УДК 532.527

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА И ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ МАЛЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ

Брутян М. А., Крапивский П. Л.

Рассматривается гамильтонова формулировка и основные законы сохранения для модели малых эллиптических вихрей [1], которая, сохраняя привлекательные стороны модели точечных вихрей Кирхгофа, приближенно учитывает внутреннюю динамику вихрей. В качестве примера исследуется движение двух вихрей в направлении нормали к прямой, проходящей через их центры.

Моделирование когерентных структур в двумерном течении идеальной несжимаемой жидкости точечными вихрями Кирхгофа не учитывает внутренней структуры вихрей и изменения их формы. Например, наблюдаемое в сдвиговых течениях «спаривание» вихрей [2] не может быть описано в рамках модели точечных вихрей. В ряде работ [3, 4] вихри представлялись конечными областями с постоянной завихренностью. Форма вихрей при этом заранее неизвестна и находится в процессе численного решения уравнений Эйлера методом контурной динамики [3]. Трудоемкость этого метода позволяет применять его лишь для небольшого числа вихрей.

Внутреннюю динамику вихрей можно учесть рассматривая вихри эллиптической формы, внутри которых завихренность предполагается постоянной [1]. Условие постоянства завихренности необязательно. Можно рассматривать и другие распределения завихренности, например полые вихри, в которых завихренность сосредоточена на границе. Однако использование модели с постоянной завихренностью разумно с точки зрения теоремы Прандтля — Бэтчелора [5], если иметь в виду возможные приложения к моделированию течений при больших числах Рейнольдса. Предположение об эллиптической форме вихрей также естественно по следующим причинам: во-первых, изолированный эллиптический вихрь, как показал Кирхгоф [5], вращается с постоянной угловой скоростью без изменения своей формы; во-вторых, тот же вихрь, помещенный во внешнее течение с функцией тока

$$\psi = \text{const}\, xy \tag{1}$$

при движении остается эллиптическим, хотя соотношение осей при этом может измениться [6].

В системе малых эллиптических вихрей, в которой характерное расстояние между ними много больше их характерного размера, внутренняя динамика каждого вихря складывается из кирхгофовского вращения и движения под действием внешнего поля, обусловленного остальными вихрями. Последнее в главном члене имеет вид (1), так что такие вихри остаются эллиптическими.

Рассмотрим систему N эллиптических вихрей в безграничной идеальной несжимаемой жидкости. Пусть ω_α — завихренность вихря с номером α, a_α, b_α — полуоси вихря, $A_\alpha = \pi a_\alpha b_\alpha$ — его площадь, $\Gamma_\alpha = A_\alpha \omega_\alpha$ — циркуляция, $\lambda_\alpha = a_\alpha / b_\alpha$, $f_\alpha = \lambda_\alpha + (\lambda_\alpha)^{-1}$, φ_α — угол между осью эллипса и осью x, $z_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ — положение центра вихря. Взаимное положение пары вихрей описывается полярными координатами $R_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\beta}$, так что $z_\alpha - z_\beta = R_{\alpha\beta} (\cos\theta_{\alpha\beta}, \sin\theta_{\alpha\beta})$.

В рассматриваемом случае кусочно-постоянного распределения завихренности энергия движения может быть представлена в виде

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} \omega_\alpha \omega_\beta J_{\alpha\beta}, \quad J_{\alpha\beta} = \iint \ln|z-\zeta|\, dz\, d\zeta \tag{2}$$

где интегрирование ведется по эллипсам с номерами α, β.

Рассмотрим сначала $J_{\alpha\beta}$ при $\alpha \neq \beta$. Представляя $z = z_\alpha + z'$, $\zeta = \zeta_\beta + \zeta'$ и учитывая, что в силу исходных предложений $|z'|$, $|\zeta'| \ll R_{\alpha\beta}$, разложим $\ln|z - \zeta|$ с точностью до членов второго порядка

$$\ln|z-\zeta| = \ln R_{\alpha\beta} + \frac{(z'-\zeta')(z_\alpha - z_\beta)}{R_{\alpha\beta}^2} + \left\{ \frac{|z'-\zeta'|^2}{2R_{\alpha\beta}^2} - \frac{[(z'-\zeta')(z_\alpha - z_\beta)]^2}{R_{\alpha\beta}^4} \right\} + .$$

