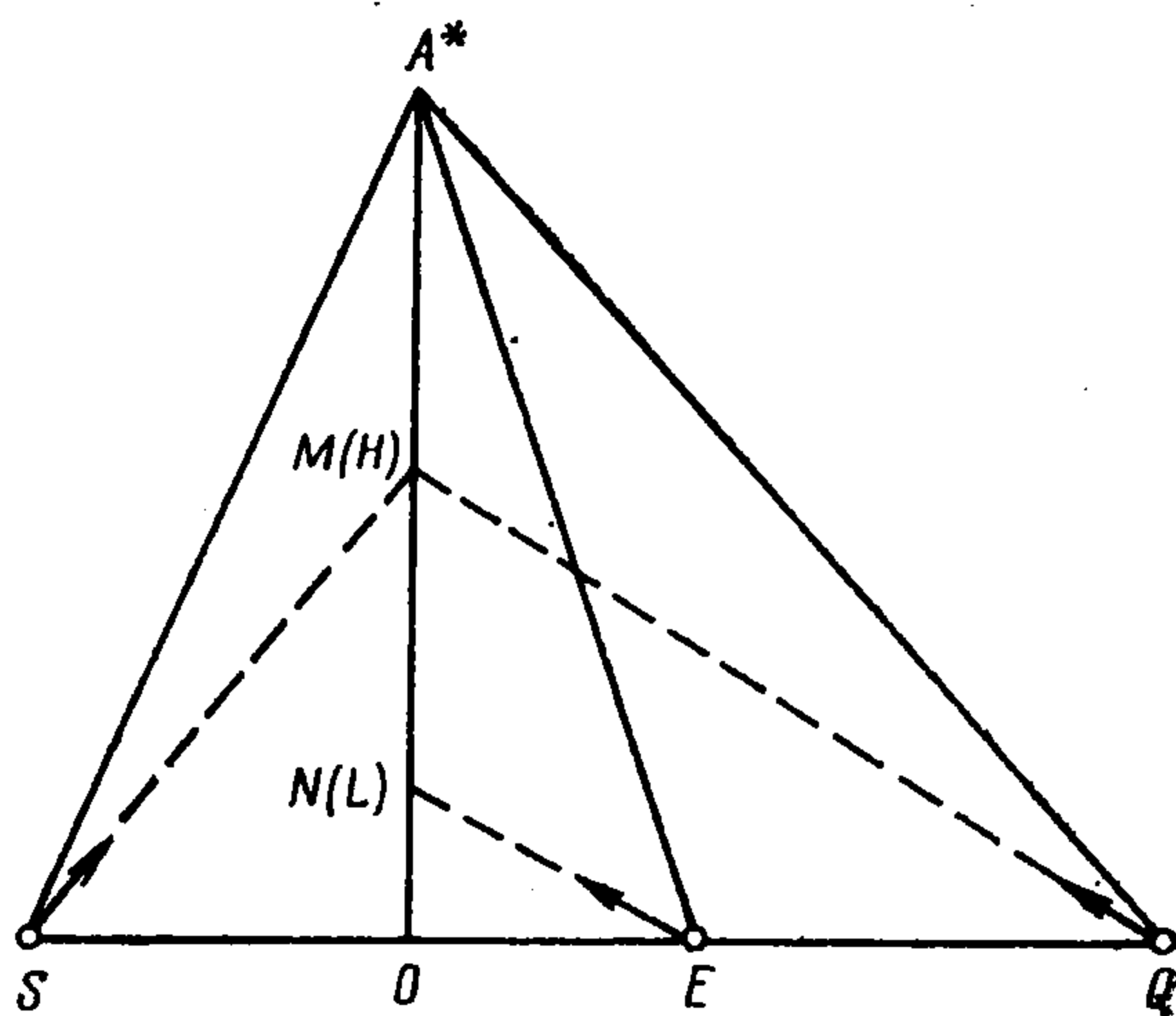
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$= \lambda (\vartheta - t_0)$, $R_e = \nu (\vartheta - t_0)$ и центрами в точках S , Q и E соответственно. Пусть m — кривая, каждая точка которой равноудалена от окружностей G_s и G_q . Точки пересечения окружности G_e с кривой m обозначим A^* и A_* (фиг. 2). В случаях, когда $G_e \cap m = \{\emptyset\}$, или $A^* = A_*$, можно показать вырождение исходной игры в игру «один на один» с ценой ρ^{11} , совпадающей с программным максимумом γ .

