Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 531.36

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Угриновский В. А.

Рассматривается задача стабилизации нелинейных систем, параметры которых подвержены возмущениям типа «белый шум». Для стохастических систем, содержащих нелинейную обратную связь, получены достаточные условия экспоненциальной стабилизации регулятором, использующим информацию о выходе системы (неполная информация о состоянии объекта). Эти условия имеют частотный вид.

Задача стабилизации линейных стохастических систем изучена достаточно полно [1—3]. Для нелинейных стохастических систем по существу известны лишь теоремы общего характера, сводящие проблему стабилизации к отысканию стохастической функции Ляпунова [4, 5].

В данной работе для получения достаточных условий экспоненциальной стабилизации используются методы теории абсолютной стохастической устойчивости. Преимущества этих методов хорошо известны: конкретно знать функцию Ляпунова не нужно, ее существование в классе функций вида «квадратичная форма плюс интегралы от нелинейностей» легко проверяется [6]. Последние результаты этой теории, относящиеся к стохастическим системам [7], позволяют решить задачу стабилизации широкого класса параметрически возмущенных нелинейных объектов.

1. Постановка задачи. Рассматривается управляемая динамическая система, которая описывается дифференциальным уравнением Ито

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= (A_0 + \Sigma A_j w_j^{\cdot})\, x + (b_0 + \Sigma b_j w_j^{\cdot})\, u + \\ &+ (q_0 + \Sigma q_j w_j^{\cdot})\, \varphi(\sigma), \quad \sigma = \nu^* x \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор состояния, u — d-мерный вектор управляющих воздействий, σ — l-мерный вектор наблюдаемых переменных, φ — m-мерная вектор-функция, описывающая нелинейную обратную связь или учитывающая иные нелинейные эффекты в системе, A_j, b_j, q_j $(j = 0, 1, \ldots, s)$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей, w_j $(j = 1, \ldots, s)$ — независимые стандартные винеровские процессы; выше и всюду далее, если не оговорено противное, суммирование ведется по j от $j = 1$ до $j = s$.

Класс допустимых нелинейных функций $\varphi(\sigma)$ описывается в соответствии с общей теорией абсолютной устойчивости [6]. Положим

$$\begin{aligned} &F_1(\sigma, x, \varphi, \psi) = \sigma^* r\sigma + 2\sigma^* p\varphi + \varphi^* g\varphi - \Sigma f_j^* \theta\psi \\ &f_j = \operatorname{diag}[\Lambda_j \Lambda_j^*], \quad \Lambda_j = \nu^*(A_j x + q_j\varphi), \quad j = 1, \ldots, s \end{aligned} \tag{1.2}$$

Символом $\operatorname{diag}[\cdot]$ обозначен вектор, составленный из элементов главной диагонали матрицы, стоящей в квадратных скобках; f_j $(j = 1, \ldots, s)$ — l-мерные векторы, ψ — m-мерный вектор. Вещественные матрицы $r = r^*$, p, $g = g^*$, θ имеют размеры $l \times l$, $l \times m$, $m \times m$, $l \times m$. Предполагается, что матрица θ удовлетворяет следующим требованиям: а) она отлична от нуля лишь тогда, когда $\nu^* b_j = 0$ при всех $j = 1, \ldots, s$; б) если предыдущее требование выполняется, то элемент θ_{ki} матрицы θ может отличаться от нуля только в случае, когда φ_i — непрерывно дифференцируемая функция одной переменной σ_k — k-й компоненты вектора σ.

Предполагается, что нелинейность φ удовлетворяет условию

$$F_1(\sigma, x, \varphi(\sigma), \quad \varphi'(\sigma)) \leqslant 0, \quad \sigma = \nu^* x, \quad \varphi(0) = 0 \tag{1.3}$$

($\varphi'(\sigma)$ — вектор, i-я компонента которого равна $d\varphi_i/d\sigma_k$, если $\theta_{ki} \neq 0$, или равна нулю, если $\theta_{ki} = 0$). Кроме того, пусть $(m \times l)$-матрица μ такова, что если $\theta_{ki} \neq 0$, то $\mu_{ij} = 0$ при $j \neq k$, $1 \leqslant j \leqslant l$, и пусть линейная функция $\mu\sigma$ удовлетворяет неравенству (1.3), а функция φ обладает свойством

$$2\theta_{ki}\int\limits_0^\sigma \varphi_i(\xi)\, d\xi \leqslant \theta_{ki}\mu_{ik}\sigma^2, \quad \sigma \in R^1 \tag{1.4}$$

Класс допустимых нелинейностей состоит из всех непрерывных функций $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющих условиям (1.3), (1.4).