После интегрирования первое слагаемое даст обычный кирхгофовский гамильтониан, а вклад второго обращается в нуль в силу симметрии. При интегрировании третьего слагаемого вновь используем соображения симметрии и находим значения следующих интегралов:

$$\int |z'|^2 dz' = \frac{A^2}{4\pi} f, \quad \iint \frac{[(z'-\zeta')(z_\alpha - z_\beta)]^2}{R_{\alpha\beta}^2} dz'\, d\zeta' =$$
$$= {}^1/_8 A_\alpha A_\beta \,[a_\alpha{}^2 + b_\alpha{}^2 + a_\beta{}^2 + b_\beta{}^2 + (a_\alpha{}^2 - b_\alpha{}^2)\cos(2\varphi_\alpha - 2\theta_{\alpha\beta}) +$$
$$+ (a_\beta{}^2 - b_\beta{}^2)\cos(2\varphi_\beta - 2\theta_{\alpha\beta})]$$

В отличие от $J_{\alpha\beta}$ интеграл $J_{\alpha\alpha}$ должен быть вычислен точно. После громоздких вычислений получаем

$$J_{\alpha\alpha} = A_\alpha{}^2 K(f_\alpha), \quad K(f) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{f+2}{4\pi}\right) - \frac{1}{4}$$

Окончательное выражение для гамильтониана принимает вид

$$H = -\frac{1}{2\pi}\sum_{\alpha<\beta}\sum \Gamma_\alpha\Gamma_\beta \ln R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha=1}^{N}\Gamma_\alpha{}^2 K(f_\alpha) + \tag{3}$$
$$+ \sum_{\alpha<\beta}\sum \frac{\Gamma_\alpha\Gamma_\beta}{16\pi R_{\alpha\beta}^2}[(a_\alpha{}^2 - b_\alpha{}^2)\cos(2\theta_{\alpha\beta} - 2\varphi_\alpha) + (a_\beta{}^2 - b_\beta{}^2)\cos(2\theta_{\alpha\beta} - 2\varphi_\beta)]$$

Уравнения для траекторий жидких частиц находим по известным формулам

$$\omega x^\cdot = \delta H/\delta y, \quad \omega y^\cdot = -\delta H/\delta x \tag{4}$$

где $\delta/\delta x$, $\delta/\delta y$ — вариационные производные. Используя конкретный вид гамильтониана (3), бесконечномерную гамильтонову систему (4) можно редуцировать к конечномерной системе

$$\Gamma_\alpha x_\alpha{}^\cdot = \partial H/\partial y_\alpha, \quad \Gamma_\alpha y_\alpha{}^\cdot = -\partial H/\partial x_\alpha \tag{5}$$
$$(8\pi)^{-1}\Gamma_\alpha A_\alpha f_\alpha{}^\cdot = \partial H/\partial\varphi_\alpha, \quad (8\pi)^{-1}\Gamma_\alpha A_\alpha \varphi_\alpha{}^\cdot = -\partial H/\partial f_\alpha$$

Таким образом, система малых эллиптических вихрей описывается уравнениями Гамильтона (5) с $2N$ степенями свободы, причем (x_α, y_α) и $(f_\alpha, \varphi_\alpha)$ — сопряженные канонические переменные. Первые два уравнения (5) являются непосредственным обобщением уравнений Кирхгофа [5] и описывают внешнюю динамику вихрей, а оставшиеся уравнения описывают внутреннюю динамику. Из инвариантности относительно сдвигов и поворотов системы координат получаем интегралы движения

$$J_1 = \Sigma\Gamma_\alpha x_\alpha, \quad J_2 = \Sigma\Gamma_\alpha y_\alpha \tag{6}$$
$$J_3 = \Sigma\Gamma_\alpha\,[x_\alpha{}^2 + y_\alpha{}^2 + (4\pi)^{-1}A_\alpha f_\alpha]$$

Выше предполагалось, что характерный размер вихря — величина порядка $\sqrt{A}$. Однако возможны ситуации, когда вихри оказываются сильно вытянутыми, так что характерным размером следует считать длину большей полуоси. Например, было показано [6], что одиночный эллиптический вихрь в сдвиговом потоке может неограниченно вытягиваться. Поэтому представляет интерес рассмотреть предельную модель малых эллиптических вихрей — модель вихревых отрезков, в которой величина a_α остается конечной, $b_\alpha \to 0$, $\omega_\alpha \to \infty$, так что остается конечной циркуляция $\Gamma_\alpha = \pi a_\alpha b_\alpha \omega_\alpha$. Условие малости вихрей теперь принимает вид $a \ll R$.

