Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 539.375

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О СЖАТИИ МАТЕРИАЛА ВДОЛЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ КРУГОВЫХ ТРЕЩИН

Назаренко В. М.

Рассматривается неосесимметричная задача о двухосном равномерном сжатии материала вдоль периодической системы параллельных круговых трещин. Используется критерий разрушения [1, 2] в рамках линеаризованной теории устойчивости, согласно которому начало разрушения материала при сжатии вдоль трещин характеризуется локальной потерей устойчивости возле трещин. Ранее в рамках указанного подхода рассматривались для разных моделей материалов (высокоэластических, композитных, пластических) осесимметричные и плоские задачи для одной и двух внутренних трещин, приповерхностных трещин, периодической системы трещин [1—13] [1]. Исследование проводится в общей форме для произвольного вида упругого потенциала для сжимаемых и несжимаемых материалов, теории больших и вариантов малых докритических деформаций и допускает обобщения на другие модели деформируемого тела (композиты, пластические тела и др.) [1].

1. Постановка задачи. Исследуется разрушение материала, ослабленного периодической системой параллельных дискообразных соосных трещин $\{r < a,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ x_3 = 2hn,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ при двухосном равномерном сжатии в плоскостях, параллельных трещинам. Используются лагранжевы координаты x_j $(j = 1, 2, 3)$, совпадающие в недеформированном состоянии с декартовыми; симметричный тензор напряжений $\mathbf{S}^\circ$, отнесенный к единице площади тела в недеформированном состоянии; $\mathbf{u}$, $\mathbf{t}$ — возмущение вектора перемещения и несимметричного тензора напряжений Кирхгофа соответственно; r, θ, x_3 — цилиндрические координаты, получаемые из декартовых x_j $(j = 1, 2, 3)$.

Реализуемое однородное докритическое состояние определяется соотношениями [1]

$$S_{33}^\circ = 0,\ S_{11}^\circ = S_{22}^\circ \neq 0,\ S_{11}^\circ = \mathrm{const} \tag{1.1}$$
$$u_j^\circ = \delta_{jm}(\lambda_j - 1)\,x_m;\quad \lambda_j = \mathrm{const};\quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$$

(λ_j — удлинения вдоль осей, $\lambda_1 < 1$). Берега трещин свободны от напряжений. Граничные условия линеаризованной задачи имеют вид

$$t_{33} = t_{3r} = t_{3\theta} = 0(x_3 = (2hn)_\pm,\ r < a,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi) \tag{1.2}$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где индексами плюс и минус отмечены соответствующие берега трещин.

В связи с периодичностью геометрической и силовой схем задачи, рассматривая также отдельно (в силу линейности задачи и симметрии ее от-

[1] См. также: *Назаренко В. М.* Осесимметричная задача механики разрушения материалов при сжатии вдоль периодической системы параллельных трещин (неравные корни) // Тр. XI науч. конф. молодых ученых Ин-та механ. АН УССР. Киев, 1986. С. 154—161.— Деп. в ВИНИТИ 28.07.86; № 5507-86.

Назаренко В. М., Стародубцев И. П. О разрушении материалов при сжатии вдоль двух параллельных трещин в случае плоской деформации // Неклассические и смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы семинара молодых ученых. Киев, 1985. С. 142—145.— Деп. в ВИНИТИ 29.07.85; № 5531-85.

носительно плоскости $x_3 = 0$) симметричные и антисимметричные относительно этой плоскости поля напряжений и перемещений, сводим исходную задачу к задаче для слоя $0 \leqslant x_3 \leqslant h$ отдельно для симметричной и изгибной форм потери устойчивости со следующими граничными условиями (везде $0 \leqslant \theta < 2\pi$):

симметричная форма

$$\begin{aligned} &u_3 = 0\ (x_3 = 0,\ r > a),\ t_{33} = 0\ (x_3 = 0,\ r < a) \\ &t_{3r} = t_{3\theta} = 0\ (x_3 = 0,\ 0 \leqslant r < \infty) \\ &u_3 = 0,\ t_{3r} = t_{3\theta} = 0\ (x_3 = h,\ 0 \leqslant r < \infty) \end{aligned} \tag{1.3}$$

