

ЛИТЕРАТУРА

1. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука. 1981. 366 с.
2. Должанский Ф. В. Лабораторное исследование устойчивости движения жидкости в эллипсоидальной полости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1972. Т. 8. № 6. С. 661—664.
3. Гледзер Е. Б., Новиков Ю. В., Обухов А. М., Чусов М. А. Исследование устойчивости движения жидкости внутри трехосного эллипсоида // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1974. Т. 10. № 2. С. 115—118.
4. Гледзер Е. Б., Новиков Ю. В. Оценка характеристик нестационарного движения жидкости в эллипсоидальной полости на основе измерения моментов сил // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1973. Т. 9. № 10. С. 1088—1091.
5. Гелиз А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия. М.: Наука. 1978. 400 с.
6. Леонов Г. А. О глобальной устойчивости системы Лоренца // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 861—863.
7. Леонов Г. А. Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17. № 1. С. 91—112.
8. Сонечкин Д. М. Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеиздат. 1984. 280 с.
9. Leonov G. A., Bunin A. I., Abramovich S. M. Global Stability of the Lorenz System // Nonlinear and Turbulent Process in Physics. V. 3. Gordon and Breach, Harward Academic Publishers. 1984. New York. P. 75—77.
10. Должанский Ф. В., Плешанова Л. А. Автоколебания и явления неустойчивости в простейшей модели конвекции // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15. № 1. С. 17—28.
11. Глуховский А. Б., Должанский Ф. В. Трехмодовые геострофические модели конвекции вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16. № 5. С. 451—462.
12. Нейштадт А. И. Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 30—36.
13. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967. 472 с.
14. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука. 1971. 894 с.
15. Marzec S. J., Spigel E. A. Ordinary differential equations with strange attractors // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 38. № 3. P. 403—421.
16. Якубович В. А. Методы теории абсолютной устойчивости // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под. ред. Р. А. Нелепина. М.: Наука. 1975. С. 74—180.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.X.1986

УДК 539.3:534.1

РЕАКЦИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Фильштынский Л. А., Хижняк Л. А.

Строится решение уравнений движения бесконечной, цилиндрической пьезокерамической оболочки, лицевые поверхности которой не покрыты электродами и нагружены периодической системой сосредоточенных сил, гармонически изменяющихся во времени. Для этого используется метод функций Грина. Выделение единственного решения в случае регулярных корней дисперсионного уравнения производится на основе принципа предельного поглощения. Нерегулярные корни определяют спектр резонансных частот. Проводится аналитический и численный анализ корней дисперсионного уравнения. Дается качественная картина волнового процесса. Приводятся результаты расчета амплитудно-частотных характеристик перемещения и потенциала электрического поля, а также сравнение с неэлектрической оболочкой. Свободные колебания пьезокерамических оболочек рассмотрены в [1, 2], вынужденные — в [3, 4].

1. Рассмотрим отнесенную к ортогональным координатам α , β , z цилиндрическую пьезокерамическую оболочку, поляризованную вдоль координаты α , нагруженную периодической по β системой гармонически изменяющихся во времени сосредоточенных

сил. Лицевые поверхности оболочки свободны от электродов и граничат с вакуумом. Уравнения установившихся колебаний такой оболочки при учете уравнений состояния [5] имеют вид

$$(1.1) \quad L_{ij}u_j = P_i \delta(\alpha, \beta) + \delta_i \rho h \omega^2 u_i \\ \delta_1 = \delta_2 = -1, \delta_3 = 1, \delta_4 = 0, i, j = 1, 2, 3, 4$$

Здесь $u_j(\alpha, \beta)$ — амплитуды перемещений ($j = 1, 2, 3$), $u_4 = \varphi(\alpha, \beta)$ — потенциал электрического поля в оболочке, $\delta(\alpha, \beta)$ — двумерная функция Дирака, ω — частота, ρ, h — плотность материала и толщина оболочки, P_i — амплитуда соответствующей сосредоточенной силы. Дифференциальные операторы L_{ij} выписаны в [6], причем фигурирующие в них коэффициенты имеют вид

$$c_{33} = c_{33}^E [1 - (c_{13}^E)^2 / (c_{11}^E c_{33}^E)] \\ c_{13} = c_{13}^E [1 - c_{12}^E / c_{11}^E], \quad c_{11} = c_{11}^E [1 - (c_{12}^E / c_{11}^E)^2] \\ e_{31} = e_{31}^* [1 - c_{12}^E / c_{11}^E], \quad e_{15} = e_{15}^* \\ e_{33} = e_{33}^* [1 - e_{31}^* c_{13}^E / (e_{33}^* c_{11}^E)], \quad c_{44} = c_{44}^E \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^s [1 + (e_{31}^*)^2 / (c_{11}^E \varepsilon_{33}^s)], \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^s$$

Здесь c_{ij}^E — коэффициенты упругости пьезокерамики при нулевом электрическом поле, $\varepsilon_{11}^s, \varepsilon_{33}^s$ — диэлектрические проницаемости при нулевых напряжениях, e_{ij}^* — пьезоэлектрические модули.