В этом предельном случае в выражении для гамильтониана (3) надо положить $b_\alpha = b_\beta = 0$, $K(f_\alpha) = \ln a_\alpha$, а в уравнениях движения (5) изменяются два последних:

$$(\Gamma_\alpha/8)\,(a_\alpha{}^2)^\cdot = \partial H/\partial\varphi_\alpha, \quad (\Gamma_\alpha/8)\,\varphi_\alpha{}^\cdot = -\partial H/\partial a_\alpha{}^2$$

Ясно, что сопряженные канонические переменные — (x_α, y_α) и $(a_\alpha{}^2, \varphi_\alpha)$. Из интегралов движения (6) изменится только последний, в котором величина $(4\pi)^{-1}A_\alpha f_\alpha$ заменяется на $a^2{}_\alpha/4$.

Примеры движения малых эллиптических вихрей. Рассмотрим движение двух вихрей. Это гамильтонова система с четырьмя степенями свободы и в силу теоремы Лиувилля [7] для ее полной интегрируемости необходимо наличие трех дополнительных интегралов движения, находящихся в инволюции относительно скобки Пуассона

Легко показать, что ассоциированная с гамильтоновыми уравнениями (5) скобка Пуассона двух произвольных функций F, G имеет вид

$$\{F, G\} = \Sigma \left[\frac{1}{\Gamma_\alpha} \frac{\partial (F, G)}{\partial (x_\alpha, y_\alpha)} + \frac{8\pi}{\Gamma_\alpha A_\alpha} \frac{\partial (F, G)}{\partial (f_\alpha, \varphi_\alpha)} \right]$$

Три дополнительных интеграла (6) не находятся в инволюции

$$\{J_1, J_2\} = \Sigma\Gamma_\alpha, \quad \{J_1, J_3\} = 2J_2, \quad \{J_2, J_3\} = -2J_1$$

Можно сконструировать два находящихся в инволюции интеграла движения, например J_3 и $J_1^2 + J_2^2$. Доказательства отсутствия третьего независимого интеграла, находящегося с ними в инволюции, нет. В аналогичной более простой ситуации с кирхгофовскими вихрями численные результаты [8, 9] показывают, что такого интеграла в общем случае нет. Поэтому следует ожидать, что уже система из двух малых эллиптических вихрей в общем случае будет стохастической. Однако если система обладает дополнительной дискретной симметрией, то она может оказаться интегрируемой.

В качестве такого примера рассмотрим движение пары вихрей, расположенной симметрично относительно оси x: вихрь с циркуляцией Γ и координатами (x, y, f, φ), и вихрь с циркуляцией Γ и координатами $(x, -y, f, -\varphi)$. Первый и третий законы сохранения (6) удовлетворяются тождественно, а из второго получаем $y = y_0 = \text{const}$. Закон сохранения энергии дает еще один интеграл движения

$$\varepsilon \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \cos 2\varphi + \ln (f+2) = \text{const} \left(\varepsilon = \frac{A}{2\pi R^2} = \frac{A}{8\pi y_0^2} = \text{const} \right) \tag{7}$$

Из последних двух уравнений движения (5) имеем

$$\lambda^{\cdot} = -2\varepsilon\omega\lambda \sin 2\varphi, \quad \varphi^{\cdot} = \frac{\lambda\omega}{(1+\lambda)^2} + \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} \varepsilon\omega \cos 2\varphi \tag{8}$$

Отметим, что закон сохранения (7) можно непосредственно получить из уравнений (8).

Продольная координата вихрей находится из первых двух уравнений (5)

$$x^{\cdot} = -\frac{\Gamma}{2\pi R} \left[1 + 2\varepsilon \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \cos 2\varphi \right] \tag{9}$$

Уравнения (8), (9) легко проинтегрировать численно. Однако, поскольку изложенные выше результаты справедливы при $\varepsilon \ll 1$, воспользуемся методом возмущений. Решение ищем в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + O(\varepsilon^2), \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + O(\varepsilon^2)$$
$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2)$$

Подставляя это разложение в (8), (9) и предполагая для простоты $\lambda_0 \neq 1$, окончательно находим

$$\varphi = \Omega t + \varepsilon\omega \left(\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0^2} \frac{\sin 2\Omega t}{\Omega} - \frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0} t \right) + O(\varepsilon^2) \tag{10}$$
$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_0\omega \frac{\cos 2\Omega t - 1}{\Omega} + O(\varepsilon^2)$$
$$x = -\frac{\Gamma}{2\pi R} \left[t + \varepsilon \frac{1-\lambda_0^2}{\lambda_0} \frac{\sin 2\Omega t}{\Omega} \right] + O(\varepsilon^2); \quad \Omega = \frac{\lambda_0\omega}{(1+\lambda_0)^2}$$

Здесь Ω — угловая скорость вращения одиночного вихря; начальные условия: $\lambda(0) = \lambda_0$, $x(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$. Видно, что вторичное движение порядка ε периодическое и имеет частоту, вдвое большую, чем частота основного движения. Члены порядка ε^2 не рассматриваются, так как не учитываются в основных уравнениях (5).