Пусть $A^* \neq A_*$. Если $E \notin \text{int } SA^*QA_*$, то игра также сводится к игре «один на один» (область, в которой $\rho^{21} = \rho^{11}$, обозначим D_{11}). Область, для которой выполнено включение $E \in \text{int } SA^*QA_*$, обозначим D_{21} . Забегая вперед, отметим, что в области D_{21} взаимодействие преследователей приносит им дополнительный успех.

Введем функцию программного максимина γ следующими выражениями:

а) $\gamma = 0$, если $G_s \cup G_q \supset G_e$;

б) если $\gamma^* = \rho(A^*, G_s) = \rho(A^*, G_q)$ и $\gamma_* = \rho(A_*, G_s) = \rho(A_*, G_q)$, то

$$\gamma = \max \{ \gamma^*, \gamma_* \} \text{ при } G_e \setminus (G_s \cup G_q) \neq \{\emptyset\}$$

($\rho(\cdot, \cdot)$ — евклидово расстояние от точки до множества на плоскости). Отметим, что для функций γ^* и γ_* можно составить систему уравнений, решая треугольники SA^*Q , SA_*Q и SEQ , но сложный вид получающихся при этом зависимостей затрудняет эффективное их исследование.

Из определения видно, что функция γ кусочно-гладкая в D_{21} , причем ее гладкость может нарушаться лишь на поверхности $y = 0$ (когда $\gamma = \gamma^* = \gamma_*$). Ниже будет показано, что функция программного максимина γ является u -стабильной во всем пространстве и, следовательно, совпадает с ценой [6].

2. Пусть $\gamma(t_0, \zeta_0)$ — программный максимин в позиции $\{t_0, \zeta_0\} \in D_{21}$ и пусть для определенности $E_0 \in \Delta S_0 A_0^* Q_0$ ($y_0 > 0$). Определим экстремальное движение игроков S и Q как движение с максимальной скоростью в точку A^* . Соответствующие постоянные управления игроков обозначим u° и v° . Тогда существует число T , такое, что для любого $\Delta t < T$ и произвольной измеримой выборки $w(t)$ тройка управлений $(u^\circ, v^\circ, w(t))$ переводит систему к моменту $t_1 = t_0 + \Delta t$ в позицию $\{t_1, \zeta_1\}$, причем при всяком $t \in [t_0, t_1]$ выполнено включение $E(t) \in \Delta S(t) A^* Q(t)$. В исходной позиции в момент $t = t_0$ имело место покрытие

$$G_s(t_0) \oplus \gamma C \cup G_q(t_0) \oplus \gamma C \supset G_e(t_0)$$

которое, очевидно, сохраняется и в момент $t = t_1$ (фиг. 3) (здесь C — круг единичного радиуса с центром в нуле). Сохранение покрытия означает выполнение неравенства $\gamma(t_1, \zeta_1) \leq \gamma(t_0, \zeta_0)$, т. е. условия u -стабильности.

3. Проверим поведение функции γ на поверхности $y = 0$. Положим, что либо $\gamma > 0$, либо $\gamma = 0$, но $A^*, A_* \in \partial(G_s \cup G_q)$. Стабильность функции $\gamma = 0$ при $A^*, A_* \in \text{int}(G_s \cup G_q)$ очевидна.

Исследование функции γ на поверхности $y = 0$ удобно проводить в специальных координатах (фиг. 4). Пусть $a = \|SE\|$, $b = \|EQ\|$, $c = a + b$. Значение γ в этой системе определяется по формуле

$$(3.1) \quad \gamma = (R_e^2 + ab(1 - ((R_s - R_q)/c)^2))^{1/2} - (R_s b + R_q a)/c$$

Вследствие линейности системы (1.5) по управлениям достаточно проверить u -стабильность γ при $\|w(t)\| = v$. Кроме того, стабильность будет установлена, если для любого выбора управления $w(t)$ ($\|w(t)\| = v$) игроком E в момент t найдется $\delta > 0$ и управления преследователей $u(\tau)$, $v(\tau)$ на отрезке $\tau \in [t, t + \delta]$ (причем $\|u\| = \mu$, $\|v\| = \lambda$), такие, что вдоль соответствующей траектории движения системы выполняется неравенство $d\gamma/dt \leq 0$.