изгибная форма

$$\begin{aligned} &u_r = u_\theta = 0\ (x_3 = 0,\ r > a) \\ &t_{3r} = t_{3\theta} = 0\ (x_3 = 0,\ r < a) \\ &t_{33} = 0\ (x_3 = 0,\ 0 \leqslant r < \infty) \\ &u_r = u_\theta = 0,\quad t_{33} = 0\quad (x_3 = h,\quad 0 \leqslant r < \infty) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Исследование задач (1.3) и (1.4) проведем с привлечением аппарата теории трещин для тел с начальными напряжениями [1].

Представления общих решений линеаризованной задачи для начальных состояний (1.1) через потенциальные функции в круговой цилиндрической системе координат даются соотношениями [1, 6] (ограничились случаем равных корней $n_1^\circ = n_2^\circ$ характеристического уравнения, терминология и обозначения [1, 6])

$$\begin{aligned} &u_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} - z_1\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta},\quad u_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \\ &- z_1\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial r} \\ &u_3 = (n_1^\circ)^{-1/2}(m_1^\circ - m_2^\circ + 1)F - m_1^\circ(n_1^\circ)^{-1/2}\Phi - m_1^\circ(n_1^\circ)^{-1/2}z_1\frac{\partial F}{\partial z_1} \\ &t_{33} = c_{44}^\circ\left[(d_1l_1^\circ - d_2l_2^\circ)\frac{\partial F}{\partial z_1} - d_1l_1^\circ\frac{\partial\Phi}{\partial z_1} - d_1l_1^\circ z_1\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}\right] \\ &t_{3\theta} = c_{44}^\circ\left\{(n_1^\circ)^{-1/2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}[(d_1 - d_2)F - d_1\Phi] - \right. \\ &\left. - (n_1^\circ)^{-1/2}d_1z_1\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial z_1} + (n_3^\circ)^{-1/2}d_3\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial r\partial z_3}\right\}, \\ &t_{3r} = c_{44}^\circ\left\{(n_1^\circ)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial r}[(d_1 - d_2)F - d_1\Phi] - \right. \\ &\left. - (n_1^\circ)^{-1/2}d_1z_1\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z_1} - (n_3^\circ)^{-1/2}d_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial\theta\partial z_3}\right\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Потенциальные функции $\varphi(r, \theta, z_1)$, $\Phi(r, \theta, z_1)$, $F(r, \theta, z_1)$, $\varphi_3(r, \theta, z_3)$ являются гармоническими функциями своих аргументов, и

$$\Phi \equiv \partial\varphi/\partial z_1;\ z_i = (n_i^\circ)^{-1/2}x_3,\ i = 1, 3 \tag{1.6}$$

Входящие в представления (1.5) величины n_1°, n_3°, m_j°, l_j°, d_j ($j = 1, 2$) определяются выбором упругого потенциала (с соответствующими упрощениями для вариантов теории малых докритических деформаций) или, в общем случае, выбором модели деформируемого тела [1]. Поступим как обычно принято в классической теории упругости при исследовании неосесимметричных задач [14—16]: представим гармонические потенциальные функции в виде ряда по гармоникам аргумента θ с коэффициентами в виде интегральных разложений Ганкеля по координате r соответствующего номеру гармоники порядка (здесь и далее суммирование по n проводится от 0 до ∞)