При выводе уравнений (1.1) помимо механических гипотез Кирхгофа—Лива предполагалось, что электрические граничные условия на лицевых поверхностях имеют вид $D_z = 0$ (D_z — соответствующая компонента вектора индукции электрического поля).

Вводя представления перемещений через разрешающие функции ψ_i [7], приходим к одному дифференциальному уравнению десятого порядка

$$(1.2) \quad L(\partial_1, \partial_2)E(\alpha, \beta) = \delta(\alpha, \beta) \\ \Psi_i = -P_i E(\alpha, \beta) / (F_1 R_2^2 a_5), \quad \partial_1 = \partial / \partial \alpha, \quad \partial_2 = \partial / \partial \beta \\ L(\partial_1, \partial_2) = \sum_{j=0}^5 \frac{a_j}{a_5} \partial_1^{10-2j} \partial_2^{2j} + \lambda^2 \left[\sum_{j=0}^4 \frac{d_j^{(8)}}{a_5} \partial_1^{8-2j} \partial_2^{2j} + \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^3 \frac{a_j' + d_j^{(6)}}{a_5} \partial_1^{6-2j} \partial_2^{2j} + \sum_{j=0}^2 \frac{d_j^{(4)}}{a_5} \partial_1^{4-2j} \partial_2^{2j} + \sum_{j=0}^1 \frac{d_j^{(2)}}{a_5} \partial_1^{2-2j} \partial_2^{2j} \right]$$

Коэффициенты a_j, a_j', F_1 определены в [6], $\lambda = R_2/h$, величины $d_j^{(i)}$ зависят от материала, параметров оболочки и частоты вынуждающей силы и выражаются через a_j, a_j' (в силу громоздкости их не выписываем), R_2 — радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки.

Фундаментальное решение $E(\alpha, \beta)$ разыскиваем в виде ряда Фурье по координате β с последующим интегральным преобразованием Фурье по переменной α . В соответствии с этим $E(\alpha, \beta)$ представим следующим образом:

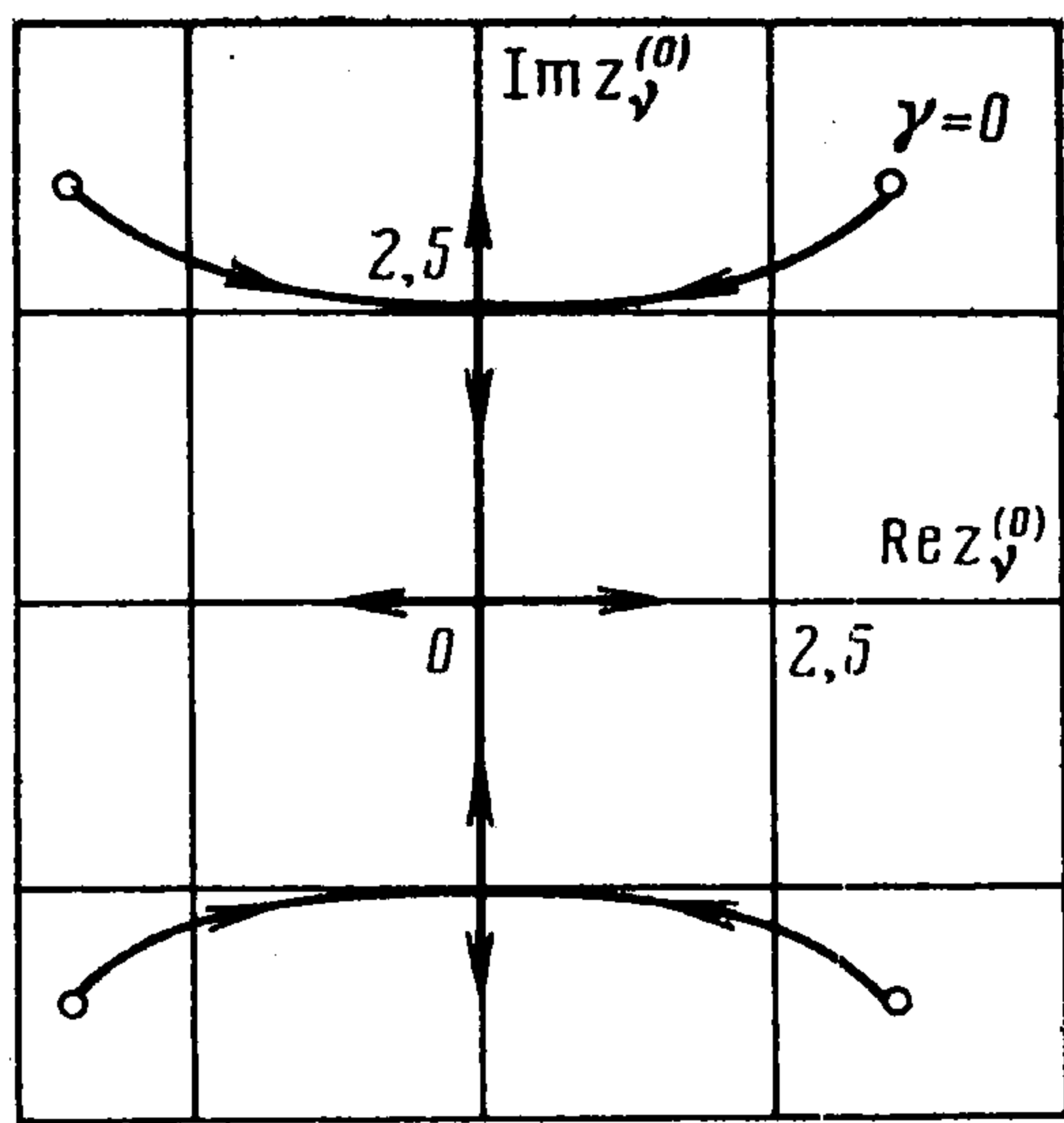
$$(1.3) \quad E(\alpha, \beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(\alpha) e^{ikn\beta} \\ C_k(\alpha) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iknz\alpha) dz}{(kn)^9 \Delta_k(\gamma, z)}$$

