4. *Saffman P. G., Szeto R.* Structure of a linear array of uniform vortices // Stud. Appl. Math. 1981. V. 65. No 3. P. 223—248.
5. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкостей: Пер. с. англ. М.: Мир. 1973. 758 с.
6. *Kida S.* Motion of elliptic vortex in a uniform shear frow // J. Phys. Soc. Jpn. 1981. V. 50. No. 10. P. 3517—3520.
7. *Арнольд В. И.* Математические основы классической механики. М.: Наука. 1974. 431 с.
8. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Стохастические свойства системы четырех вихрей // // Журн. эксперим. и теорет. физики (ЖЭТФ). 1978. Т. 75. № 3. С. 868—876.
9 *Aref H.* Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional frows// Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 345—390.
10. *Moore D. W., Saffman P. G.* The density of organized vortices in a turbulent mixing layer // J. Fluid Mech. 1975. V. 69. P. 465—473.
11. *Абрашкин А. А.* К теории взаимодействия двух плоских вихрей в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 62—68.

Москва

Поступила в редакцию
10.IV.1986

УДК 551.511

О ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫНУЖДЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ ВНУТРИ ЭЛЛИПСОИДА

Леонов Г. А., Морозов А. В.

В жидком гироскопе при определенных условиях вращение жидкости вокруг средней оси эллипсоида теряет устойчивость [1—4]. Это происходит, например, в случае, когда момент внешних сил, направленный вдоль средней оси, превысит некоторое критическое (бифуркационное) значение. Цель статьи — получение достаточных условий глобальной асимптотической устойчивости [5] возникающих при этом стационарных движений жидкости вокруг других главных осей эллипсоида. При решении задачи используются идеи, методы и результаты, изложенные в [1, 2, 5—9] [1].

Известно, что при достаточно сильном воздействии на среднюю ось гироскопа имеются два стационарных вращения, различающихся направлениями течения жидкости вокруг устойчивых осей [1, 8]. Теоретическое рассмотрение устойчивости движений проводилось ранее только либо при малых отклонениях от стационарных течений [1—4, 10, 11], т. е. анализировалась устойчивость по Ляпунову, либо в предположении малости постоянного внешнего и диссипативного моментов [12]. Ниже исследуется глобальная асимптотическая устойчивость указанных стационарных движений. Термин «глобальная асимптотическая устойчивость» аналогичен термину «устойчивость в целом» и используется при анализе систем с неединственным положением равновесия [5, 13].

Рассмотрим систему уравнений

$$\sigma^{\cdot} = \eta,\ \eta^{\cdot} = -\psi(\sigma, \eta) - f(\sigma)z - \varphi(\sigma) \tag{1}$$

$$z^{\cdot} = -Az - g(\sigma)\eta;\ A = \text{const}$$

содержащих непрерывно дифференцируемые функции, причем $\psi(\sigma, \eta)\eta \geqslant \mu\eta^2$, $\forall\sigma \in R^1$ при некотором $\mu > 0$.

К анализу уравнений вида (1) приводят многие задачи теории синхронных машин [7, 14] и нелинейных осцилляторов с автоматическим регулятором [8, 15]. Известно, что система Лоренца, а также система форсированного вдоль неустойчивой оси жидкого гироскопа может быть приведена к системе (1) [6, 8]. Заметим, что модель Лоренца также описывает движение «жидкого гироскопа» в поле сил Кориолиса в случае, когда содержащий жидкость эллипсоид является эллипсоидом вращения [11].

---

[1] См. также: *Юдович В. И.* Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Релея. Ростов н/Д, 1977. 48 с.— Деп. в ВИНИТИ 31.07.78; № 2611-78.

Систему (1) будем называть глобально асимптотически устойчивой, если любое ее решение $X(t) = \operatorname{col}\{\sigma(t), \eta(t), z(t)\}$ стремится при $t \to +\infty$ к некоторому положению равновесия [5]; устойчивой в целом, если она имеет одно положение равновесия и глобально асимптотически устойчива [13]; диссипативной по Левинсону, если в фазовом пространстве σ, η, z существует ограниченная замкнутая область притяжения [16]. Хорошо известным классом диссипативных по Левинсону систем являются системы гидродинамического типа [1]; простейшая модель этого класса рассмотрена ниже.