Ставится задача экспоненциальной стабилизации (в среднем квадратическом [1—4] или с вероятностью единица [4, 5]) нелинейного объекта (1.1) с допустимой нелинейностью φ в ситуации, когда полная информация о состоянии x не известна, а измеряется выход объекта σ.

Ниже эта задача решается при помощи регулятора

$$z^\bullet = (A_0 + q_0\mu\nu^*)\, z + b_0 u + C(\sigma - \nu^* z), \quad u = K^* z \tag{1.5}$$

(z — n-мерный вектор, K, C — постоянные матрицы размерами $n \times d$, $n \times l$ соответственно).

Регулятор (1.5) использовался в [1, 2] для стабилизации линейной системы (назовем ее системой A), которая получается из (1.1) подстановкой $\varphi = \mu\sigma$ и, по условию, входит в класс рассматриваемых в работе объектов. Предположение о том, что регулятор (1.5) экспоненциально в среднем квадратичном стабилизирует систему A, является одним из основных в работе. Проверить его при заданных K, C и даже подобрать «оптимальные» значения этих параметров можно при помощи результатов [1, 2]. Система A — это по сути линейная система сравнения для класса нелинейных объектов (1.1).

2. Достаточные условия стабилизации. Приведем общие условия, при которых регулятор (1.5) экспоненциально стабилизирует систему (1.1).

Пусть $\varepsilon = x - z$. После почленного вычитания первого соотношения (1.5) из (1.1), подстановки второго соотношения (1.5) и замены $z = x - \varepsilon$ получается уравнение относительно переменной ε

$$\begin{aligned}\varepsilon^\bullet = {} & (A_0 + q_0\mu\nu^* - C\nu^* - \Sigma b_j K^* w_j^\bullet)\,\varepsilon - q_0\mu\sigma + \\ & + (\Sigma(A_j + b_j K^*)\, w_j^\bullet)\, x + (q_0 + \Sigma q_j w_j^\bullet)\,\varphi(\sigma)\end{aligned} \tag{2.1}$$

Уравнения (1.1), (2.1) образуют замкнутую нелинейную систему стохастических уравнений вида

$$\begin{gathered} y^\bullet = (B_0 + \Sigma B_j w_j^\bullet)\, y + (D_0 + \Sigma D_j w_j^\bullet)\,\varphi(\sigma), \quad \sigma = \eta^* y \\ y = \mathrm{col}\,(x_1, \ldots, x_n \ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \\ B_0 = B_0(\mu) = \begin{Vmatrix} A_0 + b_0K^* & -b_0K^* \\ -q_0\mu\nu^* & A_0 + q_0\mu\nu^* - C\nu^* \end{Vmatrix}, \quad D_0 = \begin{Vmatrix} q_0 \\ q_0 \end{Vmatrix} \\ \eta = \begin{Vmatrix} \nu \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad B_j = \begin{Vmatrix} A_j + b_jK^* & -b_jK^* \\ A_j + b_jK^* & -b_jK^* \end{Vmatrix}, \quad D_j = \begin{Vmatrix} q_j \\ q_j \end{Vmatrix} \\ j = 1, \ldots, s \end{gathered} \tag{2.2}$$

Экспоненциальная стабилизация системы (1.1) регулятором (1.5) эквивалентна глобальной устойчивости положения равновесия уравнения Ито (2.2). Теория глобальной абсолютной устойчивости для уравнений вида (2.2) разработана в [7][1]. Следствием этой теории применительно к решаемой задаче является приведенная ниже теорема 1. Чтобы ее сформулировать, потребуются следующие обозначения:

$$(2.3)\qquad R = \eta r\eta^*,\quad Q = \eta p + B_0{}^*\eta\theta,\quad G = g + \theta^*\eta^* D_0 + D_0{}^*\eta\theta$$
$$F(y, v) = y^*Ry + 2y^*Qv + v^*Gv,\quad y \in R^{2n},\quad v \in R^m$$