Характеристический полином преобразования Фурье имеет вид

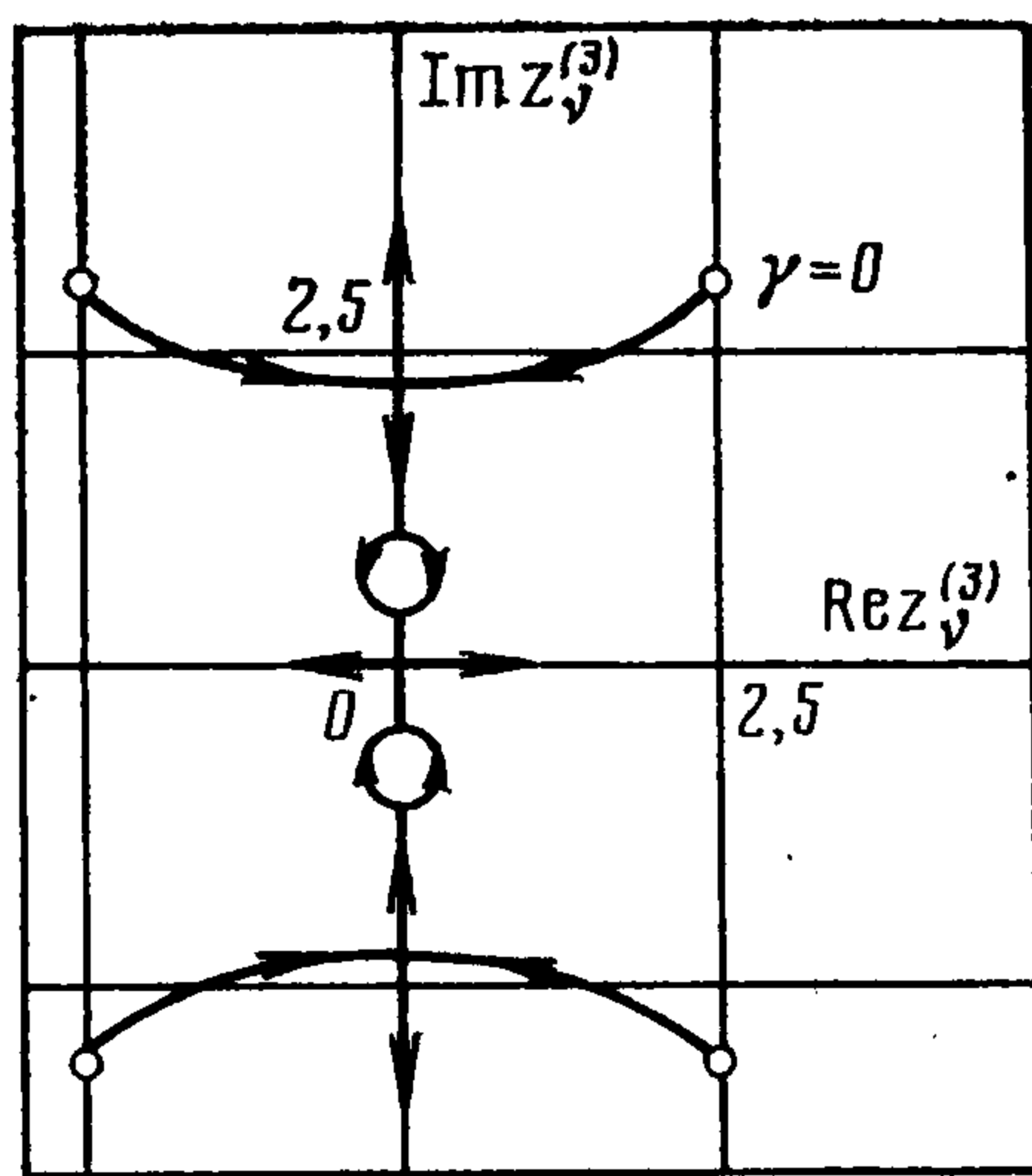
$$(1.4) \quad \Delta_k(\gamma, z) = \sum_{j=1}^5 b_{10-2j}^{(k)} z^{10-2j}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Коэффициенты $b_i^{(k)}$ зависят от $a_j, a_j', d_j^{(i)}$, параметров оболочки и частотного параметра $\gamma^2 = \rho \omega^2 R_2^2 / c_{11}$.

