Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Докучаев Л.В.

На основании подхода А. И. Лурье к описанию немалого движения деформируемой системы [1] методом Кейна [2] выводятся общие уравнения движения упругого летательного аппарата (ЛА) с жидкостью на орбите. Путем обобщения результатов исследований [3—5] с использованием теорем Томсона—Тета—Четаева получены условия асимптотической устойчивости вращения деформируемого ЛА с учетом демпфирования.

Методический подход исследования устойчивости в общем виде изложен в работе [3], на основании которого были получены достаточные условия устойчивости равномерного вращения тонкой упругой оболочки с жидкостью [6].

1. Движение ЛА относительно инерциального пространства может характеризоваться большими величинами перемещений и скоростей, в то время как деформации обычно малы. Введем локально-связанную систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы при малых деформациях относительные перемещения частиц ЛА были малыми. Относительное положение частиц ЛА в недеформированном состоянии определим радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}(x_1, x_2, x_3)$, а в деформированном — радиусом-вектором $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$. Движение связанной системы координат относительно инерциального пространства определяется вектором поступательной скорости $\mathbf{v}_0$ полюса O и вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вращения этой системы относительно ее полюса. Векторы абсолютной скорости и ускорения частицы ЛА выразятся формулами

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_0^{\boldsymbol{\cdot}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} + \mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$$

В упругом теле силы, действующие на элементарный объем dV тела, выражаются через тензор напряжений Θ:

$$\mathbf{f}_e = \operatorname{div} \Theta \, dV \tag{1.2}$$

Аналогичное поле внутренних сил создается силами нормального давления и касательного напряжения жидкости. Массовые силы тяготения, действующие на элементарную массу dm, можно определить приближенной формулой

$$\mathbf{f}_g = \{\mathbf{g} + \Omega^2 [3g^{-2}\mathbf{g}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{g}) - \mathbf{r}]\} \, dm \tag{1.3}$$

где $\mathbf{g}$ — вектор местного ускорения свободного падения, Ω^2 — орбитальная угловая скорость.

Применив принцип Даламбера к элементарной массе dm деформируемого тела, получим уравнение

$$\mathbf{a}\,dm = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_g, \tag{1.4}$$

справедливое и для систем с неголономными связями. Оно должно быть дополнено условием сплошности среды, а также краевыми условиями на стенках полости и на границе упругой среды.

Чтобы составить уравнения движения системы в удобном для интегрирования виде, применяют те или иные виды дискретизации. Обычно решение краевых задач теории упругости и гидродинамики известны лишь для простых конструкций. Поэтому зададимся полной системой функций φ_n, которые являются каким-либо приближением форм свободных колебаний реальной конструкции. Представим относительные перемещения частиц конструкции в виде квадратичного разложения в ряд [1]

$$\mathbf{u} = \varphi_n(x_1, x_2, x_3)\, q_n(t) + {}^1/_2\, \varphi_{nm}(x_1, x_2, x_3)\, q_n(t)\, q_m(t) \tag{1.5}$$

где функции φ_{nm} выражаются каким-либо способом через φ_n.

Попытка объединить физическую наглядность принципа Даламбера с процедурой автоматического исключения реакции связей в уравнениях Лагранжа второго рода была предпринята Кейном [2]. Способ составления уравнений движения методом Кейна прост и обладает преимуществами в случае неголономных систем, так как не требует введения неопределенных множителей Лагранжа. В линейном случае он совпадает с методом Бубнова — Галеркина.

Пусть движение системы определяется квазикоординатами π_k, определяющими как поступательное и вращательное движение всей системы, так и ее деформации. Вектор, представляющий коэффициент при квазискорости $\pi_k^{\cdot}$, называется парциальной скоростью квазикоординаты π_k. Она может быть определена из (1.1), (1.5) как частная производная от величины v по квазискорости $\pi_k^{\cdot}$. Затем скалярно левая и правая части уравнения (1.4) умножаются на соответствующую скорость и интегрируются по всему объему V, занимаемому частицами системы. Объединяя три уравнения для квазикоординат поступательного движения, получим векторное уравнение сил, а для квазикоординат вращательного движения — векторное уравнение моментов. Для остальных координат получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Если ввести вектор кажущегося ускорения j, то уравнение движения деформируемой системы примет вид