(1.7) $$\varphi(r,\theta,z_1)=-\sum\cos n\theta\int_0^\infty[B_n^{(1)}(\lambda)\operatorname{sh}\lambda(h_1-z_1)+ B_n^{(2)}(\lambda)\operatorname{ch}\lambda(h_1-z_1)]J_n(\lambda r)\frac{d\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda h_1}$$

$$F(r,\theta,z_1)=\sum\cos n\theta\int_0^\infty[A_n^{(1)}(\lambda)\operatorname{ch}\lambda(h_1-z_1)+ A_n^{(2)}(\lambda)\operatorname{sh}\lambda(h_1-z_1)]J_n(\lambda r)\frac{d\lambda}{\operatorname{sh}\lambda h_1}$$

$$\varphi_3(r,\theta,z_3)=\sum\sin n\theta\int_0^\infty[C_n^{(1)}(\lambda)\operatorname{ch}\lambda(h_3-z_3)+ C_n^{(2)}(\lambda)\operatorname{sh}\lambda(h_3-z_3)]J_n(\lambda r)\frac{d\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\lambda h_3}$$

$$(h_j=(n_j^\circ)^{-1/2}h,\ j=1,3)$$

где $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$, $C_n^{(i)}$ — неизвестные функции. Представление для функции $\Phi(r,\theta,z_1)$ следует из (1.6).

2. Система парных интегральных уравнений. Проведем исследование поставленных для симметричной и изгибной форм потери устойчивости задач (1.3) и (1.4), сводя их предварительно для каждой гармоники к парным интегральным уравнениям, а затем — к уравнениям Фредгольма второго рода. В связи с громоздкостью выкладок процедуру исследования представим на примере задачи (1.4) для изгибной формы.

Удовлетворяя граничным условиям, заданным на всей плоскости $x_3=\mathrm{const}$ (или $z_i=\mathrm{const}$, $i=1,3$) — две последние строки в (1.4), получаем четыре уравнения, связывающие функции $A_n^{(j)}$, $B_n^{(j)}$, $C_n^{(j)}$, $j=1,2$. Используя соотношение

(2.1) $$J_\nu'(z)=-J_{\nu+1}(z)+\nu z^{-1}J_\nu(z)$$

и приравнивая нулю выражения при $\sin n\theta$, $\cos n\theta$, получим, что указанные уравнения выполняются тождественно, если

(2.2) $$C_n^{(1)}=0,\quad B_n^{(2)}=\lambda h_1A_n^{(1)},\quad A_n^{(2)}=0,$$
$$B_n^{(1)}=\left[\left(1-\frac{d_2l_2^\circ}{d_1l_1^\circ}\right)-\lambda h_1\operatorname{cth}\lambda h_1\right]A_n^{(1)}$$

Оставшиеся граничные условия в (1.4) (две первые строки) приводят (учитывая (1.5), (1.7), (2.2)) к системе парных уравнений

(2.3) $$\Sigma\cos n\theta\int_0^\infty\left[(B_n^{(1)}+B_n^{(2)}\operatorname{cth}\lambda h_1)\frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial(\lambda r)}- \frac{n}{\lambda r}C_n^{(2)}J_n(\lambda r)\right]d\lambda=0,\quad r>a$$

$$\Sigma\sin n\theta\int_0^\infty\left[-\frac{n}{\lambda r}(B_n^{(1)}+B_n^{(2)}\operatorname{cth}\lambda h_1)J_n(\lambda r)+ C_n^{(2)}\frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial(\lambda r)}\right]d\lambda=0,\quad r>a$$

$$\Sigma\cos n\theta\int_0^\infty\Big\{(n_1^\circ)^{-1/2}\Big[(d_1-d_2)A_n^{(1)}\operatorname{cth}\lambda h_1- d_1(B_n^{(1)}\operatorname{cth}\lambda h_1+B_n^{(2)})\Big]\frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial(\lambda r)}+ (n_3^\circ)^{-1/2}d_3\frac{n}{\lambda r}C_n^{(2)}\operatorname{cth}\lambda h_3J_n(\lambda r)\Big\}\lambda\,d\lambda=0,\quad r<a$$

$$\Sigma \sin n\theta \int_0^\infty \Big\{ -(n_1^\circ)^{-1/2} \frac{n}{\lambda r} [(d_1 - d_2) A_n^{(1)} \operatorname{cth} \lambda h_1 -$$
$$- d_1 (B_n^{(1)} \operatorname{cth} \lambda h_1 + B_n^{(2)})] J_n(\lambda r) -$$
$$- (n_3^\circ)^{-1/2} d_3 C_n^{(2)} \operatorname{cth} \lambda h_3 \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial (\lambda r)} \Big\} \lambda \, d\lambda = 0, \quad r < a$$