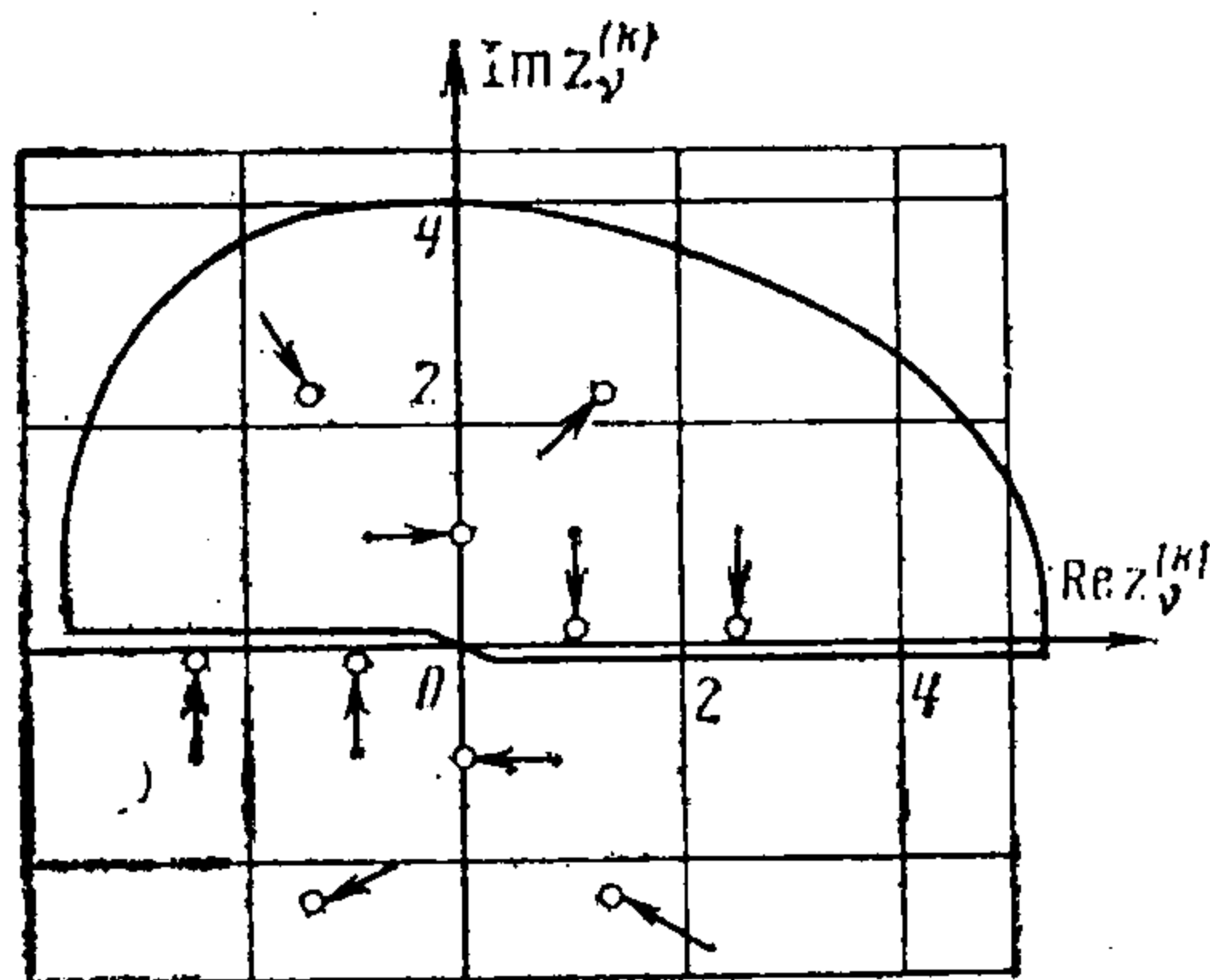
Для вычисления интеграла обращения был проведен численный анализ характеристического полинома (1.4). Это позволило выделить дискретный ряд значений