В дальнейшем предполагаем, что выполнены следующие два условия. 1°. Любое решение системы (1) бесконечно продолжаемо вправо (в частности, если система (1) диссипативна по Левинсону, то это предположение выполнено). 2°. Стационарное множество системы (1) [5] состоит из изолированных точек.

Следующая теорема обобщает результат работы [6] для системы (1).

Теорема. Если для некоторого числа $\alpha > 0$ и ограниченного решения $X(t)$ системы (1) выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \, |\alpha^2 g(\sigma(t)) + f(\sigma(t))| < 2\alpha\sqrt{A}\mu \tag{2}$$

то оно стремится к одному из положений равновесия.

Доказательство. Пусть $X(t, X_0)$ — ограниченное решение системы (1), удовлетворяющее неравенству (2) при некотором $\alpha > 0$. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$W(X) = \frac{\alpha^2}{2} z^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\, d\sigma$$

Для произведной функции $W(X)$ в силу системы (1) справедлива оценка

$$W^\cdot = \alpha^2 z[-Az - g(\sigma)\eta] + \eta[-\psi(\sigma, \eta) - f(\sigma) z - \varphi(\sigma)] + \varphi(\sigma)\eta \leqslant$$
$$\leqslant -\left[(\alpha\sqrt{A}\, z)^2 + 2\frac{\alpha^2 g(\sigma) + f(\sigma)}{2\alpha\sqrt{A\mu}}\alpha\sqrt{A\mu}\, z\eta + (\sqrt{\mu}\,\eta)^2\right]$$

Отсюда видно, что при выполнении неравенства (2) $W^\cdot(X) < 0$. Тогда на траектории $X(t, X_0)$ системы (1) функция $W(X(t, X_0))$ не возрастает по t на некотором интервале $(\tau, +\infty)$. Отсюда и из ограниченности $W(X(t, X_0))$ следует, что существует конечный предел $\lim W(X(t, X_0)) = m$ при $t \to +\infty$. Дальнейшее доказательство в точности повторяет доказательство теоремы в [6].

Доказанная теорема в сочетании с оценками областей диссипативности приводит к условиям глобальной асимптотической устойчивости.

Рассмотрим систему преобразованных уравнений форсированного жидкого гироскопа при учете диссипации [1, 8]

$$x_1^\cdot = y_1^2 - z_1^2 - lx_1 + F_0 \tag{3}$$
$$y_1^\cdot = -x_1 y_1 - ly_1, \quad z_1^\cdot = x_1 z_1 - lz_1$$

Здесь F_0 — постоянный момент внешних сил, действующий вдоль средней оси эллипсоида, l — параметр диссипации (трение считается изотропным).

Введем в рассмотрение новую переменную — энергию системы

$$z_0 = {}^1/_2\,(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \tag{4}$$

Дифференцируя (4) в силу системы (3), имеем

$$z_0^\cdot = -2lz_0 + F_0 x_1 \tag{5}$$

Дифференцируя первое уравнение системы (3) и используя два других, а также функцию (4), получим

$$x_1^{\cdot\cdot} = 2x_1^3 - (4z_0 + 2l^2)x_1 - 3lx_1^\cdot + 2lF_0 \tag{6}$$

Полагая теперь в (5) и (6)

$$x_1 = \sigma, \quad x_1^\cdot = \sigma^\cdot = \eta, \quad z_0 = z + {}^1/_2 F_0 l^{-1}\sigma$$

придем к системе (1), где

$$\psi(\sigma, \eta) = 3l\eta, \quad A = 2l, \quad g(\sigma) = {}^1/_2 F_0 l^{-1}$$
$$f(\sigma) = 4\sigma, \quad \varphi(\sigma) = 2l^{-1}(l^2 - \sigma^2)(l\sigma - F_0)$$

Полагая $\mu = 3l$, приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. Из теоремы вытекает, что если ограниченное решение системы (3) удовлетворяет условию

(7) $$a_- < \varliminf_{t\to\infty} \sigma(t) < \varlimsup_{t\to\infty} \sigma(t) < a_+, \quad a_\pm = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\, l\alpha - \alpha^2 \frac{F_0}{8l}$$

то оно стремится к одному из положений равновесия.