Пусть $y(t)$ — траектория уравнения

$$(2.4)\qquad y^{\cdot} = (B_0 + \Sigma B_j w_j^{\cdot})\, y + (D_0 + \Sigma D_j w_j^{\cdot})\, v(t),\quad y(0) = 0$$

которое получается из (2.2) размыканием нелинейной обратной связи $v = \varphi(\sigma)$. В результате получается линейная система (2.4), управляемая случайным процессом $v(t)$. Множество допустимых управлений V состоит из $v(\cdot)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

а) процесс $v(t)$ и соответствующее ему решение задачи (2.4) $y(t)$ согласованы с потоком σ-алгебр, порожденным винеровскими процессами $w_j(t)$ $(j = 1, \ldots, s)$, $t \geqslant 0$ [4];

б) выполнено условие (E — символ математического ожидания)

$$\int_0^\infty E|v(t)|^2\, dt < +\infty,\quad \int_0^\infty E|y(t)|^2\, dt < +\infty$$

Теорема 1. Пусть регулятор (1.5) экспоненциально в среднем квадратическом стабилизирует линейную систему A и, кроме того, существует $\varepsilon > 0$, такое, что

$$(2.5)\qquad E\int_0^\infty F(y(t), v(t))\, dt \geqslant \varepsilon \int_0^\infty E|v(t)|^2\, dt,\quad \forall v \in V$$

Тогда этот же регулятор стабилизирует нелинейную систему (1.1) экспоненциально в среднем квадратическом.

Сформулированное утверждение непосредственно следует из теоремы об экспоненциальной устойчивости (см. работу, цитированную в сноске), утверждающей, что при сделанных предположениях функция

$$y^*Hy + \sum_{i,k} 2\theta_{ik} \int_0^{\sigma_k} \varphi_i(\xi)\, d\xi$$

является стохастической функцией Ляпунова для уравнения (2.2). Существование функции Ляпунова указанного вида обеспечивает и экспоненциальную стабилизацию (1.1) с вероятностью единица ([4], теорема 5.8.1):

$$(2.6)\qquad |x(t)| \leqslant \mathrm{const}\cdot e^{-\gamma t},\quad |\varepsilon(t)| \leqslant \mathrm{const}\cdot e^{-\gamma t}\quad (\exists \gamma > 0)$$

Постоянная в (2.6) почти наверное конечна и определяется начальным значением $x(0)$, $z(0)$. (Теоремы ляпуновского типа о стабилизации с вероятностью единица имеются также в [5].)

Теорема 1 охватывает широкий класс управляемых динамических систем с параметрическим возмущением. Как показано ниже, при помощи специальных оценок интеграла, стоящего в левой части (2.5), из теоремы 1 можно получить условия стабилизации частотного типа.

---

[1] См. также: *Брусин В. А., Угриновский В. А.* Устойчивость стационарных движений параметрически возмущенных систем: Препринт № 220. Горький: НИРФИ. 1986. 18 с.

3. Стабилизация системы с помехой в контуре обратной связи. Рассмотрим систему вида

$$x^{\cdot} = A_0 x + b_0 u + (q_0 + q_1 w_1^{\cdot})\, \varphi(\sigma), \quad \sigma = \nu^* x \tag{3.1}$$

$$0 \leqslant \varphi(\sigma)\, \sigma \leqslant h\sigma^2, \quad \varphi' \geqslant 0 \tag{3.2}$$

(выход σ и функция φ — скалярные величины, $l = m = 1$).

