Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 532.546

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Гайфутдинов А. Н., Якимов Н. Д.

Устанавливаются теоремы сравнения для задач пространственной напорной фильтрации при упругом режиме течения. В предлагаемых теоремах в рамках принятой модели исследуется характер изменения решения (напора, давления, скорости фильтрации, расхода) при определенных изменениях граничных и начальных условий, формы некоторых граничных поверхностей. Приводится пример применения теорем. Полученные теоремы справедливы и для плоских задач.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача пространственной напорной фильтрации. Считается, что жидкость и грунт слабо сжимаемы и для пьезометрического напора $h(x, y, z, t)$ в области Ω справедливо уравнение [1, 2]

$$\operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} h) = \gamma\beta\partial h/\partial t \tag{1.1}$$

Здесь β — коэффициент упругоемкости, γ — удельный вес жидкости, $\varkappa = \varkappa(x, y, z)$ — коэффициент фильтрации, непрерывно дифференцируемая в Ω функция, не обращающаяся в $\overline{\Omega}$ в нуль и бесконечность.

Предполагается, что область течения ограничивается проницаемыми поверхностями S_k, на которых $h = H_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, j$ (j — число поверхностей с различным напором), и поверхностями L_m, на которых $\partial h/\partial n = \sigma_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots, i$ (нормаль внутренняя). В частности, среди L_m могут быть непроницаемые поверхности, если $\sigma_m(t) \equiv 0$ для некоторых значений m. Считается, что каждая поверхность L_m соприкасается только с поверхностями S_k и является поверхностью типа Ляпунова, а поверхности S_k состоят из конечного числа поверхностей типа Ляпунова. Область течения ограничена, но может быть многосвязной. Функция $h(x, y, z, t)$ предполагается непрерывной в $\overline{\Omega}$, имеющей непрерывные частные производные по переменным x, y, z первого порядка в $\overline{\Omega}/\bigcup S_k$, второго порядка в Ω и непрерывную производную первого порядка по t.

Для корректной постановки краевой задачи необходимо задать начальное распределение напора

$$h(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \overline{\Omega}$$

где $\varphi(x, y, z)$ — непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция. Так как ищется непрерывное решение задачи, должны выполняться условия согласованности:

$$\varphi(x, y, z) = H_k(0), \quad (x, y, z) \in S_k.$$

Здесь и всюду далее $k = 1, 2, \ldots, j$; $m = 1, 2, \ldots, i$.

2. Теоремы сравнения. Эти теоремы предполагают сравнение решений двух различающихся чем-то задач. Считается, что решения как исходной, так и измененной задачи существуют и удовлетворяют перечисленным в п. 1 условиям. В дальнейшем разность значений какой-либо величины для измененного и исходного решений обозначается квадратными скобками.

Используемое в теоремах понятие вдавливания означает, что точки измененной поверхности лежат внутри исходной области течения. Под заменой некоторой поверхности поверхностью иного типа подразумевается соответствующая замена краевых условий на данной части границы области. Встречающееся в формулировках теорем выражение «значения напора возрастают» означает, что $[h(t)] > 0$. Таким же образом понимаются и другие аналогичные выражения.

Теорема 1. Пусть в постановках сравниваемых задач могут быть различными лишь $\varphi(x, y, z)$ и $H_k(t)$, причем $[\varphi(x, y, z)] \geqslant 0$ в Ω, $[H_k(t)] \geqslant 0$ на некотором промежутке времени $[t_1, t_2]$ ($t_1 \geqslant 0$), а в остальные моменты времени $[H_k(t)] = 0$. При этих условиях решения сравниваемых задач в некоторый момент времени τ совпадают тождественно тогда и только тогда, когда $[\varphi] \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$, $[H_k(t)] \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Если в момент $\tau > 0$ решения не совпадают тождественно, то при выполнении условий теоремы:

а) значения напора (и давления) возрастают в Ω на L_m, причем на ограниченную величину:

$$0 < [h] < \max \left\{ \max_{t \in [t_1, t_2]} [H_k(t)], \max_{(x, y, z) \in \bar{\Omega}} [\varphi] \right\}$$

б) на тех поверхностях S_k, где $[H_k(\tau)] = 0$, значения выходных скоростей возрастают, а входные скорости убывают по величине или становятся выходными.

Теорема 1, разумеется, позволяет рассматривать отдельно изменения начального распределения напора $\varphi(x, y, z)$ (или отдельно значений $H_k(t)$), если положить $[H_k(t)] \equiv 0$ при любом $t \geqslant 0$ (или соответственно $[\varphi] \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$).