Заметим, что при выборе общих решений в форме типа (1.5), когда потенциальные функции выбираются в виде (1.7) суммы тригонометрических функций, умноженных на интегральные разложения Ганкеля, компоненты u_r, u_θ, t_{3r}, $t_{3\theta}$ с учетом соотношений (2.1) и

$$2\nu z^{-1} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)$$

представляются в общем виде в форме (аналогичной представлению [14] в классическом случае)

$$u_r = \Sigma \cos n\theta \, (K_{n+1} - L_{n-1}), \quad u_\theta = \Sigma \sin n\theta \, (K_{n+1} + L_{n-1})$$
$$t_{3r} = c_{44}{}^\circ \Sigma \cos n\theta \, (U_{n+1} - V_{n-1}), \quad t_{3\theta} = c_{44}{}^\circ \Sigma \sin n\theta \, (U_{n+1} + V_{n-1})$$

Здесь K_{n+1}, U_{n+1} — интегральные преобразования Ганкеля порядка $(n+1)$; L_{n-1}, V_{n-1} — порядка $(n-1)$. Поэтому два условия типа $u_r = 0$, $u_\theta = 0$ (или $t_{3r} = 0$, $t_{3\theta} = 0$) при $z_i = \text{const}$ можно, приравнивая нулю коэффициенты при $\sin n\theta$, $\cos n\theta$, переформулировать к виду $K_{n+1} = 0$, $L_{n-1} = 0$ (или $U_{n+1} = 0$, $V_{n-1} = 0$) при $z_i = \text{const}$.

Учитывая изложенное выше, заключаем, что парные уравнения (2.3) распадаются на отдельные уравнения, соответствующие каждой n-й гармонике по переменной θ

$$(2.4) \qquad \int_0^\infty X_\pm J_{n\pm1}(\lambda r) \, d\lambda = 0, \quad r > a; \quad X_\pm = \left(1 - \frac{d_2 l_2^\circ}{d_1 l_1^\circ}\right) A_n^{(1)} \pm C_n^{(2)}$$

$$(2.5) \qquad \int_0^\infty \{(n_1^\circ)^{-1/2} d_1 A_n^{(1)} [-k \operatorname{cth} \mu_1 + \mu_1 (\operatorname{cth}^2 \mu_1 - 1)] \mp$$
$$\mp (n_3^\circ)^{-1/2} d_3 C_n^{(2)} \operatorname{cth} \mu_3\} J_{n\pm1}(\lambda r) \lambda \, d\lambda = 0, \quad r < a$$
$$n = 1, 2, \ldots; \quad \mu_j = \lambda h_j, \quad j = 1, 3; \quad k = (l_1^\circ -$$
$$- l_2^\circ) \, d_2 \, (d_1 l_1^\circ)^{-1}$$

Случай осесимметричной задачи ($n = 0$) для системы парных уравнений (2.4), (2.5) является особым, поскольку в этом случае в системе следует сохранить лишь уравнения с верхними знаками, полагая в них $C_0^{(2)} = 0$, так как $\sin n\theta \equiv 0$ при $n = 0$, см. (2.3). Этот результат следует также и непосредственно из системы (2.4), (2.5) при $n = 0$, если учесть, что $J_{-1}(z) = -J_1(z)$. Осесимметричный случай подробно обсужден ранее [13], и поэтому в дальнейшем на нем останавливаться не будем.