Заменой (близкой к замене [1])

$$x_1 = x + F_0 l^{-1},\ y_1 = {}^1/_2\,(z + y),\ z_1 = {}^1/_2\,(z - y)$$

приведем систему (3) к виду

(8) $$\begin{gathered} x^{\cdot} = -lx + yz \\ y^{\cdot} = -ly - F_0 l^{-1} z - xz,\ z^{\cdot} = -lz - F_0 l^{-1} y - xy \end{gathered}$$

Система (8) имеет при $F_0 \leqslant l^2$ одно положение равновесия C_0 (0, 0, 0), отвечающее единственному стационарному движению жидкости, при $F_0 > l^2$ — три: C_0 и $C_{1,2}$ $(l - F_0 l^{-1},\ \pm\sqrt{F_0 - l^2},\ \mp\sqrt{F_0 - l^2})$.

Физически положениям равновесия C_1, C_2 отвечают стационарные движения различающиеся направлениями вращения вокруг устойчивых осей [1].

Для доказательства свойства диссипативности системы (8) и получения конкретных оценок ее области введем в рассмотрение функцию V и число Γ:

$$V = x^2 + \frac{y^2 + z^2}{2} + \theta x, \quad \Gamma = \frac{(l - 2\lambda)^2 \theta^2}{16\lambda\,(l - \lambda)}$$

$$(\theta l = 2[F_0 - l\,(l - \lambda)],\ \lambda \in (0, l))$$

Лемма. Для любого решения системы (8) справедливо неравенство

(9) $$\varlimsup_{t\to\infty} V\,(x\,(t),\ y\,(t),\ z\,(t)) \leqslant \Gamma$$

Доказательство. Имеем

$$V^{\cdot} + 2\lambda V = -2\,(l - \lambda)\left[x + \frac{(l - 2\lambda)\,\theta}{4\,(l - \lambda)}\right]^2 + \frac{(l - 2\lambda)^2 \theta^2}{8\,(l - \lambda)} - (l - \lambda)\,(y + z)^2 \leqslant 2\lambda\Gamma$$

Представим это неравенство в виде

$$(V - \Gamma)^{\cdot} e^{2\lambda t} + 2\lambda\,(V - \Gamma) e^{2\lambda t} \leqslant 0$$

После интегрирования от 0 до t_1 получим

$$V\,(x\,(t_1),\ y\,(t_1),\ z\,(t_1)) - \Gamma \leqslant [V\,(x\,(0),\ y\,(0),\ z\,(0)) - \Gamma] e^{-2\lambda t_1}$$

Последнее справедливо при любом $t_1 \geqslant 0$, что и доказывает утверждение леммы.

Следствие 2. Из неравенства (9) вытекает, что для любого решения системы (8) справедлива оценка

(10) $$b_- \leqslant \varliminf_{t\to\infty} x\,(t) \leqslant \varlimsup_{t\to\infty} x\,(t) \leqslant b_+, \quad b_\pm = -\frac{\theta}{2} \pm \frac{\theta l}{4\sqrt{\lambda\,(l - \lambda)}}$$

Сравнивая (7) и (10), полагая при этом $\alpha = 2\sqrt{2}$, $\lambda = l/2$, приходим к следующему утверждению.

Следствие 3. Если момент внешних сил F_0 и параметр диссипации l удовлетворяют неравенству $F_0 > \sqrt{3}\,l^2$, то система (3) глобально асимптотически устойчива.