Теорема 2. Сравниваются решения задач, постановки которых могут различаться лишь по $\varphi(x, y, z)$ и $\sigma_m(t)$, причем $[\varphi(x, y, z)] \leqslant 0$ в $\bar{\Omega}$, $[\sigma_m(t)] \geqslant 0$ на некотором промежутке времени $[t_3, t_4]$ $(t_3 \geqslant 0)$, а в остальные моменты времени $[\sigma_m(t)] = 0$. При этих условиях решения сравниваемых задач в некоторый момент времени τ совпадают тождественно тогда и только тогда, когда $[\varphi] \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$ и $[\sigma_m(t)] \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Если в момент $\tau > 0$ решения не совпадают тождественно, то при выполнении указанных условий:

а) значения напора (и давления) убывают в Ω, на L_m;

б) на поверхностях S_k значения входных скоростей возрастают, а выходные скорости убывают по величине или становятся входными.

При наличии дополнительных данных в постановке задачи можно сделать и другие выводы. Например, пусть на одной из граничных поверхностей S_k значение напора на некотором отрезке времени $[0, T]$ наибольшее (наименьшее) из значений напора в $\bar{\Omega}$. Эту поверхность назовем поверхностью наибольшего (наименьшего) напора. Следующая теорема формулируется в предположении, что хотя бы одна из указанных поверхностей существует на отрезке времени $[0, T]$. Некоторые достаточные условия выполнения этого требования будут приведены в п. 3.

Ниже обозначения, соответствующие исходному решению, помечаются одной, а измененному — двумя звездочками.

Теорема 3. При вдавливании поверхности наибольшего (наименьшего) напора, а также при замене части поверхностей S_k или L_m поверхностью наибольшего (наименьшего) напора и в предположении, что $[\varphi(x, y, z)] \geqslant 0$ ($[\varphi(x, y, z)] \leqslant 0$) в Ω^{**}, для любого $t \in (0, T]$ справедливо следующее:

а) значения напора и давления возрастают (убывают) в Ω^{**}, на L_m;

б) на неизменных частях поверхностей S_k значения выходных (входных) скоростей возрастают, а входные (выходные) скорости убывают по величине или становятся выходными (входными); в частности, значения скорости на неизменной части поверхности наибольшего (наименьшего) напора убывают, а скорости и расхода через неизменную часть поверхности наименьшего (наибольшего) напора, если она есть, возрастают.

Замечание. В условиях теорем 1.2 при наличии поверхностей наибольшего или наименьшего напора можно таким же образом получить дополнительные утверждения об изменении скоростей на этих поверхностях и расходов (в том числе и полного) через эти поверхности.

Доказательство теорем. Теоремы доказываются исследованием разности $h_0 = [h]$ в пересечении Ω_0 областей Ω^* и Ω^{**}. Функция h_0 удовлетворяет в Ω_0 уравнению (1.1) и обладает теми же свойствами непрерывности и дифференцируемости, что и h.

Рассмотрим доказательство теоремы 1. По условиям теоремы функция h_0 удовлетворяет следующим граничным и начальному условиям: $\partial h_0/\partial n = 0$ на L_m при любом $t \geqslant 0$; $h_0 \geqslant 0$ при $t \in [t_1, t_2]$ и $h_0 = 0$ в остальные моменты времени на S_k; $h_0(x, y, z, 0) = \varphi_0 = [\varphi] \geqslant 0$ в $\bar{\Omega}_0 \equiv \bar{\Omega}^* \equiv \bar{\Omega}^{**}$.

Покажем сначала, что $h_0 \geqslant 0$ в $\bar{\Omega}_0$ при любом $t \in I$, где $I = [0, \tau]$, τ — некоторый момент времени. В самом деле, если на промежутке времени I имеются отрицательные значения h_0, то функция h_0 имеет отрицательный минимум в $\bar{\Omega}_0$ для $t \in I$. Из сильного принципа максимума для параболических уравнений второго порядка [3] следует, что этот минимум может достигаться только на границе области Ω_0 при некотором $t \in [0, \tau]$ и в начальный момент в $\bar{\Omega}_0$. Так как $h_0 \geqslant 0$ на поверхностях S_k и $\varphi_0 \geqslant 0$ в $\bar{\Omega}_0$, приходим к выводу, что точка достижения минимума может находиться только на поверхностях L_m. Тогда выполнены все условия теоремы 1 о знаке косой производной (теоремы о ЗКП) работы [4], согласно которой в точке достижения минимума $\partial h_0/\partial n > 0$. Однако это противоречит условиям теоремы. Значит, отрицательного минимума h_0 не может быть и $h_0 \geqslant 0$ в $\overline{\Omega}_0$ при $t \in I$.