3. Решение системы парных уравнений. Получение интегральных уравнений Фредгольма. Одним из приемов решения парных интегральных уравнений является метод подстановки, заключающийся в данном случае в том, что $X_\pm$ выбираются в таком виде, чтобы соотношения (2.4) удовлетворялись тождественно. Два оставшихся соотношения (2.5) обычно преобразуются специальными приемами к интегральным уравнениям Абеля (для неосесимметричных задач прием продемонстрирован в [15]) либо интегральным уравнениям Шлемильха (см. [17], где рассмотрены парные уравнения для функций Бесселя одинакового порядка), решения которых и дают искомые уравнения Фредгольма второго рода.

Ниже будет использоваться прием [17], основанный на получении уравнения Шлемильха, модернизированный на случай парных уравнений (2.4), (2.5), в которые входят функции Бесселя разных порядков (($n+1$) и ($n-1$)).

Представим решения рассматриваемой системы парных интегральных уравнений в виде ($\varphi_\pm(t)$ — неизвестные функции)

$$X_\pm=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\lambda^{1\pm1/2}\int_0^a t^{1/2}\varphi_\pm(t)\,J_{n\pm1/2}(\lambda t)\,dt \tag{3.1}$$

В дальнейшем понадобятся соотношения [18]

$$t^{\mp\nu}\frac{d}{dt}\left[t^{\pm\nu}J_\nu(\xi t)\right]=\pm\,\xi J_{\nu\mp1}(\xi t) \tag{3.2}$$

частный случай разрывного интеграла Вебера — Шафхейтлина и интеграл Сонина

$$\int_0^\infty \lambda^{1/2}J_\nu(\lambda x)\,J_{\nu-1/2}(\lambda y)\,d\lambda=\begin{cases}0, & 0<x<y\\ \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{1/2}\dfrac{y^{\nu-1/2}}{x^\nu(x^2-y^2)^{1/2}}, & 0<y<x\end{cases} \tag{3.3}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,J_{n-1}(\lambda x\sin\theta)\,d\theta=\left(\frac{\pi}{2\lambda x}\right)^{1/2}J_{n-1/2}(\lambda x) \tag{3.4}$$

Выбор решения в форме (3.1) позволяет удовлетворить, с учетом (3.2), (3.3) и интегрирования по частям, соотношениям (2.4). Выразим $A_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ через $X_\pm$. Подстановка в (2.5) дает уравнения

$$\int_0^\infty (P_\pm X_+ + P_\mp X_-)\,J_{n\pm1}(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda=0,\quad r<a \tag{3.5}$$

$$P_\pm=\frac{1}{2}\left[-ks\mp q+s\left(-kI(\mu_1)+J(\mu_1)\right)\mp qI(\mu_3)\right]$$

$$s=(n_1^\circ)^{-1/2}d_1\left(1-\frac{d_2l_2^\circ}{d_1l_1^\circ}\right)^{-1},\quad q=(n_3^\circ)^{-1/2}d_3$$

$$I(\mu)=\frac{e^{-\mu}}{\operatorname{sh}\mu},\quad J(\mu)=\frac{\mu}{\operatorname{sh}^2\mu}$$

Уравнения (3.5) преобразуем предварительно к интегральным уравнениям Шлемильха, а затем к уравнениям Фредгольма второго рода. Указанную процедуру продемонстрируем на примере уравнения (3.5) с верхними знаками.

Используя (3.2) и интегрирование по частям, представим

$$X_+=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\lambda^{1/2}\left\{a^{1/2}\varphi_+(a)\,J_{n-1/2}(\lambda a)-\int_0^a t^{-n+1/2}\psi_+(t)\,J_{n-1/2}(\lambda t)\,dt\right\} \tag{3.6}$$

$$\lambda J_{n+1}(\lambda r)=-r^n\frac{d}{dr}\left[r^{-n}J_n(\lambda r)\right]$$

а используя (3.3), (3.6), получаем

$$I_\pm\equiv\int_0^\infty X_\pm\lambda J_{n+1}(\lambda r)\,d\lambda=-r^n\frac{d}{dr}r^{-2n}\int_0^r\psi_\pm(t)\frac{dt}{(r^2-t^2)^{1/2}} \tag{3.7}$$

