

УДК 539.375

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕЩИН ДЛЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН

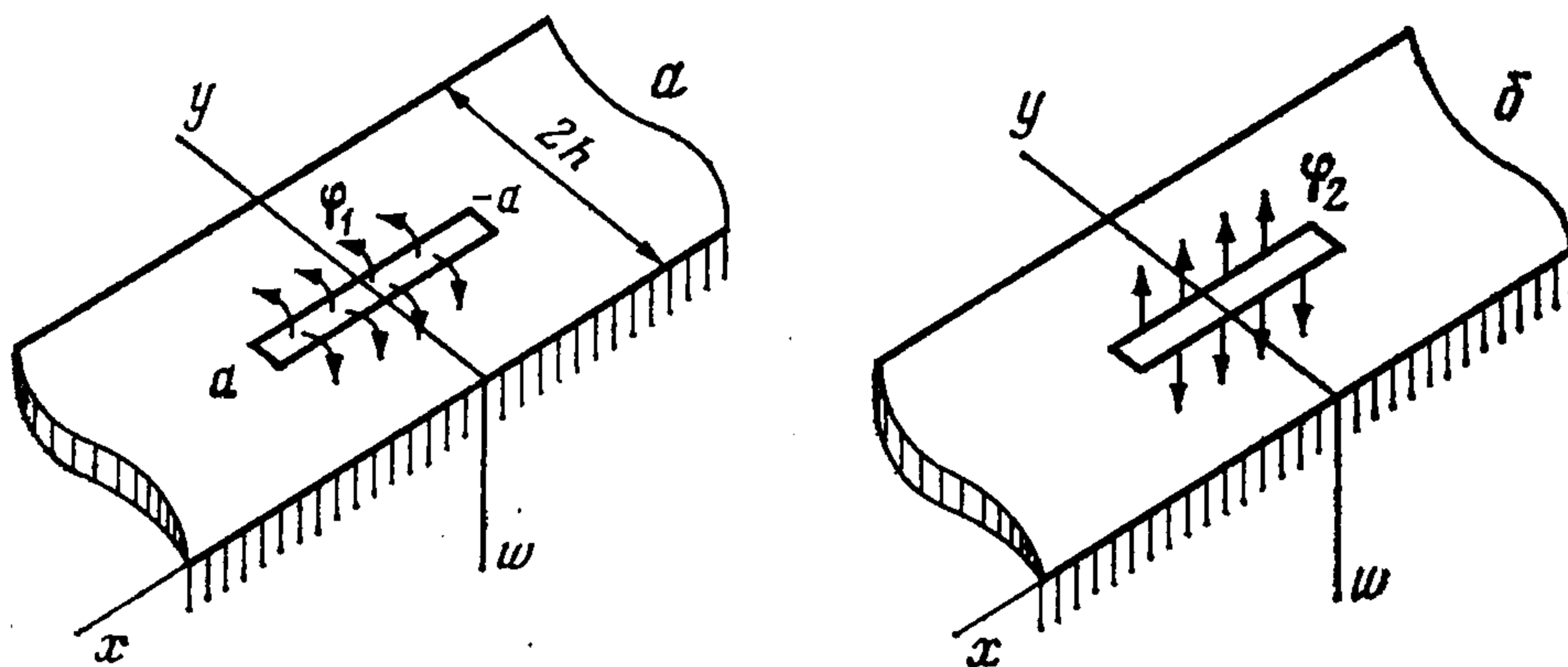
Зеленцов В. Б.

Рассматриваются интегральные уравнения, к которым сводятся задачи об изгибе тонких пластин с разрезами. На основании свойств ядер интегральных уравнений делаются заключения о классах существования и единственности их решений. Для решения интегральных уравнений предлагаются асимптотические методы, основанные на выделении их главной части с последующим точным ее обращением. На основании полученных решений приводятся формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в углах разреза, показана их зависимость от геометрических параметров задачи. Указываются другие задачи, приводящиеся к решению рассматриваемых интегральных уравнений.

Ранее рассматривались асимптотические методы решения интегральных уравнений задач теории упругости о трещинах [1—3], а также интегральные уравнения [4] аналогичные рассматриваемым ниже.

1. Интегральное уравнение. Изучаются два типа задач (А, Б) теории трещин для пластин Кирхгофа — Лява.