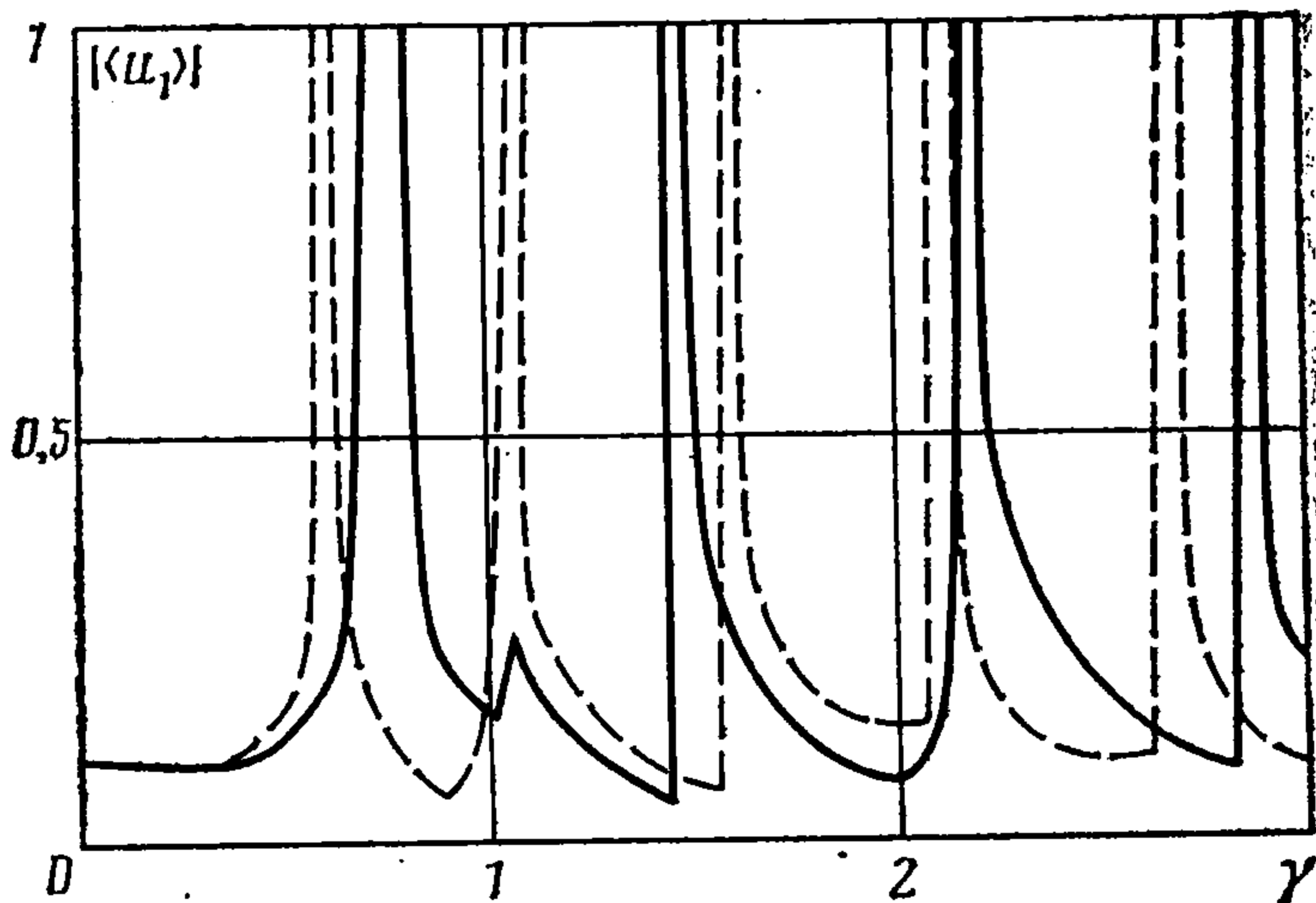
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

частотного параметра γ , при которых дисперсионное уравнение $\Delta_k(\gamma, z) = 0$ имеет краткие корни z . Критические значения частотного параметра γ для оболочки из пьезокерамики PZT-5 при $\lambda = 30$, $n = 1$ (n — число сосредоточенных воздействий) таковы: 0,007; 0,034; 0,082; 0,149; 0,236; 0,34; 0,467; 0,61; 0,733; 0,775; 0,957; 1,06; 1,16; 1,381; 1,41; 1,465; 1,621; 1,881; 2,16; 2,199; 2,236; 2,458; 2,93; 3,113; 3,16; ...