Методика получения частотного следствия теоремы 1 включает три этапа. На первом выбирается линейная система сравнения вида системы A и стабилизирующий ее регулятор (1.5). Возьмем в качестве системы сравнения линейный объект, получающийся из (3.1) подстановкой $\varphi = h\sigma$ (эта функция удовлетворяет условиям (3.2)):

$$x^{\cdot} = (A_0 + q_0 h\nu^* + q_1 h\nu^* w_1^{\cdot})\, x + bu, \quad \sigma = \nu^* x \tag{3.3}$$

Стабилизируемость этой системы регулятором (1.5) (в котором значение параметра μ равно h) эквивалентна экспоненциальной устойчивости тривиального решения линейного уравнения

$$y^{\cdot} = Py + hD_1 \sigma w_1^{\cdot}, \quad \sigma = \eta^* y, \quad P = B_0(h) + h\, D_0 \eta^* \tag{3.4}$$

Алгебраический критерий среднеквадратической устойчивости для уравнения (3.4) имеется в [8]. Параметры K, C регулятора следует выбирать на основании этого критерия. При этом матрица P, а также $A_0 + q_0 h\nu^* + b_0 K^*$, $A_0 + q_0 h\nu^* - C\nu^*$ — необходимо матрицы Гурвица. Пусть выбранные значения K, C таковы, что $B_0(h)$—также матрица Гурвица. Как будет видно из дальнейшего изложения, это предположение не является дополнительным по сравнению со сделанными ранее: расположение спектра матрицы B_0 левее мнимой оси — необходимое условие стабилизации регулятором (1.5) системы (3.1) при $\varphi \equiv 0$, входящей в класс объектов, которые требуется стабилизировать.

Второй этап — описание класса допустимых нелинейностей (3.2) неравенствами вида (1.3), (1.4). Очевидно, всякая функция φ, удовлетворяющая (3.2), удовлетворяет и неравенствам

$$\frac{1}{h}\varphi^2 - \sigma\varphi - \theta(\nu^* q_1)^2 \varphi^2 \varphi' \leqslant 0, \quad \theta \int_0^{\sigma} \varphi(\xi)\, d\xi \leqslant \frac{\theta h \sigma^2}{2} \tag{3.5}$$

при любом $\theta \geqslant 0$.

Теперь можно сформулировать частотное условие, при котором справедливо неравенство (2.5). Это третий, завершающий этап получения «частотной» теоремы о стабилизации.

Пусть

$$\varkappa_j(\lambda) = (\lambda I - B_0)^{-1} D_j, \quad \chi_j(\lambda) = \eta^* \varkappa_j(\lambda), \quad j = 0, 1$$

Теорема 2. Пусть тройка матриц (A_0, b_0, ν) управляема и наблюдаема; параметр μ равен h, а матрицы K, C подобраны так, что регулятор (1.5) экспоненциально в среднем квадратическом стабилизирует линейную систему (3.3); собственные числа матрицы B_0 при этих значениях параметров лежат левее мнимой оси. Пусть при некоторых $\theta \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$

$$1/h - 2\beta^{1/2} - \mathrm{Re}\,(1 - 2i\omega\theta)\, \chi_0(i\omega) \geqslant \varepsilon, \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty) \tag{3.6}$$

(число β определяется ниже формулой (3.7)). Тогда регулятор (1.5) с выбранными μ, K, C экспоненциально стабилизирует объект (3.1) (в среднем квадратическом и с вероятностью единица в смысле (2.6)) с произвольной функцией $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей условию (3.2).

Доказательство. Если в системе (3.1), (2.1) разомкнуть нелинейную обратную связь, то получается линейная управляемая динамическая система вида (2.5)

$$y^{\cdot} = B_0 y + D_0 v + D_1 v w_1^{\cdot},\ v = v(t),\ y(0) = 0,\ \sigma = \eta^* y(t)$$

По условию, если $v \in V$, то $E\,|\,v\,|^2$, $E\,|\,y(t)\,|^2$, $E\,|\,\sigma(t)|^2$ интегрируемы по Лебегу на $[0, +\infty)$. Пусть $v(t)$, $y(t)$ и $\sigma(t)$ при $t < 0$ принимают нулевое значение. Тогда преобразования Фурье — Лапласа этих процессов связаны тождествами

$$y_F(i\omega) = \varkappa_0(i\omega) v_F(i\omega) + \varkappa_1(i\omega) J(i\omega),\ \sigma_F(i\omega) = $$
$$= \chi_0(i\omega) v_F(i\omega) + \chi_1(i\omega) J(i\omega)$$

$$J(i\omega) = \int\limits_0^\infty v(t)\, e^{-i\omega t}\, dw_1(t)$$

(индекс F означает преобразование Фурье соответствующего процесса). Следствием этих тождеств является тот факт, что