Задача А. Рассматривается пластина Кирхгофа — Лява в виде полосы шириной $2h$ ($0 \leq y \leq 2h$), жестко защемленная по краям. На оси симметрии пластины ($y = h$) имеется прямолинейный разрез (трещина) длины $2a$. Берега разреза (трещины) подвергнуты воздействию изгибающего момента $M_y = \varphi_1(x)$. Требуется определить угол поворота берега разреза $g_1^0(x)$ (фигура, а).



Фиг. 1

Задача Б. Как и в задаче А, рассматривается пластина в виде полосы с разрезом (трещиной). Разрез (трещина) раскрывается под действием распределенной по краям разреза антисимметричной перерезывающей силы $V_y = \varphi_2(x)$. Требуется определить вертикальное перемещение берега разреза (трещины) $g_2^0(x)$ (фигура, б).

Математическая постановка рассматриваемых задач: требуется найти решение краевой задачи для бигармонического уравнения

$$(1.1) \quad D\Delta^2\omega = q(x, y)$$

($\omega(x, y)$ — прогиб пластины, $q(x, y)$ — распределенная нагрузка, D — цилиндрическая жесткость) со смешанными краевыми условиями.

Задача А.

$$(1.2) \quad w(x, 0) = w_y'(x, 0) = V_y(x, h) = 0, \quad |x| < \infty$$

$$M_y(x, h) = \varphi_1(x), \quad |x| < a; \quad w_y'(x, h) = 0, \quad a < |x| < \infty$$

Задача Б.

$$(1.3) \quad w(x, 0) = w_y'(x, 0) = M_y(x, h) = 0, \quad |x| < \infty$$

$$V_y(x, h) = \varphi_2(x), \quad |x| \leq a; \quad w(x, h) = 0, \quad a < |x| < \infty$$

При помощи обобщенного интегрального преобразования Фурье эти краевые задачи сводятся к решению интегрального уравнения

$$(1.4) \quad \lambda^{-2m} \int_{-1}^1 g_m(\xi) k_m\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = 2\pi\varphi_m(x), \quad |x| \leq 1$$

$$\lambda = h/a, \quad g_m(x) = (-1)^{m-1}(1-\nu)(3+\nu) Dg_m^0/(2a)$$

Здесь (интеграл понимается в обобщенном смысле)

$$(1.5) \quad k_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_m(u) e^{-iut} du$$

$$K_m(u) = \frac{2u}{(1-\nu)(3+\nu)} \frac{4 \operatorname{ch}^2 u - (1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 u + (1+\nu)^2 u^2}{\operatorname{sh} 2u - (-1)^m 2u}$$

где $m = 1$ для задачи А и $m = 2$ для задачи Б.

2. Свойства ядра интегрального уравнения. Функция $K_m(u)$ ядра рассматриваемого уравнения (1.4) непрерывна вдоль действительной оси, четна, мероморфна в комплексной плоскости и имеет следующие асимптотические свойства:

$$(2.1) \quad K_m = u^{2m-1} + O(e^{-2u}), \quad |u| \rightarrow \infty; \quad K_m = A_m + O(u^2), \quad |u| \rightarrow 0$$

В комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ функции $K(u)$ могут быть представлены в виде бесконечных произведений

$$(2.2) \quad K_m(u) = K_m(0) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + u^2 \delta_{nm}^{-2}}{1 + u^2 \gamma_{nm}^{-2}}$$

где $\pm i\delta_{nm}, \pm i\gamma_{nm}$ — соответственно нули и полюсы функции $K_m(u)$.

Лемма. Справедливо представление

$$(2.3) \quad k_m(t) = \Gamma(2m) t^{-2m} - L_m(t), \quad L_m(t) = \int_0^{\infty} [u^{2m-1} - K(u)] \cos ut dt$$

Функция $L_m(t)$ регулярна в полосе $|t| < \infty, |\tau| < 2$. Кроме того, при $|t| < 2$ она представляется абсолютно сходящимся рядом

$$(2.4) \quad L_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_m^{(k)} t^{2k}, \quad a_m^{(k)} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^{\infty} [u^{2m-1} - K_m(u)] u^{2k} du$$

Для доказательства леммы воспользуемся интегралом (в обобщенном смысле) [5]

$$\int_0^{\infty} u^{2m-1} \cos ut du = -\sin \pi \left(m - \frac{1}{2}\right) \Gamma(2m) t^{-2m}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Функция $L(z)$ регулярна в полосе $|t| < \infty, |\tau| < 2$ из оценки (2.1) и [6]. Представление (2.4) получается после разложения $\cos ut$ в ряд по степеням t .