Пусть игрок E находится правее перпендикуляра A^*O ($a > \|SO\|$). Введем в качестве новых управлений углы (фиг. 4). Имеем

$$u_1 = \mu \cos \varphi, \quad v_1 = -\lambda \cos \psi, \quad w_1 = -v \cos \kappa$$

$$u_2 = \mu \sin \varphi, \quad v_2 = \lambda \sin \psi, \quad w_2 = v \sin \kappa$$

(при $a \leq \|SO\|$ полагаем $\kappa \mapsto -\kappa$). Рассмотрим уравнения движения в координатах (a, b, y) :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} a' &= -(\mu \cos \varphi + \nu \cos \kappa), & b' &= -(\lambda \cos \psi - \nu \cos \kappa) \\ y' &= \nu \sin \kappa - b\mu \sin \varphi/c - a\lambda \sin \psi/c \end{aligned}$$

Отметим, что управлениям u° и v° в новых обозначениях соответствуют φ° и ψ° .

Пусть $0 \leq \kappa \leq \pi$ (для $-\pi \leq \kappa \leq 0$ рассуждения аналогичны). Оставшуюся часть вектограммы игрока E разобьем на два подмножества:

- 1) управления $\kappa(t)$, которые в совокупности с φ° и ψ° порождают движение с $y' > 0$, составляют множество K_1 ;
- 2) остальные управления образуют множество K_2 .

При выполнении условий первой группы u -стабильность функции γ можно доказать рассуждениями, аналогичными приведенным в п. 2.

Рассмотрим вторую группу управлений игрока E . При этом на траектории, порожденной управлениями $(\varphi^\circ, \psi^\circ, \kappa)$, в момент $t + \delta$ ($\delta > 0$) оказывается, что $y' < 0$ и точка E попадает в нижний треугольник SA_*Q . Введем дополнительные ограничения на управления преследователей. Для заданной позиции $(x, 0, z)$ рассмотрим лишь такие управления $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, которые в совокупности с $\kappa(t) \in K_2$ порождают траектории, скользящие ($y' = 0$) по поверхности $y = 0$. Покажем, что среди оставшихся управлений найдутся управления, обеспечивающие невозрастание γ вдоль соответствующей траектории!

Итак, динамика системы описывается первыми двумя уравнениями (3.2). Скольжение фазовой траектории вдоль поверхности $y = 0$ обеспечивает конечное соотношение

$$(3.3) \quad cv \sin \kappa = b\mu \sin \varphi + a\lambda \sin \psi$$

Обозначим $\Phi(\kappa)$ множество, состоящее из пар управлений (φ, ψ) , таких, что $0 \leq \varphi \leq \varphi^\circ$, $0 \leq \psi \leq \psi^\circ$ и тройка (φ, ψ, κ) удовлетворяет равенству (3.3).

Свойство u -стабильности функции γ на поверхности $y = 0$ следует из неравенства

$$(3.4) \quad \max_{\kappa \in K_2} \min_{(\varphi, \psi) \in \Phi(\kappa)} (d\gamma/dt) \leq 0$$

Докажем неравенство (3.4). Для этого дифференцируем выражение (3.1) в силу системы (3.2) с учетом ограничения (3.3). Получим выражение для производной функции γ ($\Gamma = d\gamma/dt|_{y=0}$), причем углы φ , ψ и κ связаны соотношением (3.3). Возьмем минимум этого выражения по $(\varphi, \psi) \in \Phi(\kappa)$

$$\begin{aligned} \min \Gamma &= \min [cvl_e \cos \kappa - b\mu l_s \cos \varphi - a\lambda l_q \cos \psi] \\ l_e &= R_e \cos \kappa^\circ, \quad l_s = (R_s + \gamma) \cos \varphi^\circ, \quad l_q = (R_q + \gamma) \cos \psi^\circ \end{aligned}$$

При фиксированном $\kappa \in K_2$ он достигается на управлениях, удовлетворяющих соотношению

$$(3.5) \quad l_s \operatorname{tg} \varphi = l_q \operatorname{tg} \psi$$

Из равенства (3.5) с учетом (3.3) получим, что в ответ на управление $\kappa \in K_2$ игрока E преследователи должны направить векторы своих скоростей в такую точку M на перпендикуляре A^*O (фиг. 5), чтобы соответствующая фазовая траектория скользила вдоль плоскости $y = 0$. Длину отрезка MO обозначим H .

Очевидно, что максимум по κ в (3.4) достигается при $\cos \kappa \geq 0$, поэтому на отрезке A^*O можно выделить также] точку N ($\|NO\| = L$), в которую «целится» игрок E . Максимальное значение параметра L (обозначим его L^*), допустимое для управлений $\kappa \in K_2$, определим из уравнения (3.3) путем подстановки φ° и ψ°

$$cvL^*/(l_e^2 + L^{*2})^{1/2} = b\mu \sin \varphi^\circ + a\lambda \sin \psi^\circ$$

Если параметр L пробегает значения из отрезка $[0, L^*]$, то H пробегает отрезок $[0, H^0]$, где $H^0 = \|OA^*\|$.