$$\begin{gathered}
m\mathbf{j} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) + \boldsymbol{\omega}^{\cdot} \times \mathbf{L} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}^{\cdot} + \mathbf{L}^{\cdot\cdot} = \mathbf{P} + \\
+ \Omega^2 [3g^{-2}\mathbf{g}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{g}) - \mathbf{L}] \\
(J\cdot\boldsymbol{\omega})^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times (J\cdot\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{L} \times \mathbf{j} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}^* + \mathbf{G}^{*\cdot} = \\
= \mathbf{M} + 3\Omega^2 g^{-2} [\mathbf{g} \times (J\cdot\mathbf{g})] \\
(\mu_{nm} q_m^{\cdot})^{\cdot} + c_{nm} q_m + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial q_n}\cdot\mathbf{j} - {}^1/_2\, \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial J}{\partial q_n}\cdot\boldsymbol{\omega} + \\
+ \left(\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial q_n^{\cdot}}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)^{\cdot} - \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\partial \mathbf{G}^*}{\partial q_n} - {}^1/_2\, \frac{\partial \mu_{nm}}{\partial q_n} q_n^{\cdot} q_m^{\cdot} = \\
= Q_n + {}^1/_2\, \Omega^2 [3g^{-2}\mathbf{g}\cdot(J\cdot\mathbf{g}) - \operatorname{tr} J] \\
(\mathbf{j} = \mathbf{v}_0^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - \mathbf{g}; \quad n, m = 1, 2, \ldots)
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь приняты следующие обозначения для разложений по координате q_n выражений статического момента $\mathbf{L}$, тензора инерции J, вектора кинетического момента $\mathbf{G}^*$ и кинетической энергии T^* относительного движения

$$\begin{gathered}
\mathbf{L} = \int \mathbf{r}\, dm = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_{0n} q_n + {}^1/_2\, \mathbf{L}_{nm} q_n q_m \\
J = \int [(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) E - \mathbf{r} : \mathbf{r}]\, dm = J_0 + (J_{0n} + J_{0n}^T)\, q_n + J_{nm} q_n q_m \\
\mathbf{G}^* = \int \mathbf{r} \times \mathbf{u}^{\cdot}\, dm = (\mathbf{G}_{0n} + \mathbf{G}_{nm} q_m)\, q_n^{\cdot} \\
T^* = {}^1/_2 \int \mathbf{u}^{\cdot}\cdot\mathbf{u}^{\cdot}\, dm = {}^1/_2\, \mu_{nm} q_n^{\cdot} q_m^{\cdot} = \\
= {}^1/_2\, (a_{nm} + \mu_{nmk} q_k + \mu_{nmkl} q_k q_l)\, q_n^{\cdot} q_m^{\cdot}
\end{gathered} \tag{1.7}$$

При этом везде применяется тензорная запись суммирования по немым индексам, а диадное произведение векторов обозначается двоеточием. Внешние силы, моменты и обобщенные силы обозначены **P**, **M**, Q_n соответственно. Коэффициенты c_{nm} определяются жесткостью упругой конструкции, m — масса всей деформируемой системы.

2. Будем исследовать устойчивость стационарного вращения свободной деформируемой системы. В качестве функции Ляпунова для голономной системы можно использовать гамильтониан, состоящий из суммы кинетической энергии и измененной потенциальной энергии. Было доказано [3], что возмущенное движение асимптотически стремится к стационарному вращению; если измененная потенциальная энергия имеет изолированный минимум, диссипация является полной. Устойчивость стационарного вращения системы без диссипации, т. е. гироскопическая стабилизация, может быть осуществлена и при отсутствии минимума, если число отрицательных коэффициентов устойчивости Пуанкаре четное.

Диссипативные силы в механической системе учитываются правыми частями уравнений (1.6). Если диссипация является полной, то гамильтониан системы — строго убывающая функция. Однако для свободной конструкции диссипативная функция, определяемая внутренним рассеиванием энергии при деформациях, является лишь полуопределенной функцией.

Путем использования первых интегралов для кинетического момента было показано [4], что в свободной механической системе осуществляется полное (распространяющееся) демпфирование относительно всех нециклических координат, так как не существует таких возмущенных траекторий в окрестности стационарного вращения, при которых рассеивание энергии тождественно отсутствовало бы. Следовательно, согласно теореме Н. Н. Красовского, об устойчивости стационарного вращения механической системы с демпфированием можно судить по положительной определенности измененной потенциальной энергии.

Представим любой вектор в виде произведения трехмерной строки ортов системы координат $Ox_1x_2x_3$ на матрицу-столбец его трех компонент по осям этой системы. Введем вместо векторов **r**, **ω**, **j**, **P**, **M**, **L**, **G*** и т. д. трехмерные матрицы-столбцы r, ω, j, P, M, L, G^*, вместо тензорных величин J — квадратные матрицы J. Обозначим бесконечномерные столбцы, состоящие из координат q_n, L_{0n}, Q_n, G_{0n}, J_{0n}, через q, L_1, Q, G_1, J_1, а бесконечномерные квадратные матрицы с компонентами a_{nm}, c_{nm}, L_{nm}, G_{nm}, J_{nm} — через A, C, L_2, G_2, J_2 соответственно. Пренебрегая нелинейными членами относительно малых величин деформаций, систему уравнений (1.6) можно представить в матричной форме

$$
\begin{gathered}
mj - L^b\omega^{\cdot} + \omega^b(\omega^b L) + 2\omega L^{\cdot} + L^{\cdot\cdot} = P \\
(J\omega)^{\cdot} + L^b j + \omega^b(J\omega) + \omega^b G^* + G^{*\cdot} = M \\
Aq^{\cdot\cdot} + Cq + j^T\frac{\partial L}{\partial q} - {}^1/_2\,\omega^T\frac{\partial J}{\partial q}\omega + \omega^{\cdot T}\frac{\partial G^*}{\partial q^{\cdot}} + 2\omega^T\frac{\partial G^*}{\partial q} = Q
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

Индексом b обозначена кососимметрическая матрица, образованная по правилу, соответствующему векторному произведению.