$$\psi_+(t)=\frac{d}{dt}\left[t^n\varphi_+(t)\right],\quad \psi_-(t)=t^n\varphi_-(t)$$

$$J_\pm\equiv\int_0^\infty L_\pm(\lambda)\,X_\pm\lambda J_{n+1}(\lambda r)\,d\lambda,\quad L_\pm(\lambda)=$$

$$=s\left[-kI(\mu_1)+J(\mu_1)\right]\mp qI(\mu_3)$$

Уравнение (3.5) с верхними знаками, имеющее вид в обозначениях (3.7)

$$(-ks-q)\,I_+ + (-ks+q)\,I_- + J_+ + J_- = 0$$

после умножения на r^{-n}, проведения интегрирования по r от 0 до r и умножения на r^n принимает вид

$$(3.8)\qquad (ks+q)\,r^{-n}\int_0^r \psi_+(t)\frac{dt}{(r^2-t^2)^{1/2}} + (ks-q)\,r^{-n}\int_0^r \psi_-(t)\frac{dt}{(r^2-t^2)^{1/2}} +$$
$$+ r^n\int_0^r \rho^{-n}\int_0^\infty L_+(\lambda)\,X_+\lambda J_{n+1}(\lambda\rho)\,d\lambda\,d\rho +$$
$$+ r^n\int_0^r \rho^{-n}\int_0^\infty L_-(\lambda)\,X_-\lambda J_{n+1}(\lambda\rho)\,d\lambda\,d\rho = 0$$

Используя соотношение

$$\int_0^r \frac{d}{dr}\,[r^{-n}J_n(\lambda r)]\,dr = r^{-n}J_n(\lambda r) - \lim_{\rho\to 0}\rho^{-n}J_n(\lambda\rho) =$$
$$= r^{-n}J_n(\lambda r) - \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n$$

и сделав подстановку $t = r\sin\theta$, получаем из (3.8)

$$(3.9)\qquad (ks+q)\int_0^{\pi/2}\psi_+(r\sin\theta)\,d\theta + (ks-q)\int_0^{\pi/2}\psi_-(r\sin\theta)\,d\theta = N(r)$$

$$N(r) = r^n\int_0^\infty (L_+(\lambda)\,X_+ + L_-(\lambda)\,X_-)\left[J_n(\lambda r) - \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^n\right]d\lambda$$

Уравнение Шлемильха

$$\int_0^{\pi/2} f(r\sin\theta)\,d\theta = N(r)\qquad (0\leqslant r\leqslant a)$$

имеет решение

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left[N(0) + x\int_0^{\pi/2} N'(x\sin\theta)\,d\theta\right]$$

В рассматриваемом случае

$$f(x) = (ks+q)\psi_+(x) + (ks-q)\psi_-(x),\quad N(0) = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} N'(x\sin\theta)\,d\theta = \int_0^\infty (L_+(\lambda)\,X_+ + L_-(\lambda)\,X_-)\times$$
$$\times\left[x^{n-1/2}\lambda^{1/2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}J_{n-1/2}(\lambda x) - \frac{2n}{n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n x^{2n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}\theta\,d\theta\right]d\lambda$$

(использован интеграл Сонина (3.4)). С учетом соотношения [19]

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2\nu-1}\theta\,d\theta = \frac{\pi^{1/2}}{2}\,\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+1/2)}$$

и используя представление для X_+ в виде (3.6) и X_- в виде (3.1), получаем искомое уравнение Фредгольма второго рода

$$(3.10)\qquad (ks+q)\psi_+(x)+(ks-q)\psi_-(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^a \psi_+(t)M_{11}(x,t)\,dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^a \psi_-(t)M_{12}(x,t)\,dt=0,\quad 0\leqslant x\leqslant a,\quad n=1,2,3,\ldots$$