3. **Обращение главной части интегрального уравнения.** Выделяя особую часть ядра интегрального уравнения (1.4) при помощи (2.3), получим

$$(3.1) \quad \Gamma(2m) \int_{-1}^1 \frac{g_m(\xi) d\xi}{(\xi-x)^{2m-1}} = -\pi\varphi_m(x) - \frac{1}{\lambda^{2m}} \int_{-1}^1 g_m(\xi) L_m\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi$$

Проинтегрировав левую и правую части (3.1) по x $2m-1$ раз, получим сингулярное уравнение

$$(3.2) \quad \int_{-1}^1 \frac{g_m(\xi)}{\xi-x} d\xi = \pi F_m(x) \\ \frac{d^{2m-1} F_m}{dx^{2m-1}} = -\varphi_m(x) - \frac{1}{\pi\lambda^{2m}} \int_{-1}^1 g_m(\xi) L_m\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi$$

решение которого можно получить сведением к краевой задаче о скачке аналитических функций [7—9]. Разыскивая решение уравнения (3.2) в классе функций $g_m(x) = G_m(x)(1-x^2)^{m-1/2}$ [10—12], где $G_m(x) \in C_n[-1,1]$, получим формулу

$$(3.3) \quad g_m(x) = \pi \int_{-1}^1 R_m(t, x) F_m(t) dt, \quad F_m(t) = \frac{1}{\pi^2(t-x)} \left(\frac{1-x^2}{1-t^2}\right)^{m-1/2}$$

в которой интеграл при $m=2$ понимается как обобщенный в смысле его конечной части [13, 14]. При этом должны выполняться условия

$$(3.4) \quad \int_{-1}^1 \frac{t^{k-1} F_m(t)}{(1-t^2)^{m-1/2}} dt = 0, \quad k=1, 2, \dots, (2m-1)$$

Теорема. Если функция $\Phi_n(x) \in B_{n+1}^\alpha[-1, 1]$, $\alpha > m-1/2$, то любое решение интегрального уравнения (1.4) или (3.1) из класса $L_p[-1, 1]$, $p > 1$ является решением интегрального уравнения

$$(3.5) \quad g_m(x) = (-1)^m \pi \int_{-1}^1 R_m(t, x) \Phi_m(t) dt - \\ - (-1)^m \lambda^{-2m} \int_{-1}^1 R_m(t, x) dt \int_{-1}^1 g_m(\xi) L_m^*((\xi-x)\lambda^{-1}) d\xi, \quad |x| \leq 1$$

вида $g_m(x) = G_m(x)(1-x^2)^{m-1/2}$, где $G_m(x) \in C_n[-1, 1]$ при условии (3.4), (3.2) и наоборот. Здесь

$$\frac{d^{2m-1} \Phi_m}{dx^{2m-1}} = \varphi_m(x), \quad L_m^*(t) = (-1)^m \lambda^{2m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_m^{(k)}}{b_m^{(k)}} t^{2k+2m-1} \\ b_1^{(k)} = 2k+1, \quad b_2^{(k)} = (2k+1)(2k+2)(2k+3)$$

При доказательстве необходимо учесть, что если $g(x) \in L_p[-1, 1]$, $p > 1$, то второе слагаемое, стоящее в правой части (3.1), есть непрерывная со всеми производными функция для $x \in [-1, 1]$. Обращая далее оператор в левой части (3.1) по (3.3), получим (3.5).

4. **Большие значения λ .** Воспользуемся формулой (3.5). Решение уравнения (1.4) будем искать в виде ряда по отрицательным степеням λ

$$(4.1) \quad g_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_m^{(k)}(x) \lambda^{-2k}$$