В случае стационарного вращения при отсутствии внешних сил, кроме диссипативных, эту систему можно линеаризовать относительно возмущений обобщенных координат. Выберем связанную систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что ее начало совпадает с центром масс недеформированного тела, а оси направлены по его главным осям инерции. Угловую скорость стационарного вращения ω_0 считаем конечной величиной, направленной по оси Ox_1, а все остальные координаты — малыми. Введем обозначения для компонент на оси координат следующих матриц:

$$(2.2)\qquad L_1 = \begin{Vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Vmatrix}, \quad G_1 = \begin{Vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Vmatrix}, \quad G_2 = \begin{Vmatrix} g_{01} \\ g_{02} \\ g_{03} \end{Vmatrix}, \quad \omega = \begin{Vmatrix} \omega_0 + \omega_1{}^* \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Vmatrix}$$

$$J_1 = \| d_{kl} \|, \quad J = \| d_{0kl} \|$$

Исключая кажущееся ускорение j, циклическую координату $\omega_1{}^*$, получим систему уравнений возмущенного движения относительной переменной $z^T = \| \omega_2\omega_3 q \|$ в матричном виде

$$(2.3)\qquad M_0 z^{\cdot\cdot} + G_0 z^{\cdot} + K_0 z = -F_0 z^{\cdot}$$

При этом квадратные матрицы определяются скалярными коэффициентами уравнений движения (1.6) или (2.1)

$$(2.4)\qquad M_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & g_2{}^T \\ 0 & 0 & g_3{}^T \\ 0 & 0 & A_* \end{Vmatrix}, \quad K_0 = \omega_0{}^4 \begin{Vmatrix} 0 & J_{11} - J_{33} & -d_{13}{}^T \\ J_{22} - J_{11} & 0 & d_{12}{}^T \\ -d_{12} & -d_{13} & C_* \end{Vmatrix}$$

$$G_0 = \omega_0 \begin{Vmatrix} J_{22} & 0 & d_{12}{}^T - g_3{}^T \\ 0 & J_{33} & d_{13}{}^T + g_2{}^T \\ g_2 & g_3 & G_* \end{Vmatrix}, \quad F_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{Vmatrix}$$

$$(2.5)\qquad A_* = A - \frac{L_1 L_1{}^T}{m} - \frac{g_1 g_1{}^T}{J_{11}}$$

$$C_* = \frac{C}{\omega_0{}^2} - d_{011} + \frac{l_2 l_2{}^T + l_3 l_3{}^T}{m} + \frac{d_{11} d_{11}{}^T}{J_{11}}$$

$$G_* = g_{01}{}^T - g_{01} + 2\frac{l_3 l_2{}^T - l_2 l_3{}^T}{m} + \frac{g_1 d_{11}{}^T - d_{11} g_1{}^T}{J_{11}}$$

Система уравнений (2.3) записана относительно квазикоординат, и ее матрицы не обладают должной симметрией. Если от квазикоординат перейти к обобщенным координатам θ_k типа углов Кардана по формулам

$$(2.6)\qquad \omega_1 = \omega_0 + \theta_1{}^{\cdot}, \quad \omega_2 = \theta_2{}^{\cdot} - \omega_0\theta_3, \quad \omega_3 = \theta_3{}^{\cdot} + \omega_0\theta_2$$

то относительно новой переменной $y^T = \| \theta_2\theta_3 q \|$ получим линеаризированную систему уравнений Лагранжа второго рода

$$(2.7)\qquad M_1 y^{\cdot\cdot} + G_1 y^{\cdot} + F_1 y^{\cdot} + K y = 0$$

$$(2.8)\qquad M_1 = \begin{Vmatrix} J_{22} & 0 & g_2{}^T \\ 0 & J_{33} & g_3{}^T \\ g_2 & g_3 & A_* \end{Vmatrix}, \quad K_1 = \omega_0{}^6 \begin{Vmatrix} J_{11} - J_{33} & 0 & -d_{13}{}^T \\ 0 & J_{11} - J_{22} & d_{12}{}^T \\ -d_{13} & d_{12} & C_* \end{Vmatrix}$$

$$G_1 = \omega_0{}^3 \begin{Vmatrix} 0 & J_{11} - J_{22} - J_{33} & d_{12}{}^T - g_3{}^T \\ J_{33} + J_{22} - J_{11} & 0 & d_{13}{}^T + g_2{}^T \\ -(d_{12} - g_{13}) & -(d_{13} + g_2) & G_* \end{Vmatrix}, \quad F_1 = F_0$$

По теоремам Томсона — Тета — Четаева, если M_1 — симметричная положительно-определенная матрица, G_1 — кососимметричная, F_1 — симметричная неотрицательная, но обладающая свойством полной диссипации, K_1 — симметричная матрица, то нулевое решение системы (2.7) асимптотически устойчиво при положительной определенности K_1 и неустойчиво, если K_1 имеет отрицательные собственные значения вне зависимости от G_1 и F_1. Матрица K_1 — гессиан измененной потенциальной энергии. Поэтому условие положительной определенности K_1 совпадает с условием минимума измененной потенциальной энергии. Полноту демпфирования в линейной системе (2.7) с полуопределенной матрицей F_1 можно определить по свойству управляемости этой системы. Чтобы демпфирование было полным, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости был полным.