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

$$y_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \varkappa_0(i\omega)\, v_F(i\omega)\, d\omega, \quad y_1(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \varkappa_1(i\omega)\, J(i\omega)\, d\omega$$

Из (3.5) следует, что квадратичная форма F (2.3) имеет коэффициенты

$$R = 0, \quad Q = -\frac{1}{2}\eta + \theta B_0 \eta, \quad G = \frac{1}{h} + 2\theta(\nu^* q_0)$$

Положим

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\,Q^* \varkappa_1(i\omega)\,|^2\, d\omega \tag{3.7}$$

Интеграл (3.7) конечен ввиду расположения собственных значений матрицы B_0 левее мнимой оси. Из приведенного выше представления $y(t)$ и неравенства $2y_1{}^* Qv \geqslant -\beta^{-1/2}\,|\,Qy_1\,|^2 - \beta^{1/2}\,|\,v\,|^2$ следует оценка

$$\int\limits_0^\infty EF(y(t),\ v(t))\, dt \geqslant \int\limits_0^\infty EF(y_0(t),\ v(t))\, dt - \tag{3.8}$$

$$- \beta^{-1/2} \left\{ \int\limits_0^\infty E\,|\,Qy_1(t)\,|^2\, dt + \beta \int\limits_0^\infty E\,|\,v(t)\,|^2\, dt \right\} =$$

$$= \int\limits_0^\infty E\,\{F(y_0(t), v(t)) - 2\beta^{1/2}\,|\,v\,|^2\}\, dt$$

(Последнее равенство записано на основании свойств интегралов Ито.) После перехода в правой части (3.8) к преобразованиям Фурье при помощи равенства Парсеваля и учета неравенства (3.6) теорема становится доказанной.

Теорема 2 относится к случаю монотонных сколь угодно быстро возрастающих нелинейностей. Случай $\varphi' \leqslant d$ учитывается теоремой 3 (см. ниже), причем положительность φ' не требуется.

Пусть теперь $\mu = 0$. Соответствующим образом меняется значение матрицы B_0 и $\varkappa_j(\lambda)$, $\chi_j(\lambda)$ $(j = 0, 1)$, β.

Теорема 3. Пусть тройка матриц (A_0, b_0, ν) управляема и наблюдаема; в регуляторе (1.5) параметры выбраны так, что $\mu = 0$, собственные значения матриц $A_0 + b_0K^*$, $A_0 - C\nu^*$ расположены на комплексной плоскости левее мнимой оси. Пусть при некоторых $\theta \leqslant 0$, $\varepsilon > 0$

$$1/h + \theta (\nu^* q_1)^2 d - 2\beta^{1/2} - \operatorname{Re}(1 - 2i\omega\theta)\chi_0(i\omega) \geqslant \varepsilon, \ \forall \omega \in R^1 \tag{3.9}$$

В этих условиях регулятор (1.5) экспоненциально стабилизирует систему (3.1).

Условия (3.6), (3.9) аналогичны известному в теории абсолютной устойчивости частотному условию В. М. Попова и имеют такую же геометрическую интерпретацию [6]: годограф видоизмененной частотной характеристики $X = -\operatorname{Re}\chi_0(i\omega)$, $Y = -\omega \operatorname{Im}\chi_0(i\omega)$ располагается строго правее прямой Попова $1/h_1 + X + 2\theta Y = 0$. Значение h_1 определяется из теорем 2, 3:

$1/h_1 = 1/h - 2\beta^{1/2}$ для условия (3.6)

$1/h_1 = 1/h + \theta (\nu^* q_1)^2 d - 2\beta^{1/2}$ для условия (3.9)

Такая интерпретация может оказаться полезной во многих приложениях, например при исследовании сохранения свойств стабилизируемости в условиях помех (оценка нечувствительности системы стабилизации).

Пример. Требуется стабилизировать объект

$$\sigma^{\cdot\cdot} + 2\alpha\sigma^{\cdot} + \sigma = \eta, \ \eta^{\cdot} + \beta\eta = \varphi(\sigma)(1 + qw^{\cdot}) + u \tag{3.10}$$
$$q > 0, \ -1 < \alpha < 0, \ \beta > 0, \ h < -2\alpha(1 + 2\alpha\beta + \beta^2) < \beta$$

причем функция φ удовлетворяет неравенствам (3.2).