Подставляя (4.1) в (3.5) и приравнявая полученные выражения при одинаковых степенях λ , получим решение с точностью до $O(\lambda^{-6})$, в котором

$$(4.2) \quad \begin{aligned} g_m^{(0)}(x) &= -(-1)^m \pi \int_{-1}^1 R_m(t, x) \Phi_m(t) dt \\ g_1^{(1)}(x) &= -a_1^{(1)} \int_{-1}^1 R_m(t, x) dt \int_{-1}^1 (\xi - t) g_1^{(0)}(\xi) d\xi \\ g_1^{(2)}(x) &= -\int_{-1}^1 R_1(t, x) dt \int_{-1}^1 (\xi - x) \left[\frac{a_1^{(1)}}{3} (\xi - t) g_1^{(0)}(\xi) + \right. \\ &\quad \left. + a_1^{(0)} g_1^{(1)}(\xi) \right] d\xi \\ g_2^{(1)}(x) &= 0, \quad g_2^{(2)} = -\frac{a_2^{(0)}}{6} \int_{-1}^1 R_2(t, x) dt \int_{-1}^1 (t - \xi)^2 g_2^{(0)}(\xi) d\xi \\ g_2^{(3)}(x) &= -\frac{1}{60} \int_{-1}^1 R_2(t, x) dt \int_{-1}^1 [a_2^{(1)} (t - \xi)^5 g_2^{(0)}(\xi) + \\ &\quad + 10a_2^{(0)} (t - \xi)^3 g_2^{(1)}(\xi)] d\xi \end{aligned}$$

и так далее. В важном частном случае $\varphi_m(x) = 1$, учитывая, что $d^m \Phi/dx^m = \varphi_m(x)$, получим с точностью до $O(\lambda^{-2(m+2)})$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} g_m(x) &= \Gamma^{-1}(2m) (1-x^2)^{m-1/2} \left(1 + \sum_{k=1}^{m+1} \omega_m^{(k)}(x) \lambda^{-2k} \right) + O(\lambda^{-2(m+2)}) \\ \omega_1^{(1)} &= \frac{a_m^{(0)}}{2}, \quad \omega_1^{(2)} = \frac{6(a_m^{(0)})^2 + (5+4x^2)a_1^{(1)}}{24} \\ \omega_2^{(1)} &= 0, \quad \omega_2^{(2)} = \frac{a_2^{(0)}}{16}, \quad \omega_2^{(3)} = \frac{a_2^{(1)}(19+6x^2)}{960} \end{aligned}$$

где $a_m^{(k)}$ дается формулами (2.4).

5. Малые значения λ . Нулевой член асимптотики решения интегрального уравнения (1.4) можно построить в виде [15, 16]

$$(5.1) \quad g_m(x) = \lambda^{2m-1} g_{m+} \left(\frac{1-x}{\lambda} \right) g_{m-} \left(\frac{1-x}{\lambda} \right) V_m^{-1} \left(\frac{x}{\lambda} \right)$$

при условии, что $V_m(x) \neq 0$ при $x \leq 1$. Функции $g_{m\pm}(x)$ удовлетворяют интегральным уравнениям Винера—Хопфа, а функция $V_m(x)$ — уравнению свертки

$$(5.2) \quad \int_0^\infty g_{m\pm}(\xi) k_m(\xi - x) d\xi = \pi \varphi_m(\lambda x \pm 1), \quad 0 \leq x < \infty$$

$$(5.3) \quad \int_{-\infty}^\infty V_m(\xi) k_m(\xi - x) d\xi = \pi \varphi_m(\lambda x), \quad |x| < \infty$$

Функция $k_m(z)$ дается формулой (1.5).

Решение интегральных уравнений (5.2), (5.3) для специальной правой части $\varphi_m(\lambda x - 1) = e^{i\eta x}$ найдем при помощи обобщенного преобразования Фурье [5, 6]. Для получения более простого вида решения аппроксимируем функцию $K_m(u)$ ядра интегрального уравнения выражением двух видов

$$(5.4) \quad K_m(u) \approx \frac{r_m(u)}{\sqrt{u^2 + A_m^2}} H_m^{(N)}(u), \quad K_m(u) \approx \frac{ur_{m-1}(u)}{\text{th } A_m u} H_m^{(N)}(u)$$

$$r_m(u) = \prod_{k=1}^m (u^2 + (a_m^{(k)})^2),$$

$$H_m^{(N)}(u) = \prod_{k=1}^N \frac{u^2 + (\delta_m^{(k)})^2}{u^2 + (\gamma_m^{(k)})^2}, \quad r_0(u) = H_m^{(0)}(u) = 1$$

совпадающими с $K_m(u)$ по асимптотическим свойствам (2.1). Постоянные $A_m, a_m^{(k)}, \delta_m^{(k)}, \gamma_m^{(k)}$ находятся из наилучшей аппроксимации $K_m(u)$ этими выражениями на действительной оси. Для аппроксимации $K_m(u)$ (1.5) с 3%-ной ошибкой вдоль действительной оси в данном случае достаточно взять $N = 0$.