На фиг. 1, 2 показано характерное поведение некоторых корней полиномов $\Delta_0(\gamma, z)$ и $\Delta_3(\gamma, z)$ в зависимости от γ . Видно, что в статическом случае ($\gamma = 0$) все корни комплексные, при увеличении γ (рост γ идет в направлении стрелок на кривых) они подходят к мнимой оси и появляются по два кратных чисто мнимых корня. Далее эти корни разделяются и два из них идут навстречу один другому до появления кратного нулевого корня, а два других — в противоположном направлении вдоль мнимой оси. Кратный нулевой корень разделяется на два вещественных, двигающихся в противоположных направлениях вдоль действительной оси. Аналогичные картины имеют место при $k = 1, 2$. При $k = 3$ возникают характерные петли, приводящие к появлению еще одной пары кратных чисто мнимых корней. Из анализа видно, что кратные корни z появляются при тех значениях частотного параметра, при которых ветви корней полинома входят в чисто мнимую или действительную плоскости.

Критические значения частотного параметра разбивают непрерывный спектр на интервалы, в которых все корни z характеристического полинома преобразования Фурье простые и для которых обращение (1.3) существует.

Для выделения единственного решения в интервалах непрерывности необходимо задать условия, характеризующие поведение решения на бесконечности. В данной задаче используем принцип предельного поглощения [8]. Анализ корней дисперсионного уравнения (1.4) с поглощением показывает, что отрицательные действительные корни соответствуют предельным точкам последовательности комплексных корней, расположенных в третьей четверти комплексной плоскости z , а положительные — предельным точкам последовательности корней первой четверти (фиг. 3). Соответственно этому выбирается контур интегрирования при вычислении функций $C_k(\alpha)$ в (1.3). Физически указанная процедура означает построение такого фундаментального решения, которое обеспечивает перенос энергии от источника возмущения на бесконечность ($\alpha = \pm \infty$).

Таким образом, фундаментальное решение в интервалах непрерывности имеет вид

$$E(\alpha, \beta) = \frac{1}{T} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[2 \cos(kn\beta) \sum_{v=1}^{v_0} \frac{\exp(ikn x_v^{(k)} \alpha)}{(ikn)^9 \Delta_k'(\gamma, x_v^{(k)})} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \operatorname{Re} \sum_{v=v_0+1}^5 \frac{\exp[ikn(z_v^{(k)} \alpha + \beta) \operatorname{sgn} \alpha]}{(ikn)^9 \Delta_k'(\gamma, z_v^{(k)})} \right] + C_0(\alpha) \right\} \\ C_0(\alpha) = \operatorname{sgn} \alpha \left[\frac{c_1 |\alpha|}{2} + i \sum_{v=1}^4 \frac{\exp(iz_v^{(0)} |\alpha|) P_0(z_v^{(0)})}{\Delta_0'(\gamma, z_v^{(0)})} \right] \\ P_0(z) = c_1 z^6 + c_2 z^4 + c_3 z^2 + c_4, \quad c_1 = -\frac{a_5}{\lambda^2 d_0^{(2)}} \\ c_2 = \frac{\gamma^2 d_0^{(8)}}{d_0^{(2)}}, \quad c_3 = \frac{d_0^{(6)} - a_3'}{d_0^{(2)}}, \quad c_4 = \frac{d_0^{(4)}}{d_0^{(2)}} \\ \Delta_k'(\gamma, z) = \frac{\partial}{\partial z} \Delta_k(\gamma, z)$$

Здесь $z_v^{(k)}, x_v^{(k)}$ — соответственно комплексные и действительные корни полинома (1.4), $T = 2\pi/n$.

В случае кратных корней решение не дает распространяющихся волн, так как групповые скорости при этом равны нулю. Эти значения частотного параметра можно назвать резонансными [8].