Рассмотрим производную $d\Gamma/dH$. Учитывая, что

$$\sin \varphi = H (l_s^2 + H^2)^{-1/2}, \quad \sin \psi = H (l_q^2 + H^2)^{-1/2}, \quad \sin \kappa = L (l_e^2 + L^2)^{-1/2}$$

получаем

$$d\Gamma/dH = (H - L) (b\mu l_s^2 (l_s^2 + H^2)^{-3/2} + a\lambda l_q^2 (l_q^2 + H^2)^{-3/2})$$

Знак производной определяется знаком выражения $H - L$. Смена знака происходит в точках, где выполняется равенство

$$(3.6) \quad c\nu H (l_e^2 + H^2)^{-1/2} = b\mu H (l_s^2 + H^2)^{-1/2} + a\lambda H (l_q^2 + H^2)^{-1/2}$$

Если это равенство справедливо, то $H = L$ и точки прицеливания для всех игроков совпадают ($M = N$).

Выясним, сколько нулей может иметь уравнение (3.6) на интервале $[0, H^0]$.

В силу соотношений $\nu \leq \mu$, λ и $\gamma > 0$ имеем $l_s > l_e$ (фиг. 4). Сокращая на H и, учитывая, что $c = a + b$, получаем

$$(3.7) \quad a (1/\tau_e - 1/\tau_s) + b (1/\tau_e - 1/\tau_q) = 0$$

Здесь τ_e , τ_s , τ_q — время движения соответствующего объекта до точки $M = N$. В формуле (3.7) оба выражения в скобках положительны, так как $\tau_e < \tau_q$ и $\tau_e < \tau_s$ для любой точки на отрезке A^*O . Поэтому уравнение (3.6) не имеет корней на интервале $[0, H^0]$ (кроме тривиального $H = 0$) и функция Γ монотонно возрастает на том же отрезке (так как $H > L$), достигая максимума в точке $H = H^0$. Можно показать, что при $H = H^0$ и $L = L^*$ имеет место строгое неравенство $\Gamma < 0$.

Справедливость неравенства (3.4), а значит, и u -стабильность программного максимина γ в области D_{21} доказаны.

Вследствие u -стабильности функции программного максимина γ она совпадает с ценой ρ^{21} дифференциальной игры (1.1)–(1.4), причем в области D_{21} взаимодействие игроков S и Q для получения оптимального результата существенно.