Все теоремы об устойчивости нулевого решения линеаризованной системы (2.7) автоматически переносятся на нулевое решение системы (2.3), поскольку переменные y и z связаны неособым линейным преобразованием (2.6). Из формул (2.4) и (2.8) видно, что если в матрице K_0 поменять местами первый и второй столбец, то она с точностью до постоянного множителя ω_0^2 совпадет с матрицей K_1. Следовательно, определить матрицы K_1 с точностью до постоянного множителя ω_0^2 совпадет с определителем матрицы K_0.

Для асимптотической устойчивости требуется положительная определенность матрицы K_1, а по критерию Сильвестра это означает, что все ее главные диагональные миноры должны быть положительными. Первый и второй верхние миноры дают необходимое условие устойчивости вращения деформируемой системы относительно ее главной оси максимального момента инерции в невозмущенном состоянии. Все нижние главные миноры, определяемые матрицей C_*, положительны в силу консервативности упругой системы, у которой потенциальная энергия деформации является положительно-определенной формой.

Матрицу K_1 можно разбить на блоки:

$$K_1 = \begin{Vmatrix} \Delta & D^T \\ D & C_* \end{Vmatrix}, \quad \Delta = \begin{Vmatrix} J_{11} - J_{33} & 0 \\ 0 & J_{11} - J_{22} \end{Vmatrix}, \quad D = \| -d_{13} d_{12} \| \tag{2.9}$$

Ввиду того что матрица C_* квадратная и неособенная, она имеет обратную матрицу C_*^{-1}. Поэтому вычисление определителя матрицы K_1 можно свести к вычислению определителей более низкого порядка:

$$\det K_1 = \det \begin{Vmatrix} \Delta - D^T C_*^{-1} D & 0 \\ D & C_* \end{Vmatrix} = \det C_* \det (\Delta - D^T C_*^{-1} D) \tag{2.10}$$

Первый сомножитель $\det C_*$ — положительная величина. Поэтому знак $\det K_1$ совпадает со знаком второго сомножителя в (2.10). Точно так же два на единицу меньших главных минора матрицы K_1 будут иметь аналогичное представление в виде двух сомножителей, первый из которых положителен.

Если потенциальная энергия деформации выражена через главные формы вращающейся конструкции, то матрицы C_* и C_*^{-1} имеют диагональный вид. В этом случае согласно обозначениям (2.2) имеем следующие тождества:

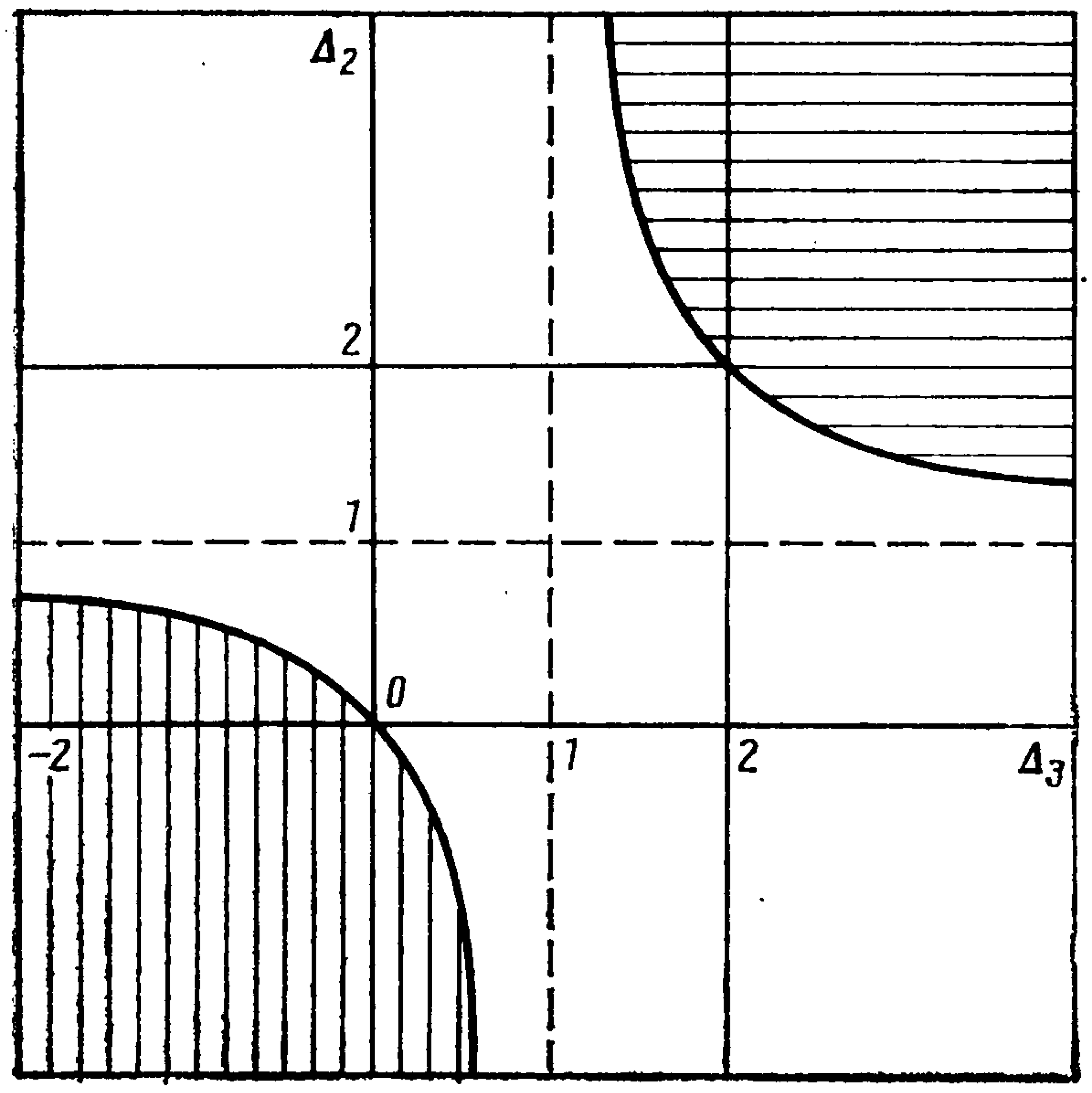
$$d_{12}{}^T C_*^{-1} d_{12} = \frac{(d_{12}{}^n)^2}{c_{nn}} = t_2, \quad d_{13}{}^T C_*^{-1} d_{13} = \frac{(d_{13}{}^n)^2}{c_{nn}} = t_3 \tag{2.11}$$

Вводя обозначения

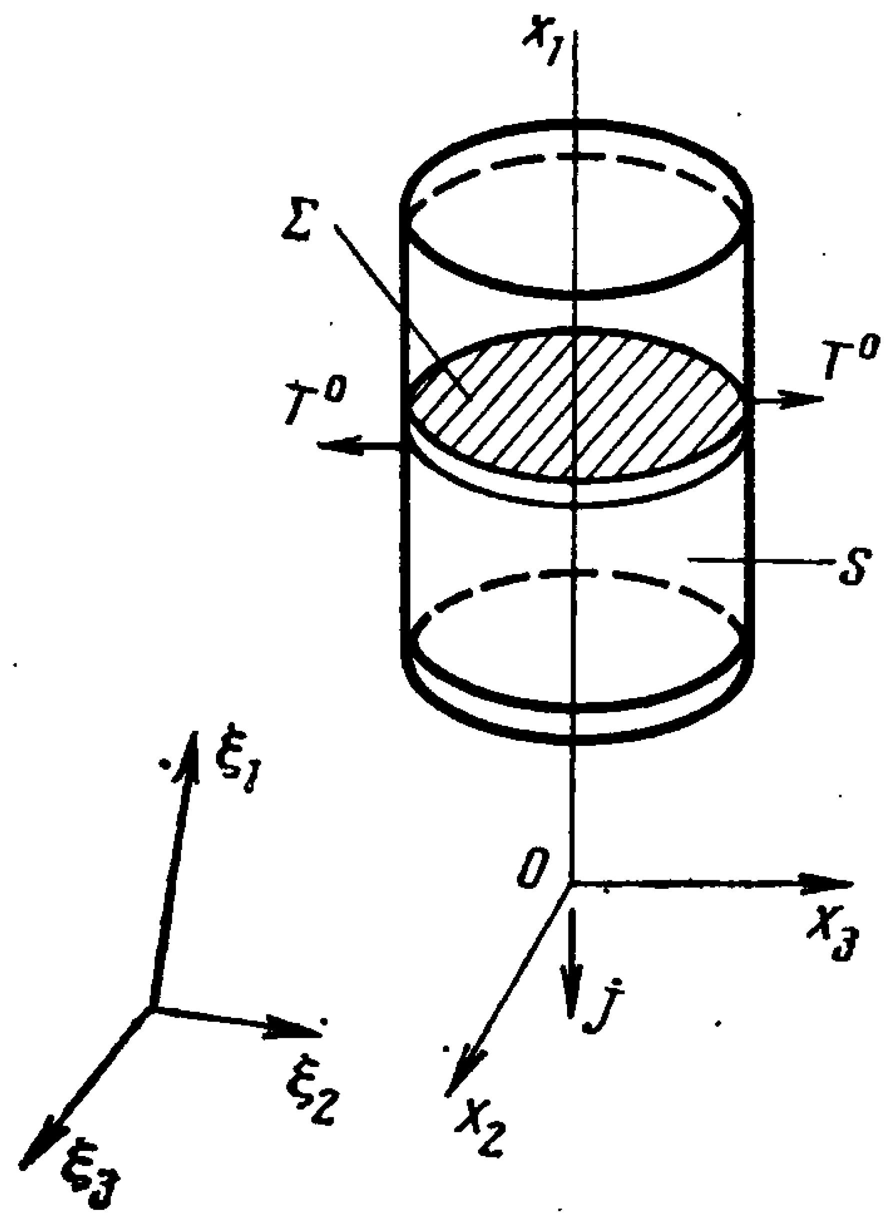
$$\Delta_2 = \frac{J_{11} - J_{22}}{t_2}, \quad \Delta_3 = \frac{J_{11} - J_{33}}{t_3}, \quad t = \frac{1}{t_2 t_3} \left(\frac{d_{12}{}^n d_{13}{}^n}{c_{nn}} \right)^2 \tag{2.12}$$