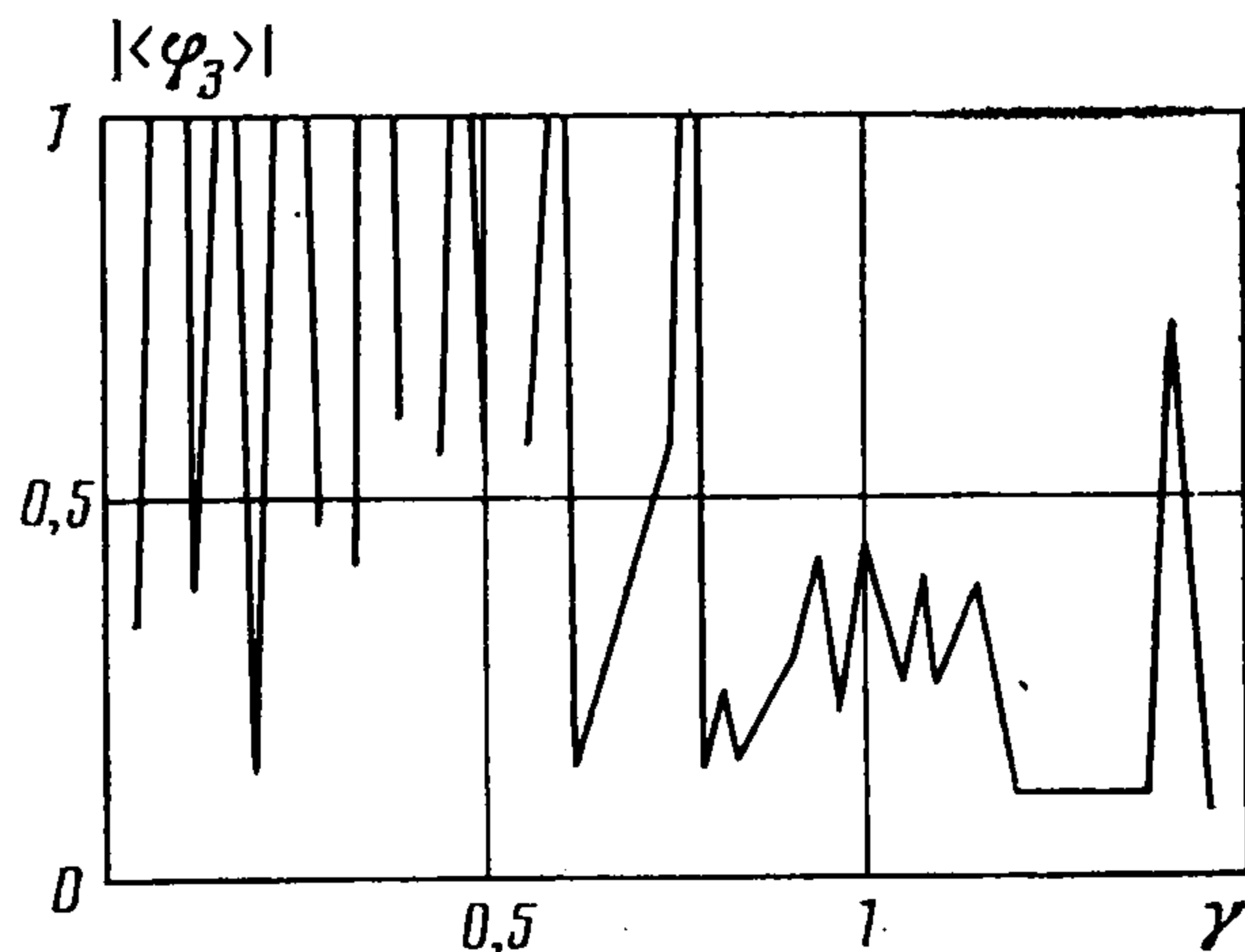
2. Амплитуды перемещений и потенциала электрического поля в оболочке определяются через фундаментальное решение при помощи известных соотношений [6].

Отметим, что перемещения и потенциал электрического поля в оболочке, вызванные действием периодической системы гармонически изменяющихся во времени сосредоточенных усилий, представляют собой суперпозицию волн различной природы. Действительным корням уравнения $\Delta_k(\gamma, z) = 0$ соответствуют распространяющиеся от источника по α монохроматические волны. Комплексным корням соответствуют неоднородные волны, экспоненциально затухающие при удалении от источника по α . Каждая пара комплексных корней $z_v^{(k)}, -z_v^{(k)}$ определяет стоячую волну по α , каждая пара чисто мнимых корней определяет стоячую волну по β с экспоненциально убывающей по α амплитудой. Таким образом, полоса периодов $0 \leq \beta \leq T$, $-\infty < \alpha < \infty$ играет роль волновода, по которому энергия переносится от источника возбуждения на бесконечность.