При таком соотношении параметров неуправляемой системы ($u \equiv 0$) оказываются неустойчивыми все линейные объекты этого класса. На основании частотного критерия В. М. Попова [6] можно показать, что в отсутствие помехи ($q = 0$) стабилизирующий (3.10), (3.2) регулятор имеет вид

$$\sigma_1^{\cdot} = \rho_1 + c(\sigma - \sigma_1), \ \rho_1^{\cdot} + 2\alpha\rho_1 + \sigma_1 = \eta_1 \tag{3.11}$$
$$\eta_1^{\cdot} + \beta\eta_1 = h\sigma_1 + u, \ u = k\sigma_1$$

при надлежащем выборе k, c. Так, при $\alpha = -0{,}2$, $\beta = 2$, $h = 0{,}2$ можно взять $k = 1{,}681$, $c = 2$. Проведенный на основании теоремы 2 анализ замкнутой системы (3.10), (3.11) показывает: при $q < q^\circ \approx 0{,}77$ регулятор (3.11) также экспоненциально стабилизирует систему (3.10) как в среднем квадратическом, так и с вероятностью единица, т. е. регулятор (3.11) не чувствителен к помехе типа «белый шум», «интенсивность» которой не превышает q°. Значения параметров θ, h_1, соответствующие этой пороговой интенсивности, при которых выполняется частотное условие (3.6): $\theta = 0{,}6$, $h_1 \approx 0{,}264$.

4. Стабилизация системы с помехами в объекте и канале управления. Приведем частотное следствие теоремы 1, относящееся к системам Ито вида

$$x^{\cdot} = (A_0 + A_1 w_1^{\cdot})x + (b_0 + b_2 w_2^{\cdot})u + q_0\varphi(\sigma), \ \sigma = \nu^* x \tag{4.1}$$

со скалярными σ и φ; w_1, w_2 — независимые скалярные стандартные винеровские процессы. Предполагается, что $\nu^* b_2 = 0$; нелинейная функция $\varphi(\sigma)$ обладает свойствами

$$h_1\sigma^2 \leqslant \varphi(\sigma)\sigma \leqslant h_2\sigma^2, \quad \varphi' \geqslant 0, \quad \int_0^\sigma \varphi(\xi)\,d\xi \leqslant \frac{\mu\sigma^2}{2}, \quad \mu \in [h_1, h_2] \tag{4.2}$$

Очевидно, всякая функция φ, удовлетворяющая этим ограничениям, входит в множество функций, которое выделяется неравенством

$$(\varphi - h_1\sigma)(\varphi - h_2\sigma) - \theta(\nu^* A_1 x)^2 \varphi' \leqslant 0, \ \theta \geqslant 0 \tag{4.3}$$

В соответствии с методикой, изложенной в пп. 1—3, в качестве линейной системы сравнения возьмем систему

$$(4.4)\qquad x^{\cdot} = (A_\mu + A_1 w_1^{\cdot})x + (b_0 + b_2 w_2^{\cdot})u,\ A_\mu = A_0 + q_0\mu\nu^*$$

которая получается из (4.1) подстановкой $\varphi = \mu\sigma$. Эта подстановка удовлетворяет условиям (4.3). Параметры регулятора (1.5), стабилизирующего систему (4.4), выбираются с помощью рекомендаций [1, 2].

При получении частотного следствия теоремы 1 используется вспомогательная лемма.

Обозначим

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} &P = B_0(\mu) + \mu D_0\eta^*,\ R_1 = (h_1 - \mu)(h_2 - \mu) - \theta\mu B_1{}^*\eta\eta^* B_1\\ &Q_1 = [-(h_1 + h_2)/2 + \mu]\eta + \theta P^*\eta,\ G_1 = 1 - \varepsilon + 2\theta(\nu^* q_0),\\ &0 < \varepsilon \leqslant 1\end{aligned}$$

Пусть $\|\cdot\|$ — спектральная матричная норма в пространстве $(2n \times 2n)$-матриц, индуцированная евклидовой нормой в R^{2n} [9], спектр матрицы P лежит в области $\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant -\alpha,\ \alpha > 0$ и $\|\exp(Pt)\| < \rho\exp(-\alpha t)$, $\rho > 0$.