В важном частном случае $\varphi_m(x) = 1$ ($\eta = 0$) решение уравнения (5.2) имеет вид ($N = 0$)

$$(5.5) \quad g_{m\pm}(t) = \sqrt{K_m^{-1}(0)} \sum_{k=1}^{m+1} \chi(a_m^{(k)}, a_m^{(m+1-k)}, a_m^{(-k)}, t)$$

$$\chi(u, v, w, t) = \frac{\sqrt{A_m - u}}{(u - v)w} e^{-ut} \operatorname{erf} \sqrt{(A - u)t}$$

$$a_1^{(2)} = 1, \quad a_1^{(-1)} = a_1^{(-2)} = a_1^{(1)}, \quad a_1^{(0)} = -1, \quad a_1^{(2)} = 0$$

$$a_2^{(k)} = a_2^{(-k)}, \quad k = 1, 2; \quad a_2^{(3)} = 0, \quad a_2^{(0)} = a_2^{(1)}, \quad a_2^{(-3)} = -a_2^{(2)}$$

для аппроксимации второго вида (5.4) и

$$(5.6) \quad g_{m\pm}(t) = \frac{2}{\pi} \sqrt{A_m} z \sqrt{1 - z^2} \sum_{k=1}^m a_{m_2}^{(k)} F_1\left(1, 1 - \beta_m^{(k)}, \frac{3}{2}; 1 - z^2\right)$$

$$\beta_1^{(1)} = 0, \quad a_1^{(1)} = \sqrt{A_1}, \quad a_2^{(1)} = -a_2^{(2)} = \beta_2^{(1)} = a_{2_1}^{(1)}/\theta_2, \quad \beta_2^{(2)} = 0$$

$$z = \exp(-t/(2\theta_m)), \quad \theta_m = A_m/\pi$$

для аппроксимации второго вида] (5.4). В частности, при $m = 1$ и $N = 0$ получаем наиболее простой вид решения:

$$g_{1\pm}(t) = 2A_1\pi^{-1} \arcsin \sqrt{1 - \exp(-\pi t A_1^{-1})}$$

Решение уравнения (5.5) легко получается применением обобщенного преобразования Фурье

$$(5.7) \quad V(t) = K^{-1}(0)$$

Таким образом, (5.1), (5.5), (5.6), (5.7) дают решение интегрального уравнения (1.4) при малых λ .

В совокупности решения при малых и больших λ дают решение уравнения (1.4) во всем диапазоне $\lambda \in (0, \infty)$. Характер полученного решения при приближении к краю:

$$(5.8) \quad g_m(x) = C (1 - x^2)^{m-1/2} \text{ при } |x| \rightarrow 1, \quad C = \text{const}$$

6. Численный анализ полученных решений. Проведенный на ЭВМ анализ показывает, что полученные решения интегрального уравнения для больших и малых λ стыкуются при $\lambda \in [1, 2]$, как это следовало ожидать из теоретических соображений. При анализе решений была использована первая форма аппроксимации (5.4). В случае $m = 1$ решение для малых λ имеет следующие значения параметров: $A_1 = 2,4236$, $a_1^{(1)} = 1,4486$, а для решения при больших λ $a_0 = -0,5521$, $a_1 = 0,1911$. В случае $m = 2$ параметры следующие: $A_2 = 4,5$, $a_2^{(1)} = 1,6927$, $a_2^{(2)} = 2,020$ для малых λ и $a_0 = -10,012$, $a_1 = 26,1971$. При стыковке погрешность решений не превышает погрешности аппроксимации, т. е. 3%.

7. Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). Полученные решения позволяют привести асимптотические формулы КИН. Для рассматриваемых задач А, Б КИН $K = K_1 - iK_2$ по терминологии [10] вы-

числяется по формулам (δ — большие λ , μ — малые λ)

$$(7.1) \quad K_m^\delta = p_m g_m^\delta(\lambda) a^{m-1/2}, \quad K_m^\mu = p_m g_m^\mu\left(\frac{2}{\lambda}\right) h^{m-1/2}, \quad m p_m = 6 \varphi_m^\circ h_0^2$$

$$g_m^\delta(t) = \Gamma^{-1}(2m) \left[1 + \sum_{k=1}^{m+1} \omega_m^{(k)}(t) \lambda^{-2k} \right],$$

$$g_m^\mu(t) = \sum_{k=1}^{m+1} \chi(a_m^{(k)}, a_m^{(m+1-k)}, a_m^{(-k)}, t)$$

в которых φ_1° — распределенный момент по берегу трещины, φ_2° — распределенная перерезывающая сила, h_0 — толщина пластинки, $\omega_m^{(k)}(x)$ из (4.3), $\chi(u, v, w, t)$ из (5.5). Стыковка асимптотических формул (7.1) для больших и малых λ происходит при $\lambda \in [1, 2]$ с погрешностью до 5%. Заметим, что коэффициент K_m^δ пропорционален $a^{m-1/2}$, а K_m^μ — $h^{m-1/2}$.

8. Другие задачи о разрезах, приводящие к интегральному уравнению (1.4). Укажем две практически важные задачи типа Б, решение которых сводится к решению интегрального уравнения (1.4).

Задача Б'. Рассматривается такая же в плане пластинка с разрезом длины $2a$, расположенным на оси симметрии ($y = h$). Раскрытие разреза достигается смещением боковой грани пластины ($y = 2h, x < \infty$) по оси Oz на величину $2H$ по отношению к боковой грани ($y = 0$). Боковые грани пластины при этом жестко заземлены. Требуется определить смещение берега разреза $H = g_2'(x), x < a$.

Задача Б''. Рассматривается задача о раскрытии разреза длины $2a$, расположенного на оси симметрии ($y = h$) пластины в виде полосы ($0 \leq y \leq 2h, |x| < \infty$). Боковые грани пластины ($y = 0, y = 2h$) заземлены и повернуты на угол β . Требуется определить смещение $g_2''(x)$ берега разреза.

Сформулированные задачи при помощи обобщенного преобразования Фурье [13] или метода суперпозиции решений однородной и неоднородной задач [3] могут быть приведены к решению интегрального уравнения (1.4). Решения задач при этом выражаются через полученные решения интегральных уравнений (1.4) $g_m(x)$ по формулам $g_2'(x) = \gamma H K_2(0) h^{-3} \times \times g_2(x)$ (задача Б'), $g_2''(x) = \gamma \beta K_2(0) h^{-2} g_2(x)$ (задача Б''), где $\gamma = 2(1 - \nu)^{-1}(3 + \nu)^{-1} D^{-1}$.

Заметим, что коэффициенты задач Б', Б'' пропорциональны следующим геометрическим параметрам: $K_2'^\delta \sim a^{3/2} h^{-3} H$, $K_2'^\mu \sim h^{-3/2} H$, $K_2''^\delta \sim a^{3/2} h^{-2}$, $K_2''^\mu \sim h^{-1/2}$.

Автор благодарит В. М. Александрова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. К теории равновесных трещин в упругом слое // Концентрация напряжений. Киев: Наук. думка. 1965. Т. 1. С. 39—45.
2. Сметанин Б. И. Две щели в полосе конечной ширины // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 366—369.
3. Александров В. М., Сметанин Б. И. О равновесных продольных трещинах в пластинках // Труды 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука. 1966. С. 20—24.
4. Онищук О. В., Попов Г. Я., Фаршайт П. Г. Об особенностях контактных усилий при изгибе пластины с тонкими включениями // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 293—302.
5. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука. 1977. 287 с.
6. Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решений дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит. 1962. 279 с.
7. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 448 с.

8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука. 1977. 640 с.
9. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
10. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука. 1974. 640 с.
11. Sih G. C., Paris P. C., Erdogan F. Crack-tip stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems // Trans ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V. 29. No. 2. P. 306—312.
12. Линьков А. М., Меркулов В. А. Задачи об изгибе пластин с разрезами // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 111—112.
13. Виленкин Н. Я., Горин Е. А., Костюченко А. Г. и др. Функциональный анализ. М.: Наука. 1964. 424 с.
14. Онищук О. В., Попов П. Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141—150.
15. Ворovich И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука. 1974. 455 с.
16. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 95—107.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
22.IV.1986