Предположим, что $h_0(x, y, z, \tau) = 0$. Тогда из сильного принципа максимума при учете условия $h_0 \geqslant 0$ в Ω_0 следует $h_0 \equiv 0$ в Ω_0 при $t \in (0, \tau]$. Отсюда, учитывая непрерывность функции h_0, имеем $\varphi_0 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_0$ и $[H_k(t)] \equiv 0$ при $t \in I$. Известно, что при выполнении последних двух тождеств $h_0(x, y, z, \tau) = 0$ в $\overline{\Omega}_0$ [4], т. е. в момент τ решения тождественно совпадают тогда и только тогда, когда $[\varphi] \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_0$ и $[H_k(t)] \equiv$ $\equiv 0$ при $t \in I$.

Пусть теперь в момент τ решения тождественно не совпадают. Тогда, применяя сильный принцип максимума и теорему о ЗКП, можно записать неравенства

$$\min\left\{\min_{(x,y,z)\in\overline{\Omega}_0}\varphi_0, \min_{t\in[t_1,t_2]}[H_k(t)]\right\} < \underset{(x,y,z)\in\overline{\Omega}_0/\cup S_k}{h_0(x, y, z, \tau)} < \max\left\{\max_{(x,y,z)\in\overline{\Omega}_0}\varphi_0, \max_{t\in[t_1,t_2]}[H_k(t)]\right\}$$

из которых следует утверждение а) теоремы. На тех поверхностях S_k, где $[H_k(\tau)] = 0$, достигается минимум функции h_0 и по теореме о ЗКП на этих поверхностях $\partial h_0/\partial n > 0$. В тех точках этих поверхностей, где скорости для исходной задачи являются выходными (проекция скорости на нормаль v_n^* отрицательна), выполняется условие $\partial h^*/\partial n >$ > 0, откуда с учетом неравенства $\partial h_0/\partial n > 0$ там имеем $\partial h^{**}/\partial n > 0$. Это означает, что $v_n^{**} < 0$, т. е. скорости, являющиеся выходными для исходной задачи, останутся выходными и для измененной задачи. Тогда разность величин скоростей в этих точках можно записать в виде $[v] = \varkappa\partial h_0/\partial n$, откуда следует утверждение об изменении выходных скоростей. Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что часть входных скоростей для исходной задачи может стать выходными для измененной задачи, при этом уменьшаются величины скоростей, оставшихся входными.

Теорема 1 доказана.

Теоремы 2, 3 доказываются аналогичными рассуждениями с учетом следующего: в теореме 2 имеем $h_0 \equiv 0$ на поверхностях S_k, $\partial h_0/\partial n \geqslant 0$ при $t \in [t_3, t_4]$ и $\partial h_0/\partial n = 0$ в остальные моменты времени на L_m, $\varphi_0 \leqslant 0$ в $\overline{\Omega}_0$; в теореме 3 имеют место условия $\varphi_0 \geqslant 0$ ($\varphi_0 \leqslant 0$) в $\overline{\Omega}^{**}$ и $h_0 \geqslant 0$ ($h_0 \leqslant 0$) при $t \in [0, T]$ на вдавленной части поверхности наибольшего (наименьшего) напора, а также на замененных поверхностью наибольшего (наименьшего) напора частях поверхностей S_k, L_m.

3. Некоторые достаточные условия применимости теоремы 3. Приведем некоторые достаточные условия, обеспечивающие существование поверхностей наибольшего и наименьшего напора.

Предложение 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) для некоторого значения индекса p

$$\varphi(x, y, z) \leqslant H_p(0) \text{ в } \Omega, \text{ на } L_m,$$

2) $H_k(t) \leqslant H_p(t)$, $k \neq p$, $t \in [0, T]$,

причем при любом $t \in (0, T]$ тождественное равенство одновременно для всех значений k невозможно;

3) $\sigma_m(t) \geqslant 0$, $H_p'(t) \geqslant 0$, $t \in [0, T]$.

Тогда поверхность S_p в любой момент времени $t \in [0, T]$ является поверхностью наибольшего напора.

Предложение 2. Поверхность S_p в любой момент времени $t \in [0, T]$ будет поверхностью наименьшего напора, если выполнены условия предложения 1 с противоположными знаками в неравенствах.