Известно [9], что матричные уравнения

$$(4.6)\qquad P^*H_0 + H_0P = \gamma^{-1}Q_1Q_1{}^*,\ \gamma > 0$$

$$(4.7)\qquad \begin{aligned} &P^*T_0 + T_0P = -B_1{}^*H_0B_1 - B_2{}^*H_0B_2 - R_1\\ &P^*T_k + T_kP = -B_1{}^*T_{k-1}B_1 - B_2{}^*T_{k-1}B_2,\ k \geqslant 1\end{aligned}$$

имеют единственные симметричные решения $H_0,\ T_k,\ k \geqslant 0$, причем $H_0 \leqslant 0$, так как $Q_1Q_1{}^* \geqslant 0$, и $T_k \leqslant 0$, так как $R_1 \leqslant 0$.

Лемма. Пусть $\beta = \rho^2(\|B_1\|^2 + \|B_2\|^2)/2\alpha$. При сделанных выше предположениях уравнение

$$(4.8)\qquad \begin{aligned} &P^*H + HP + \delta(B_1{}^*HB_1 + B_2HB_2) = -B_1{}^*H_0B_1 -\\ &- B_2{}^*H_0B_2 - R_1\end{aligned}$$

имеет единственное решение $H = H^* \leqslant 0$, представимое в виде ряда

$$(4.9)\qquad H = T_0 + T_1\delta + T_2\delta^2 + \ldots$$

В круге $|\delta| < 1/\beta$ ряд сходится.

Доказательство. В том, что ряд (4.9) удовлетворяет (4.8), можно убедиться непосредственной подстановкой. Сходимость ряда (4.9) в любой норме эквивалентна сходимости числового ряда

$$\langle y,\ T_0y\rangle + \langle y,\ T_1y\rangle\delta + \langle y,\ T_2y\rangle\delta^2 + \ldots$$

Можно считать $|y| = 1$. Радиус сходимости последнего ряда равен $r = 1/\lim|\langle y,\ T_ky\rangle^{1/k}$ при $k \to +\infty$. В силу оценки $|y^*T_ky| \leqslant \beta^k\|T_0\|$ имеем $r \geqslant 1/\beta$, что и требовалось.

Пусть теперь H — решение уравнения (4.8), $M = -P^*H - HP$, $M \leqslant 0$, $\varkappa_0(\lambda) = (\lambda I - P)^{-1}D_0$, $\chi(\lambda) = \eta^*\varkappa_0(\lambda)$, $\varkappa_j(\lambda) = (\lambda I - P)^{-1}B_j$ $(j = 1, 2)$.

Теорема 4. Пусть тройка матриц $(A_\mu,\ b_0,\ \nu)$ управляема и наблюдаема; параметры регулятора (1.5) таковы, что он стабилизирует систему (4.4). Пусть β, γ — числа из леммы; $\gamma_1 > 0$ и $1 + 1/\gamma_1 < 1/\beta$; величина $\varepsilon > 0$ такова, что

$$(4.10)\qquad \begin{aligned} &1 - \gamma + (1 + \gamma_1)\,\mathrm{Re}\,\varkappa_0{}^*(i\omega)M\varkappa_0(i\omega) - \mathrm{Re}\,(h_1 + h_2 -\\ &- 2\mu - 2i\omega\theta)\chi(i\omega) \geqslant \varepsilon,\ \forall\omega \in (-\infty, +\infty)\end{aligned}$$

В этих условиях регулятор (1.5) стабилизирует нелинейную систему (4.1) с произвольной нелинейностью, удовлетворяющей требованиям (4.2).

Доказательство. Необходимое условие стабилизации регулятором (1.5) системы (4.4) — такое расположение собственных чисел матрицы P, определенной соотношением (4.5), при котором $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant -\alpha$ ($\exists\alpha > 0$). Тогда при некотором $\rho > 0$ $\|\exp(Pt)\| \leqslant \rho\exp(-\alpha t)$.