получим условие устойчивости в виде

$$\Delta_2 > 0, \ \Delta_3 > 0, \ \Delta_2 > 1, \ \Delta_3 > 1 \ (\Delta_2 - 1)(\Delta_3 - 1) - t > 0 \tag{2.13}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Из неравенства Коши — Буняковского следует, что неотрицательная величина t всегда меньше или равна единице. Знак равенства выполняется при $d_{12} = d_{13}$.

На фиг. 1 в плоскости параметров Δ_2, Δ_3 область асимптотической устойчивости (показана горизонтальной штриховкой) расположена выше кривой *1* и соответствует последнему условию (2.13). Первые два неравенства, определяющие область первого квадранта, и следующие два, определяющие область внутри этого квадранта, заведомо выполняются в заштрихованной области выше кривой *1*. Явная форма рядов (2.11), (2.12), входящих в достаточное условие устойчивости (2.13), позволяет оценить непосредственно ошибки усечения высших тонов упругих колебаний в исходной системе уравнений движения. При отбрасывании высших тонов область устойчивости будет несколько шире на величину, определяемую ошибками вычисления величин t_2 и t_3.

С другой стороны, применяя к исходной системе (2.3) критерий Рауса — Гурвица, получим, что необходимым условием асимптотической устойчивости является положительность свободного члена характеристического уравнения, который равен $\det K_0 \equiv \omega^{-2} \det K_1$. Для обеспечения достаточных условий асимптотической устойчивости необходима еще положительность всех главных миноров определителя Гурвица, которые имеют довольно громоздкий вид уже при учете трех степеней свободы. Выше было доказано, что в случае свободных механических систем с распространяющимся демпфированием и гамильтонианом, не зависящим явно от времени, условие $\det K_1 > 0$, а следовательно, и условие $\det K_0 > 0$ является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости стационарного вращения деформируемой системы.

Этот факт был доказан и непосредственно путем определения знаков коэффициентов при старших членах полиномов ряда Штурма в частном случае осесимметричной конструкции с четырьмя радиальными штангами при учете низшего тона упругих колебаний [7]. Физический смысл границ области устойчивости (кривая *1* на фиг. 1) заключается в том, что вращение деформируемой системы будет устойчивым не просто относительно оси максимального момента инерции, а при условии, что этот момент превышает остальные главные моменты инерции на некоторую величину, определяемую упругими характеристиками системы. Эта величина стремится к нулю, если жесткость C системы бесконечно увеличивается, если скорость вращения ω_0 уменьшается и, наконец, если коэффициенты инерционной связи d_{12}, d_{13} малы, например, из-за малой массы и размеров деформируемых элементов.

Помимо области асимптотической устойчивости, если в упругом теле не происходит заметных потерь энергии, может существовать область временной гироскопической стабилизации, которая в отличие от вековой асимптотической устойчивости разрушается на бесконечном интервале времени. Необходимым условием гироскопической стабилизации является четность отрицательных корней матрицы консервативных сил K_1. На фиг. 1 область гироскопической стабилизации показана вертикальной штриховкой ниже кривой *2*. В реальной механической системе даже малые диссипативные силы с течением времени разрушают эту область. Если система неконсервативна, то в области гироскопической устойчивости могут появиться области сильной неустойчивости. Пример таких областей для случая вихревого движения жидкости, целиком заполняющей цилиндрический вращающийся сосуд, приведен в [8].