Для доказательства предложения 1 рассмотрим произвольный отрезок времени $I = [0, \tau]$, где $\tau \leqslant T$, и введем функцию

$$M(\tau) = \max_{(x,y,z)\in\overline{\Omega},\ t\in I} h(x, y, z, t)$$

Согласно сильному принципу максимума, значение $M(\tau)$ может достигаться только на границе $\partial\Omega$ области Ω и в начальный момент в $\overline{\Omega}$. По условиям 1, 2 и условию согласованности

$$\max_{(x,y,z)\in\overline{\Omega}} \varphi(x, y, z) = H_p(0)$$

По теореме о ЗКП и согласно первому неравенству из условия 3 на поверхностях L_m при любом $t \in (0, \tau]$ значение $M(\tau)$ не может достигаться. Тогда, учитывая еще условие 2 и второе неравенство из условия 3, можно записать

$$M(\tau) = \max_{(x,y,z)\in\partial\Omega,\ t\in I} h(x, y, z, t) = \max_{t\in I} H_p(t) = H_p(\tau)$$

Так как момент τ произвольный, это означает, что при любом $t \in [0, T]$ значение напора на поверхности S_p — наибольшее в $\overline{\Omega}$.

Аналогично доказывается и предложение 2.

Конечно, условия 3 в предложениях не являются необходимыми и, например, при выполнении условий 1, 2 и первого из неравенств в условии 3 предложения 1 поверхность S_p может быть поверхностью наибольшего напора даже при убывании $H_p(t)$, если это убывание достаточно медленное.

4. Пример применения теорем. Доказанные теоремы могут использоваться как при теоретическом исследовании решений задач, так и с целью получения оценок искомого решения через известные (или более простые) решения.

В качестве примера рассмотрим плоскопараллельное течение жидкости к скважине S в однородном пласте, ограниченном произвольным контуром питания L. Считается, что для напора $h(x, y, t)$ в Ω справедливо уравнение (1.1) и $h = f(t)$ на S, $h = H > H_0$ на L, где $H_0 = \max_t f(t)$. Введем в рассмотрение еще две задачи с такими же граничными условиями, но решаемые в круговых областях, одна из которых содержит внутри себя область Ω, а другая целиком находится внутри нее. В каждой области за начальное распределение напора возьмем решение, соответствующее стационарной задаче при $h = f(0)$ на S. Тогда из теорем Г. Н. Положего [5] и теоремы 3 для напора и дебита скважины Q при любом $t \geqslant 0$ имеем оценки

$$h_R(x, y, t) < h(x, y, t) < h_r(x, y, t), \quad Q_R < Q < Q_r$$

Здесь индексы r и R относятся к решению задачи соответственно во внутреннем и внешнем круге. В случае центральной скважины в круговом пласте можно получить расчетные формулы для функций h_r, h_R [6, 7], из которых следуют указанные оценки.

Оценки значительно упрощаются, если воспользоваться решением задачи о притоке жидкости к скважине без учета сжимаемости жидкости и грунта.

Пусть $f'(t) \leqslant 0$, $h^+(x, y, t)$ — решение уравнения $\Delta h = 0$ с указанными выше граничными условиями, а $h^{++}(x, y)$ — решение этого уравнения при $h = H_0$ на S. Тогда справедливы оценки

$$h_R^+ < h < h_r^{++}, \quad Q_R^+ < Q \tag{4.1}$$

В самом деле, так как функция $\partial h/\partial t$ также удовлетворяет уравнению (1.1) из принципа максимума с учетом условия $f'(t) \leqslant 0$ имеем $\partial h/\partial t \leqslant 0$ в Ω. Это означает, что функция $h_0 = h - h^+$ в каждый момент времени будет удовлетворять уравнению Пуассона с неположительной правой частью, откуда по принципу максимума для эллиптических уравнений [3] $h_0 > 0$ в Ω. Учитывая еще теорему 3, имеем нижнюю оценку для напора и дебита. Верхняя оценка для напора следует непосредственно из теорем 1, 3.

Решения h_R^+, h_r^{++} при любом расположении скважины имеют простой вид [2], поэтому оценки (4.1) легко выписываются в элементарной форме.

Аналогичные оценки можно получить и для случая $f'(t) \geqslant 0$.

Возможны и другие примеры применения теорем.

Отметим, что сформулированные теоремы являются обобщением теорем сравнения Г. Н. Положего [5] на случай пространственной фильтрации сжимаемой жидкости в сжимаемом грунте.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щелкачев В. Н.* Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1946. Т. 52. № 2. С. 103—106.
2. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука. 1977. 664 с.
3. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир. 1968. 427 с.
4. *Камынин Л. И., Химченко Б. Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 1. С. 86—110.
5. *Положий Г. Н.* Теория и применение p- и (p, q)-аналитических функций. Киев: Наук. думка, 1973. 423 с.
6. *Щелкачев В. Н.* Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М.: Гостоптехиздат. 1959. 467 с.
7. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра. 1972. 288 с.

Казань

Поступила в редакцию
7.VII.1986