Заменой $v_1 = v - \mu\sigma$ уравнение (2.4) приводится к виду

$$y^{\cdot} = Py + D_0 v_1 + (B_1 w_1^{\cdot} + B_2 w_2^{\cdot})y,\quad \sigma = \eta^* y,\quad y(0) = 0$$

Процессы, удовлетворяющие этому уравнению, имеют преобразование Фурье — Лапласа (так как $v_1 \in V$), которые связаны тождеством

$$y_F(i\omega) = \varkappa_0(i\omega)\, v_{1F}(i\omega) + \sum_{j=1}^{2}\varkappa_j(i\omega)\int_0^\infty y(t)\, e^{-i\omega t}\, dw_j(t)$$

По условию теоремы, при $\delta = 1 + 1/\gamma_1$ решение уравнения (4.8) существует и ряд (4.9) сходится. Используя прием, обобщающий технику работы [10], можно показать, что

$$\int_0^\infty Ey^*My\,dt \geqslant \frac{1+\gamma_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varkappa_0^*(i\omega)\,M\varkappa_0(i\omega)\,E\,|v_{1F}(i\omega)|^2\,d\omega +$$

$$+\left(1+\frac{1}{\gamma_1}\right)\int_0^\infty Ey^*(B_1^*HB_1 + B_2HB_2)\,y\,dt$$

$$\int_0^\infty E2y^*Q_1v_1\,dt \geqslant -\gamma\int_0^\infty E\,|v_1|^2\,dt - \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty E\,\{y^*(B_1^*H_0B_1 +$$

$$+ B_2^*H_0B_2)\,y\}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E\,|v_{1F}(i\omega)|^2\operatorname{Re}2\varkappa_0(i\omega)\,Q_1\,d\omega$$

(В [10] рассматривалась система Ито с детерминированным управлением. Здесь же $v_{1F}(i\omega)$ принципиально зависит от процессов w_1, w_2, что делает невозможным прямое применение техники [10].)

Построив при помощи (4.3) квадратичную форму F и сделав замену $v_1 = v - \mu\sigma$, получим

$$F(y, v) = y^*R_1y + 2y^*Q_1v_1 + G_1\,|v_1|^2 + \varepsilon\,|v|^2 \equiv F_2(y, v_1) + \\ + \varepsilon\,|v|^2$$

где ε — число из (4.10), матрицы R, Q_1, G_1 определены соотношениями (4.5). Из приведенных выше оценок и условия (4.10) следует, что

$$\int_0^\infty EF_2(y, v_1)\,dt \geqslant 0,\quad \forall v_1 \in V$$

Следовательно, условие (2.5) теоремы 1 выполняется. По теореме 1 регулятор (1.5) стабилизирует систему (4.1), (4.2).

Автор благодарит В. А. Брусина за постановку задачи, внимание к работе и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ряшко Л. Б.* Линейный фильтр в задаче стабилизации линейных стохастических систем при неполной информации // Автоматика и телемеханика. 1979. № 7. С. 80—89.
2. *Мильштейн Г. Н., Ряшко Л. Б.* Оптимальная стабилизация линейных стохастических систем // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1034—1039.
3. *Казаринов Ю. Ф.* О стабилизации линейной стохастической системы, испытывающей параметрическое воздействие типа «белый шум» // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 245—250.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука. 1969. 367 с.

5. *Phillis Y. A.* Optimal Stabilization of Stochastic Systems // J. Math. Analysis and Appl. 1983. V. 94. No. 2. P. 489—500.
6. *Якубович В. А.* Методы теории абсолютной устойчивости // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления/Под ред. Р. А. Нелепина. М.: Наука. 1975. С. 74—119.
7. *Брусин В. А.* Глобальная устойчивость и дихотомия класса нелинейных систем со случайными параметрами // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22. № 2. С. 57—73.
8. *Левит М. В., Якубович В. А.* Алгебраический критерий стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа «белый шум» // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 142—148.
9. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука. 1978. 269 с.
10. *Докучаев Н. Г.* Частотный критерий существования оптимального управления для уравнений Ито // Вестн. ЛГУ. 1983. № 1. С. 38—43.

Горький

Поступила в редакцию
1.VI.1987