Детальное изучение движения двух малых вихрей проведено в [10, 11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Melander M. V., Styczek A. S., Zabusky N. J.* Elliptically desingularize vortex model for the two-dimensional Euler equations // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. No 3. P. 1222—1225.
2. *Winant C. D., Browand F. K.* Vortex pairing, the mechanism of turbulent mixing layer growth at moderate Reynolds number // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. P. 237—255.
3. *Zabusky N. J., Hughes M. H., Roberts K. V.* Contour dynamics for the Euler equations in two dimensiona // J. Comput. Phys. 1979. V. 30. P. 96—106.

4. *Saffman P. G., Szeto R.* Structure of a linear array of uniform vortices // Stud. Appl. Math. 1981. V. 65. No 3. P. 223—248.
5. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкостей: Пер. с. англ. М.: Мир. 1973. 758 с.
6. *Kida S.* Motion of elliptic vortex in a uniform shear frow // J. Phys. Soc. Jpn. 1981. V. 50. No. 10. P. 3517—3520.
7. *Арнольд В. И.* Математические основы классической механики. М.: Наука. 1974. 431 с.
8. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Стохастические свойства системы четырех вихрей // // Журн. эксперим. и теорет. физики (ЖЭТФ). 1978. Т. 75. № 3. С. 868—876.
9 *Aref H.* Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional frows// Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 345—390.
10. *Moore D. W., Saffman P. G.* The density of organized vortices in a turbulent mixing layer // J. Fluid Mech. 1975. V. 69. P. 465—473.
11. *Абрашкин А. А.* К теории взаимодействия двух плоских вихрей в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 62—68.

Москва

Поступила в редакцию
10.IV.1986

УДК 551.511

О ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫНУЖДЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ ВНУТРИ ЭЛЛИПСОИДА

Леонов Г. А., Морозов А. В.

В жидком гироскопе при определенных условиях вращение жидкости вокруг средней оси эллипсоида теряет устойчивость [1—4]. Это происходит, например, в случае, когда момент внешних сил, направленный вдоль средней оси, превысит некоторое критическое (бифуркационное) значение. Цель статьи — получение достаточных условий глобальной асимптотической устойчивости [5] возникающих при этом стационарных движений жидкости вокруг других главных осей эллипсоида. При решении задачи используются идеи, методы и результаты, изложенные в [1, 2, 5—9] [1].

Известно, что при достаточно сильном воздействии на среднюю ось гироскопа имеются два стационарных вращения, различающихся направлениями течения жидкости вокруг устойчивых осей [1, 8]. Теоретическое рассмотрение устойчивости движений проводилось ранее только либо при малых отклонениях от стационарных течений [1—4, 10, 11], т. е. анализировалась устойчивость по Ляпунову, либо в предположении малости постоянного внешнего и диссипативного моментов [12]. Ниже исследуется глобальная асимптотическая устойчивость указанных стационарных движений. Термин «глобальная асимптотическая устойчивость» аналогичен термину «устойчивость в целом» и используется при анализе систем с неединственным положением равновесия [5, 13].

Рассмотрим систему уравнений

$$\sigma^{\cdot} = \eta,\ \eta^{\cdot} = -\psi(\sigma, \eta) - f(\sigma)z - \varphi(\sigma) \tag{1}$$
$$z^{\cdot} = -Az - g(\sigma)\eta;\ A = \mathrm{const}$$

содержащих непрерывно дифференцируемые функции, причем $\psi(\sigma, \eta)\eta \geqslant \mu\eta^2$, $\forall\sigma \in R^1$ при некотором $\mu > 0$.

К анализу уравнений вида (1) приводят многие задачи теории синхронных машин [7, 14] и нелинейных осцилляторов с автоматическим регулятором [8, 15]. Известно, что система Лоренца, а также система форсированного вдоль неустойчивой оси жидкого гироскопа может быть приведена к системе (1) [6, 8]. Заметим, что модель Лоренца также описывает движение «жидкого гироскопа» в поле сил Кориолиса в случае, когда содержащий жидкость эллипсоид является эллипсоидом вращения [11].

---

[1] См. также: *Юдович В. И.* Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Релея. Ростов н/Д, 1977. 48 с.— Деп. в ВИНИТИ 31.07.78; № 2611-78.