3. В качестве примера (фиг. 2) рассмотрим устойчивость вращения тела с осесимметричной полостью, наполненной идеальной несжимаемой жидкостью, на свободной поверхности Σ которой расположена круглая пластина, обладающая изгибной жесткостью D° и натяжением в срединной поверхности T°. Предположим, что продольная ось тела Ox_1 — ось симметрии полости, вдоль которой может действовать перегрузка j_1. Течение жидкости предполагается потенциальным. В этом случае потенциал скоростей жидкости Φ и деформация пластины u удовлетворяют следующей системе краевых задач:

$$\nabla^2\Phi = 0,\ \partial\Phi/\partial\nu\,|_S = (r\times\nu)\cdot\omega,\ \partial\Phi/\partial\nu\,|_\Sigma = du/dt + (r\times\nu)\cdot\omega \tag{3.1}$$

$$\rho^\circ\delta^\circ\partial^2u/\partial t^2 + D^\circ\nabla^2\nabla^2u - T^\circ\nabla^2u = -\rho^1\,[\partial\Phi/\partial t + j_1x_1 + {}^1/_2\,(\nabla\Phi)^2 - (\omega\times r)\cdot\nabla\Phi + c\,(t)]$$

$$u\,|_{\Gamma_*} = 0,\ \partial u/\partial n\,|_{\Gamma_*} = 0,\ u\,|_\Sigma < \infty,\ \nabla u\,|_\Sigma < \infty$$

Здесь для определенности приняты условия жесткого защемления: ν — орт внешней нормали к поверхности жидкости $S+\Sigma$, где S — смоченная поверхность полости; n — орт внешней нормали к контуру пластины Γ_*, ρ°, δ° — плотность и толщина пластины, ρ^1 — плотность жидкости.

При исследовании свободных колебаний жидкости в поле массовых сил возникает краевая задача

$$\nabla^2\varphi = 0,\ \partial\varphi/\partial\nu\,|_S = 0,\ \partial\varphi/\partial\nu\,|_\Sigma = \varkappa\varphi \tag{3.2}$$

Эта задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений $\varkappa_i$ и соответствующую ему полную систему функций φ_i, ортогональных на Σ. Раскладывая в ряд по этой системе функций решение однородной линейной задачи (3.1) в случае неподвижной полости, получим формы свободных гидроупругих колебаний пластины в виде [9]

$$v_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_{in}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu},\quad b_{in} = \frac{C_2E_{1i}{}^\circ - C_1E_{2i}{}^\circ}{(\omega_n{}^2 - \alpha_{in})(C_2B_1 - C_1B_2)}\,\alpha_{in} \tag{3.3}$$

$$C_l = \frac{\partial v_l{}^\circ}{\partial n}\Big|_{\Gamma_*},\quad E_{li}{}^\circ = \frac{1}{N_i{}^2}\int v_l{}^\circ\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}\,ds$$

$$N_i{}^2 = \int_\Sigma\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}\right)^2 ds,\quad B_l = v_l{}^\circ\,|_{\Gamma_*}\quad (l = 1,\ 2)$$

$$\alpha_{in} = [D^\circ\nabla^2\nabla^2\varphi_i - T^\circ\nabla^2\varphi_i + (\rho^1j_1 - \rho^\circ\delta^\circ\omega_n{}^2)\varphi_i]/\rho^1\varphi_i$$

Здесь v_l° — два независимых решения однородного уравнения колебаний пластины, а частота колебаний ω_n является k-м корнем характеристического уравнения

$$(3.4)\qquad 1-\omega_n^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_i^*b_{in}}{\alpha_{in}}+\frac{\omega_n^2}{C_2B_1-C_1B_2}[(B_2-\omega_n^2\Sigma_{B2})\Sigma_{C1}-$$
$$-(B_1-\omega_n^2\Sigma_{B1})\Sigma_{C2}]=0$$

$$(3.5)\qquad \sum_{Al}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{A_i^*E_{li}^\circ}{\omega_n^2-\alpha_{in}}\qquad (A=B,\ C;\quad l=1,\ 2)$$
$$B_i^*=\varkappa_i\varphi_i\,|_{\Gamma_*},\quad C_i^*=\varkappa_i\partial\varphi_i\mid\partial n\,|_{\Gamma_*}$$

Используя собственные функции v_n, можно построить решение системы уравнений в частных производных (3.1) и для случая подвижной полости

$$(3.6)\qquad u=v_n(x_2,\ x_3)p_n(t)$$
$$\Phi=(\Omega_0+\Omega_n p_n+\Omega_{nm}p_np_m)\cdot\omega+\varphi_i b_{in}p_n^{\cdot}$$

где компоненты вектора Ω_0 — потенциалы Жуковского, а функции Ω_n, Ω_{nm} определяются нелинейными членами системы (3.1). Соответствующие краевые задачи и их решения можно найти в [10]. Предполагая, что масса жидкости значительно превосходит массу пластины, выражения (1.8) получим в виде

$$(3.7)\qquad L_{0n}=b_{in}\lambda_i,\quad G_{0n}=b_{in}\lambda_{0i},\quad G_{nm}=b_{in}b_{jm}\lambda_{ij}$$
$$J_{0n}=b_{in}J_i,\quad J_{nm}=b_{in}b_{jm}J_{ij},\quad a_{nm}=b_{in}b_{jm}\mu_i\delta_{ij}$$

где b_{in} берутся из (3.3), а остальные гидродинамические характеристики полости определены в работе [10].