Амплитуды относительных перемещений u_{lm} ($m = 1, 2, 3$) и потенциала электрического поля (с точностью до произвольной постоянной) от действия внешних, сосредоточенных усилий $P_l e^{-i\omega t}$ ($l = 1, 2, 3$), $P_4 = 0$ имеют вид

$$(2.1) \quad \langle u_{lm}(\alpha, \beta) \rangle = \sum_{v=1}^4 \frac{i \exp(iaz_v^{(0)}) P_0(z_v^{(0)}) B_0^{lm}(z_v^{(0)})}{\Delta_0'(\gamma, z_v^{(0)})} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[2 \cos(kn\beta) \sum_{v=1}^{v_0} \frac{\exp(ikn x_v^{(k)} \alpha) B_k^{lm}(x_v^{(k)})}{\Delta_k'(\gamma, x_v^{(k)})} + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{Re} \sum_{v=v_0+1}^5 \frac{\exp(ikn \zeta_v^{(k)}) B_k^{lm}(z_v^{(k)})}{\Delta_k'(\gamma, z_v^{(k)})} \right] \\ \zeta_v^{(k)} = z_v^{(k)} \alpha + \beta, \quad \operatorname{Im} z_v^{(k)} > 0, \quad x_v^{(k)} > 0$$

Здесь B_k^{lm} — полиномы с коэффициентами, зависящими от материала, параметров оболочки, а также от частотного параметра γ .



Фиг. 5

В качестве примера рассмотрим колебания цилиндрической оболочки из пьезо-керамики PZT-5, $\lambda = 30$, $n = 1$ под действием сосредоточенных в точке $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, сил.

На фиг. 4 представлена амплитудно-частотная характеристика продольного перемещения u_1 (при $P_1 \neq 0$, $P_2 = P_3 = 0$), вычисленная по формуле (2.1), для пьезо-керамической оболочки (сплошная линия) и для неэлектрической оболочки (штриховая линия). Вычисления для неэлектрической оболочки проводилось по (2.1) при $e_{15} = e_{33} = e_{31} = 0$.

Амплитудно-частотная характеристика потенциала электрического поля φ_3 (при действии P_3) приведена на фиг. 5 для тех же параметров оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рогачева Н. Н.* Классификация свободных колебаний пьезокерамических оболочек // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 147—154.
2. *Лоза И. А.* Распространение неосесимметричных акустоэлектрических волн в полом пьезокерамическом цилиндре с радиальной поляризацией // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 1. С. 22—27.
3. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Сенник Н. А.* Оболочки из пьезокерамики, поляризованные по толщине // Проблемы прочности. 1985. № 1. С. 79—87.
4. *Болкисев А. М., Рудницкий О. И., Шульга Н. А.* Сравнительный анализ вынужденных колебаний электроупругих оболочек по прикладной и трехмерной теориям // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 4. С. 19—24.
5. *Борисейко В. А., Мартыненко В. С., Улитко А. Ф.* Соотношения электроупругости пьезокерамических оболочек вращения, поляризованных вдоль меридиональной координаты // Прикл. механика. 1979. Т. 15. № 2. С. 36—42.
6. *Фильштинский Л. А., Хижняк Л. А.* Реакция пьезокерамической оболочки на сосредоточенные воздействия // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 478—482.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
8. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1979. 319 с.

Сумы

{ Поступила в редакцию
25.III.1987

УДК 539.3

ПО ПОВОДУ СТАТЬИ КИРИЧЕНКО В. Ф., КРЫСЬКО В. А., СУРОВОЙ Н. С. «МЕТОД БУБНОВА—ГАЛЕРКИНА В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ГИБКИХ ПОЛОГИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК»

Нерадзе Д. Г.

Отмечаются ошибки, допущенные в указанной в заголовке работе при доказательстве существования решения и сходимости приближенного метода для системы дифференциальных уравнений Тимошенко для оболочки.

В работе [1] рассматривается вопрос существования в области $\Omega \subset E_2$ решения и сходимости метода Бубнова—Галеркина для системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей поведение оболочки в модели Тимошенко, при крайних условиях типа Дирихле. В данную систему уравнений с искомыми функциями u , v , w , γ_x , γ_y вводится бигармонический относительно w член с коэффициентом ε . В итоге получается вспомогательная задача, с помощью которой исследуется исходная. При любом $\varepsilon > 0$ известным методом доказываемость разрешимость вспомогательной задачи и возможность нахождения ее приближенного решения методом Бубнова—Галеркина. Затем совершается предельный переход по $\varepsilon \rightarrow 0$.

Предварительно выводятся априорные оценки для ε -решения

$$(1) \quad |u_\varepsilon|_{01} \leq c, |v_\varepsilon|_{01} \leq c, |\sqrt{\varepsilon}w_\varepsilon|_2 \leq c, |\gamma_{x\varepsilon}|_{01} \leq c, |\gamma_{y\varepsilon}|_{01} \leq c \\ c = \text{const} > 0$$

Утверждается, что из (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует существование подпоследовательности $\{u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon, \gamma_{x\varepsilon}, \gamma_{y\varepsilon}\}$ (для простоты записи применяются прежние обозначения),