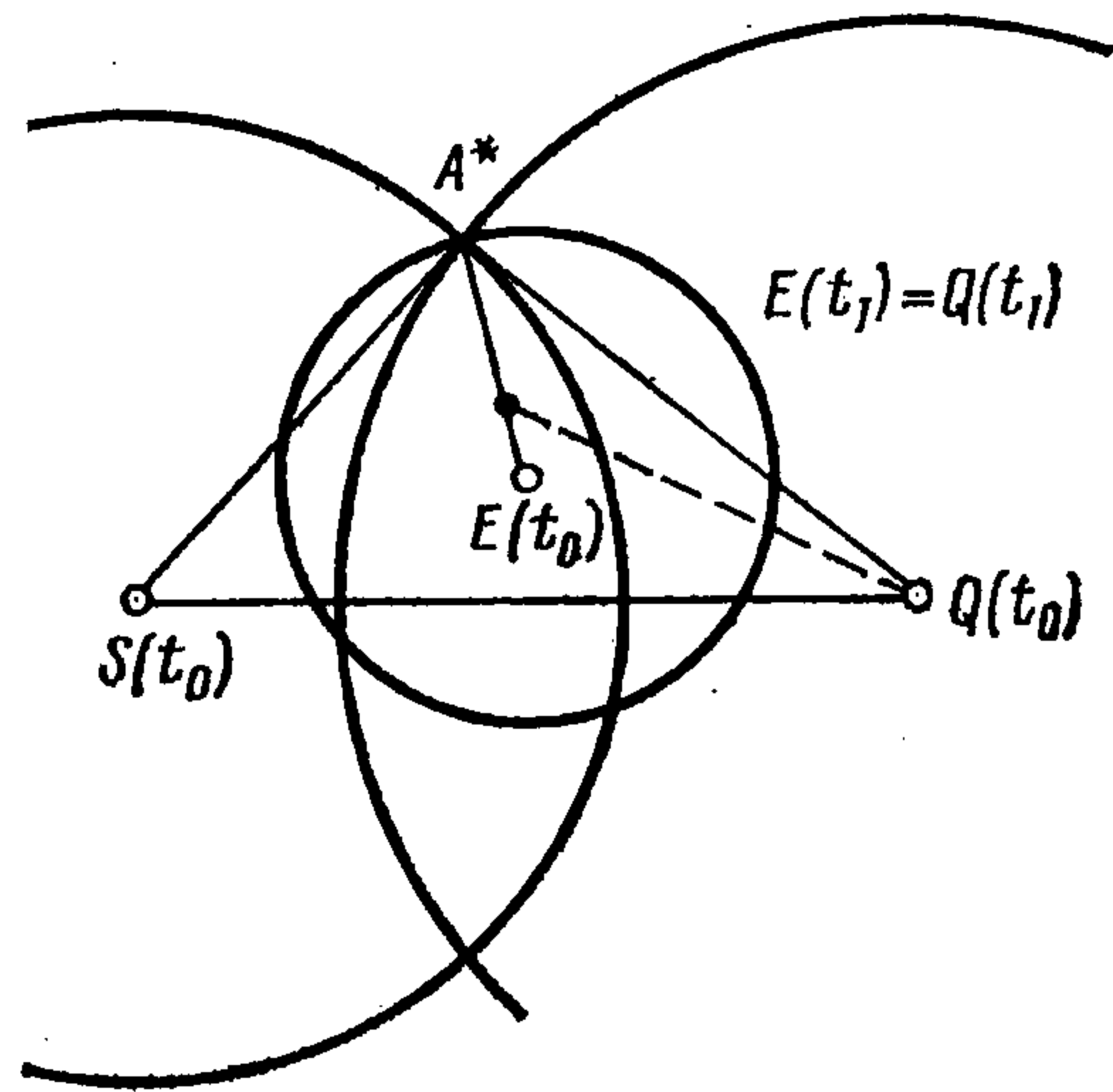
Отметим простоту поведения функции цены игры в фазовом пространстве. Лишь кусок плоскости $y = 0$ (принадлежащий области D_{21}) обладает сингулярными свойствами (рассеивающая поверхность). Во всех остальных точках цена является гладкой.

4. Рассмотрим задачу (1.1)–(1.4) с нефиксированным моментом окончания и определим наименьшее время T , когда области достижимости игроков S и Q полностью покрывают область достижимости E . Если покрытие осуществляется одним преследователем, то игра вырождается в игру «один на один» и время программного поглощения T является временем оптимального быстрогодействия.

Если покрытие осуществляется двумя областями, т. е. $G_s \cup G_q \supset G_e$, то время T будет временем оптимального быстрогодействия и в этом случае.

Действительно, предположим, что в позиции $\{t_0, \zeta_0\} \in D_{21}$ (фиг. 6) игрок E выбирает экстремальное прицеливание [7] в точку A^* на весь отрезок времени $[t_0, T]$. Покажем, что преследователи S и Q не могут осуществить точечный захват раньше, чем в момент $t = T$.

Предположим противное: в некоторый момент $t = t_1 < T$ один из игроков (например, Q) совпал с игроком E ,двигающимся по программной траектории в точку A^* . В силу превосходства в скорости (1.3) игрок Q может попасть в точку A^* к моменту



Фиг. 6

$t = T$. Но тогда

$$\begin{aligned} \|Q(t_0) - Q(t_1)\| + \|Q(T) - Q(t_1)\| &\leq \lambda(t_1 - t_0) + \lambda(T - t_1) = \\ &= \lambda(T - t_0) = R_q \end{aligned}$$

Указанное неравенство при $t_1 < T$ противоречит неравенству треугольника.

Автор благодарит А. Г. Пашкова за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пашков А. Г., Терехов С. Д. Об одной игре оптимального преследования двумя объектами одного // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 898—903.
2. Левченков А. Ю., Пашков А. Г. Игра оптимального сближения двух инерционных объектов с одним безынерционным // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 536—547.
3. Pashkov A. G., Terekhov S. D. A differential game of approach with two pursuers and one evader // J. Optimiz. Theory and Appl. 1987. V. 55. No. 2. P. 303—311.
4. Меликян А. А. Оптимальное взаимодействие двух преследователей в игровой задаче // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1981. № 2. С. 49—56.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 456с.
6. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981. 287с.
7. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука. 1970. 420с.

Москва

Поступила в редакцию
18.V.1987