Вводя число Рейнольдса $R = F_0/l^2$, определенное по напору [1], окончательно заключаем, что система жидкого гироскопа (3) при $R < 1$ устойчива в целом, а при $1 < R < \sqrt{3}$ глобально асимптотически устойчива.

Итак, рассмотрена простейшая трехмодовая галеркинская аппроксимация уравнений, описывающих движение жидкости в эллипсоидальной полости в поле постоянного вдоль неустойчивой оси воздействия. Ранее было доказано [1—4], что в такой системе возникают при $R > 1$ неединственные положения равновесия: одно неустойчивое и два устойчивых по Ляпунову. Однако существование устойчивых по Ляпунову положений равновесия в системе, как хорошо известно, не исключает существование аттракторов других типов, например предельных циклов. Полученное здесь условие выделяет в пространстве параметров область, в которой система жидкого гироскопа (3) глобально асимптотически устойчива. При реализации этого условия физическая система при любых начальных возмущениях стремится при $t \to +\infty$ к одному из двух возможных стационарных движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М.* Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука. 1981. 366 с.
2. *Должанский Ф. В.* Лабораторное исследование устойчивости движения жидкости в эллипсоидальной полости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1972. Т. 8. № 6. С. 661—664.
3. *Гледзер Е. Б., Новиков Ю. В., Обухов А. М., Чусов М. А.* Исследование устойчивости движения жидкости внутри трехосного эллипсоида // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1974. Т. 10. № 2. С. 115—118.
4. *Гледзер Е. Б., Новиков Ю. В.* Оценка характеристик нестационарного движения жидкости в эллипсоидальной полости на основе измерения моментов сил // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1973. Т. 9. № 10. С. 1088—1091.
5. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия. М.: Наука. 1978. 400 с.
6. *Леонов Г. А.* О глобальной устойчивости системы Лоренца // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 861—863.
7. *Леонов Г. А.* Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17. № 1. С. 91—112.
8. *Сонечкин Д. М.* Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат. 1984. 280 с.
9. *Leonov G. A., Bunin A. I., Abramovich S. M.* Global Stability of the Lorenz System // Nonlinear and Turbulent Process in Physics. V. 3. Gordon and Breach, Harward Academic Publishers. 1984. New York. P. 75—77.
10. *Должанский Ф. В., Плешанова Л. А.* Автоколебания и явления неустойчивости в простейшей модели конвекции // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15. № 1. С. 17—28.
11. *Глуховский А. Б., Должанский Ф. В.* Трехмодовые геострофические модели конвекции вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16. № 5. С. 451—462.
12. *Нейштадт А. И.* Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 30—36.
13. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967. 472 с.
14. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука. 1971. 894 с.
15. *Marzec C. J., Spigel E. A.* Ordinary differential equations with strauge attractors // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 38. № 3. P. 403—421.
16. *Якубович В. А.* Методы теории абсолютной устойчивости // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под. ред. Р. А. Нелепина. М.: Наука. 1975. С. 74—180.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.X.1986

УДК 539.3:534.1

РЕАКЦИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Фильштинский Л. А., Хижняк Л. А.

Строится решение уравнений движения бесконечной, цилиндрической пьезокерамической оболочки, лицевые поверхности которой не покрыты электродами и нагружены периодической системой сосредоточенных сил, гармонически изменяющихся во времени. Для этого используется метод функций Грина. Выделение единственного решения в случае регулярных корней дисперсионного уравнения производится на основе принципа предельного поглощения. Нерегулярные корни определяют спектр резонансных частот. Проводится аналитический и численный анализ корней дисперсионного уравнения. Дается качественная картина волнового процесса. Приводятся результаты расчета амплитудно-частотных характеристик перемещения и потенциала электрического поля, а также сравнение с неэлектрической оболочкой. Свободные колебания пьезокерамических оболочек рассмотрены в [1, 2], вынужденные — в [3, 4].

1. Рассмотрим отнесенную к ортогональным координатам α, β, z цилиндрическую пьезокерамическую оболочку, поляризованную вдоль координаты α, нагруженную периодической по β системой гармонически изменяющихся во времени сосредоточенных