В случае полости вращения колебания жидкости и пластины распадаются на две группы: одни симметричны относительно плоскости Ox_1x_2, а другие — относительно плоскости Ox_1x_3. Пусть первые N форм v_n и соответствующие им $\varphi_i^{(p)}$ в формулах (3.6) — четные функции относительно оси Ox_2, а следующие формы v_{N+n} и соответствующие им $\varphi_i^{(q)}$ — четные относительно оси Ox_3. Оставим обозначения в первой группе обобщенных координат p_n $(n\leqslant N)$, а во второй группе координаты p_{N+n} переобозначим через q_n $(n<N)$. Входящие в формулы (3.7) ненулевые коэффициенты (учитываем свойства симметрии) будут такими:

$$(3.8)\qquad \lambda_i=(\lambda_i^p)_3=(\lambda_i^q)_2,\quad \mu_i=(\lambda_{ii}^{pq})_1=-(\lambda_{ii}^{qp})_1=(J_{ii}^{pp})_{11}=(J_{ii}^{qq})_{11}$$
$$\lambda_{0i}=-(\lambda_{0i}^p)_2=(\lambda_{0i}^q)_3=-(J_i^p)_{13}=-(J_i^p)_{31}=-(J_i^q)_{12}=-(J_i^q)_{21}$$

Ненулевые элементы матриц (2.2) согласно формулам (3.7) и (3.8) примут вид

$$(3.9)\qquad l_2^{N+n}=l_3^n=b_{in}\lambda_i$$
$$g_3^{N+n}=-g_2^n=-d_{31}^n=-d_{12}^{N+n}=-d_{21}^{N+n}=b_{in}\lambda_{0i}$$
$$a_{nm}=g_{01}^{n,\ N+m}=-g_{01}^{N+m,\ n}=d_{011}^{n,\ m}=d_{011}^{N+n,\ N+m}=b_{in}b_{im}\mu_i$$

Подставляя эти формулы в уравнения (2.3) и учитывая условия ортогональности, видим, что уравнения моментов относительно продольной оси и уравнение сил в направлении этой оси вырождаются и отщепляются. Если тензор инерции тела также обладает осевой симметрией, то, вводя обозначения

$$(3.10)\qquad J_{22}=J_{33}=J,\ r_n=p_n-iq_n,\ \omega=\omega_2+i\omega_3,\ j=j_3-ij_2$$

систему уравнений (2.3) можно представить в комплексном виде

$$(3.11)\qquad J\omega^{\cdot}-i(J_{11}-J)\omega_0\omega-b_{in}\lambda_{0i}(r_n^{\cdot\cdot}+2i\omega_0r_n^{\cdot}-\omega_0^2r_n)=0$$
$$b_{im}b_{in}\mu_i\{(1-\chi)(r_m^{\cdot\cdot}+2i\omega_0r_m^{\cdot})+[\omega_m^2-(1-\chi)\omega_0^2]r_m\}-$$
$$-b_{in}\lambda_{0i}(\omega^{\cdot}+i\omega_0\omega)=0$$
$$\chi=b_{jn}b_{in}\lambda_j\lambda_i/(mb_{im}b_{in}\mu_i)$$

Ввиду того что в формулах (2.12) коэффициент $t\equiv 0$, необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости (2.13) в данном случае упрощается. Если учесть свойство ортогональности форм упругих колебаний пластины и пренебречь недиагональными членами в (3.11), то для устойчивости вращения тела с жидкостью и пластиной достаточно выполнение следующего неравенства:

$$J_{11} - J > \frac{(b_{in}\lambda_{0i})^2}{b_{in}^2 \mu_i [\omega_n^2 - (1 - \chi) \omega_0^2]} \tag{3.12}$$

Коэффициенты λ_{0i}, μ_i, λ_i определяются решениями линейной краевой задачи (3.2), а коэффициенты b_{in}, ω_n^2 — формулами (3.3), (3.4). Предполагается, что угловая скорость вращения ω_0 меньше любой частоты упругих колебаний пластины ω_n. В случае цилиндрической полости были получены [9] численные значения частот ω_n и остальных коэффициентов, входящих в условия (3.12), для разных изгибных жесткостей, сил натяжения и перегрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.
2. *Kane T. R., Levinson D. A.* Formulation of equations of motion for complex spacecraft // J. Guidance and Contr. 1980. V. 3. No. 2. P. 99—112.
3. *Румянцев В. В.* О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 945—957.
4. *Pringle R.* On the stability of a body with connected moving parts // AIAA Journal. 1966. V. 4. No. 8. P. 1395—1404.
5. *Samin J. C., Willems P. V.* On the attitude dynamics of spinning deformable systems // AIAA Journal. 1975. V. 13. No. 6. P. 812—817.
6. *Рубановский В. Н.* Устойчивость стационарных движений твердого тела с упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 543—552.
7. *Докучаев Л. В.* Построение областей устойчивого вращения космического аппарата с упругими штангами // Космич. исследования. 1969. Т. 7. Вып. 4. С. 534—546.
8. *Докучаев Л. В., Рвалов Р. В.* Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 2. С. 6—14.
9. *Докучаев Л. В.* О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана // Строит. механика и расчет сооружений. 1972. № 1. С. 49—54.
10. *Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение. 1977. 208 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1986