с ядрами

$$(3.11)\qquad M_{11}(x,t)=\pi x\int_0^\infty L_+(\lambda)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1/2}[t^{-n+1/2}J_{n-1/2}(\lambda t)-a^{-n+1/2}J_{n-1/2}(\lambda a)]\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n\frac{x^{2n-1}}{\Gamma(n+1/2)}-x^{n-1/2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1/2}J_{n-1/2}(\lambda x)\right]d\lambda$$

$$M_{12}(x,t)=\pi x t^{-n+1/2}\int_0^\infty L_-(\lambda)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1/2}J_{n-1/2}(\lambda t)\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n\frac{x^{2n-1}}{\Gamma(n+1/2)}-\right.$$

$$\left.-x^{n-1/2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1/2}J_{n-1/2}(\lambda x)\right]d\lambda$$

Совершенно аналогично из уравнения (3.5) с нижними знаками получаем второе уравнение Фредгольма

$$(3.12)\qquad (ks-q)\psi_+(x)+(ks+q)\psi_-(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^a \psi_+(t)M_{21}(x,t)\,dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^a \psi_-(t)M_{22}(x,t)\,dt=0,\quad 0\leqslant x\leqslant a,\quad n=1,2,3,\ldots$$

с ядрами

$$(3.13)\qquad M_{21}(x,t)=\frac{\pi}{2}x^{n+1/2}\int_0^\infty L_-(\lambda)\lambda\,[a^{-n+1/2}J_{n-1/2}(\lambda a)-$$

$$-t^{-n+1/2}J_{n-1/2}(\lambda t)]\,J_{n-1/2}(\lambda x)\,d\lambda$$

$$M_{22}(x,t)=-\frac{\pi}{2}x^{n+1/2}t^{-n+1/2}\int_0^\infty L_+(\lambda)\lambda J_{n-1/2}(\lambda t)J_{n-1/2}(\lambda x)\,d\lambda$$

Записав полусумму и полуразность уравнений (3.10), (3.12), получаем разрешающую систему интегральных уравнений в виде

$$(3.14)\qquad \psi_+(x)+\psi_-(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^a \psi_+(t)K_{11}(x,t)\,dt+\frac{2}{\pi}\int_0^a \psi_-(t)K_{12}(x,t)\,dt=0$$

$$\psi_+(x)-\psi_-(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^a \psi_+(t)K_{21}(x,t)\,dt+\frac{2}{\pi}\int_0^a \psi_-(t)K_{22}(x,t)\,dt=0$$

$0\leqslant x\leqslant a$, $n=1, 2, 3, \ldots$

$K_{11}(x, t)=[M_{11}(x, t)+M_{21}(x, t)]/(2ks)$, $K_{12}(x, t)=$
$=[M_{12}(x, t)+M_{22}(x, t)]/(2ks)$

$K_{21}(x, t)=[M_{11}(x, t)-M_{21}(x, t)]/(2q)$, $K_{22}(x, t)=$
$=[M_{12}(x, t)-M_{22}(x, t)]/(2q)$

Исследование задачи (1.3) для симметричной формы приводит [17] к уравнению

$$(3.15)\qquad \varphi(x)-\frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi(t)K(x,t)\,dt=0,\quad 0\leqslant x\leqslant a,\quad n=1,2,3\ldots$$

$$K(x,t)=\frac{\pi}{2}x^{1/2}t^{1/2}\int_0^\infty \lambda g(\lambda)J_{n+1/2}(\lambda t)J_{n+1/2}(\lambda x)\,d\lambda$$

$$g(\lambda)=-I(\mu_1)-k^{-1}J(\mu_1)$$

Таким образом, исходные задачи (1.3) и (1.4) сводятся соответственно к совокупности задач (3.15) и (3.14) на собственные значения относительно параметра укорочения $\lambda_1 < 1$ для каждой n-й гармоники ($n = 1, 2, \ldots$). Ядра $K_{ij}(x, t)$ $(i, j = 1, 2)$ и $K(x, t)$ полученных интегральных уравнений непрерывны всюду, исключая точки, удовлетворяющие условиям $k(\lambda_1)q(\lambda_1) = 0$ и $k(\lambda_1) = 0$. Первое определяет значение $\lambda_1{}^* < 1$, соответствующее поверхностной неустойчивости полупространства [20], а второе — значение $\lambda_1{}^{*ax} \leqslant \lambda_1{}^*$, соответствующее поверхностной неустойчивости полупространства на основе рассмотрения только осесимметричной линеаризованной задачи.

Получаемые при исследовании задач на собственные значения критические величины λ_1 согласно принятому критерию разрушения соответствуют началу разрушения материала, ослабленного периодической системой параллельных трещин, при сжатии вдоль последних.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гузь А. Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка. 1983. 296 с.
2. *Гузь А. Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин: Плоская задача // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1981. Т. 259. № 6. С. 1315—1318.
3. *Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Осесимметричная задача о разрушении полупространства с поверхностной дискообразной трещиной //Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1984. Т. 274. № 1. С. 38—41.
4. *Гузь А. Н., Кнюх В. И., Назаренко В. М.* Пространственная осесимметричная задача о разрушении материала с двумя дискообразными трещинами при сжатии вдоль трещин // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 11. С. 20—30.
5. *Гузь А. Н., Назаренко В. М.* К теории приповерхностного отслаивания композитов при сжатии вдоль макротрещин // Механика композит. материалов. 1985. № 5. С. 826—833.
6. *Guz A. N., Nazarenko V. M.* Symmetric failure of the halfspace with penny-shaped cracks in compression // Theor. Appl. Fract. Mech. 1985. V. 3. No. 3. P. 233—245.
7. *Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Пространственная задача о пластическом приповерхностном разрушении материалов при сжатии вдоль макротрещин // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1985. Т. 284. № 4. С. 812—815.
8. *Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Разрушение материалов при сжатии вдоль периодической системы трещин в условиях плоской деформации // ПММ. 1987. Т. 51. № 2. С. 323—329.
9. *Назаренко В. М.* Взаимовлияние приповерхностной круговой трещины и свободной границы в осесимметричной задаче разрушения несжимаемого полупространства при сжатии вдоль плоскости трещины // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 2. С. 30—35.
10. *Назаренко В. М.* О разрушении композиционных материалов с приповерхностными трещинами при сжатии вдоль плоскости трещин // Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них: Тез. докл. 2-го Всесоюз. науч.-техн. семинара. Киев: Наук. думка. 1984. С. 42—43.
11. *Назаренко В. М.* Пластическое разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностных макротрещин // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 3. С. 53—59.
12. *Кнюх В. И., Назаренко В. М.* К вопросу разрушения пластических материалов при сжатии вдоль двух параллельных трещин // Всесоюз. школа-семинар «Математическое моделирование в науке и технике»: Тез. докл. Пермь: УНЦ АН СССР. 1986. С. 168—169.
13. *Гузь А. Н., Назаренко В. М.* О разрушении материала при сжатии вдоль периодической системы параллельных круговых трещин // Прикл. механика, 1987. Т. 23. № 4. С. 67—74.
14. *Muki R.* Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semi-infinite solid and a thick plate // Progress in solid mechanics. V. 1. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. 1960. P. 399—439.
15. *Srivastava K. N., Palaiya R. M.* Asymmetric distribution of thermal stress in a semi-infinite elastic solid containing a penny-shaped crack // Z. angew. Math. und Mech. 1970. B. 50. H. 12. S. 721—735.
16. *Kassir M. K., Sih G. C.* Mechanics of fracture. V. 2. Three dimensional crack problems. Leyden: Noordhoff Intern. Publ. 1975. 452 p.
17. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука. 1977. 220 с.
18. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука. 1974.
19. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1981. 798 с.
20. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка. 1973. 270 с.

Киев Поступила в редакцию 10.XI.1986