Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 539.375

КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Победря Б. Е.

Предлагаются критерии прочности анизотропных материалов как обобщения известных феноменологических критериев для изотропной среды, основанных на введении некоторых функций от инвариантов тензора напряжений.

1. Общеизвестна точка зрения, согласно которой композит трактуется как некоторое приведенное однородное тело [1, 2]. При этом если даже каждый компонент композита изотропный, приведенное тело обладает анизотропией, которую принято называть структурной [2].

Для изотропных материалов разработано достаточно большое число критериев прочности, в той или иной степени согласующихся с экспериментальными данными [3, 4]. Большинство из них основано на введении некоторой функции, зависящей от тензора напряжений, которая описывает в пространстве напряжений поверхность, ограничивающую безопасные напряженные состояния

$$F(Y_1, Y_2, Y_3) = 0 \tag{1.1}$$

Функция (1.1), разумеется, должна зависеть еще от температуры и, возможно, других параметров физико-химической природы. Однако ниже будем для простоты считать все эти параметры фиксированными. Здесь Y_α ($\alpha = 1, 2, 3$) — три независимых инварианта симметричного тензора напряжений [5], в качестве которых могут быть выбраны, например

$$Y_1 = \Theta = \sigma_{ii}, \quad Y_2 = \sigma_u = (s_{ij}s_{ij})^{1/2}, \quad Y_3 = \det|s_{ij}| \tag{1.2}$$

где σ_u — интенсивность тензора напряжений $\|\sigma_{ij}\|$; по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3.

Иногда предполагается, что от третьего инварианта Y_3 функция F не зависит и критерий (1.1) представляется в виде

$$f(\sigma_u) = K(\Theta) \tag{1.3}$$

где K — некоторая «константа» материала, зависящая от гидростатического давления Θ. В простейшем случае функцию f полагают линейной, так что критерий (1.3) принимает вид

$$\sigma_u = K(\Theta) \tag{1.4}$$

При рассмотрении феноменологических критериев разрушения анизотропных сред иногда пользуются так называемой тензорно-полиномиальной формулировкой [2, 6—8]

$$(F_{ij}^{(0)}\sigma_{ij})^{\alpha_0} + (F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^{\alpha_1} + (F_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn})^{\alpha_2} + \ldots = 1 \tag{1.5}$$

где $\mathbf{F}^{(q)}$ — тензоры ранга $2(q+1)$, называемые тензорами прочности, а α_q — некоторые постоянные ($q = 0, 1, \ldots$). Чаще всего в (1.5) полагают $q < 2$. Тогда из представления (1.5) в случае изотропной среды не следует не только критерий (1.1), но даже критерии (1.3) и (1.4).

Ниже предлагаются новые критерии прочности анизотропных материалов как обобщение критериев (1.1), (1.3), (1.4).

2. Рассмотрим сначала трансверсально-изотропный материал (ТИМ). Пусть ось его трансверсальной изотропии характеризуется вектором с компонентами c_i в некоторой прямоугольной декартовой системе координат.

Для ТИМ симметричный тензор напряжений имеет пять независимых инвариантов [5], два из которых линейные и два квадратичные [9]:

$$\sigma = c_i\sigma_{ij}c_j, \ \bar{\sigma} = {}^1\!/_2\sigma_{ij}\,(\delta_{ij} - c_ic_j)$$
$$Q = (Y - \sigma^2)^{1/2}, \ \ P = [\sigma_{ij}\sigma_{ij} + \sigma^2 - 2\,(Y + \bar{\sigma}^2)]^{1/2}$$
$$(Y \equiv c_i\sigma_{ik}\sigma_{kj}c_j)$$

Тогда для ТИМ критерий, соответствующий критерию (1.1) для изотропной среды, можно записать в виде

$$F\,(\sigma, \ \bar{\sigma}, \ P, \ Q, \ Y_3) = 0 \tag{2.1}$$

где Y_3 определяется, например, в (1.2). Очевидны тождества

$$\Theta \equiv \sigma + 2\bar{\sigma}, \ \ \sigma_u \equiv [P^2 + 2Q^2 + {}^2\!/_3\,(\sigma - \bar{\sigma})^2]^{1/2}$$

Поэтому критерии (1.3), (1.4) для ТИМ могут быть обобщены в виде

$$\begin{gathered} f\,(P, \ Q, \ |\,\sigma - \bar{\sigma}\,|) = K\,(\sigma, \ \bar{\sigma}) \\ P^2 + \alpha_1Q^2 + \alpha_2\,(\sigma - \bar{\sigma})^2 = K^2\,(\sigma, \ \bar{\sigma}) \\ P^2 + 2Q^2 + 2/3\,(\sigma - \bar{\sigma})^2 = K^2\,(\sigma, \ \bar{\sigma}) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь и далее α_1, ... — некоторые постоянные.

Разумеется, критерии (2.2) можно представить в виде

$$\begin{gathered} f\,(P, \ Q) = K\,(\sigma, \ \bar{\sigma}), \ \ P^2 + \alpha_1Q^2 = K^2\,(\sigma, \ \bar{\sigma}), \ \ P^2 + 2Q^2 = \\ = K^2\,(\sigma, \ \bar{\sigma}) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Однако из (2.3) труднее увидеть связь с критериями (1.3), (1.4) для изотропного случая.

3. Для ортотропных материалов симметричный тензор напряжений имеет (как и в случае самой общей анизотропии) шесть независимых инвариантов $P_1, \ldots, P_6$ [9], причем три из них линейные.

Пусть главные оси ортотропии характеризуются ортонормированным репером с компонентами $c_i^{(\varkappa)}$ ($\varkappa$, $i = 1, 2, 3$). В качестве независимых инвариантов удобно принять.

$$P_\varkappa = c_i^{(\varkappa)}\,\sigma_{ij}c_j^{(\varkappa)}, \ \ P_{\varkappa+3} = (V_iV_i - 2V_\varkappa^2)^{1/2}$$
$$(V_\varkappa \equiv c_i^{(\varkappa)}|\sigma_{ik}\sigma_{kj}c_j^{(\varkappa)}, \ \ \varkappa = 1, 2, 3)$$

Легко устанавливаются тождества

$$\begin{gathered} \Theta \equiv P_1 + P_2 + P_3, \ \ \sigma_u \equiv {}^1\!/_3\,[(P_1 - P_2)^2 + (P_2 - P_3)^2 + \\ + (P_3 - P_1)^2] + P_4^2 + P_5^2 + P_6^2 \end{gathered}$$

Тогда критерий (1.1) для ортотропной среды может быть обобщен в виде

$$F\,(P_1, \ \ldots, \ P_6) = 0 \tag{3.1}$$

а критерии (1.3), (1.4) — в виде

$$\begin{gathered} f\,(P_4, \ P_5, \ P_6, \ |\,P_1 - P_2\,|, \ |\,P_2 - P_3\,|, \ |\,P_3 - P_1\,|) = \\ = K^2\,(P_1, \ \ P_2, \ \ P_3), \ \ P_4^2 + \alpha_1P_5^2 + \alpha_2P_6^2 + \\ + \alpha_3[(P_1 - P_2)^2 + (P_2 - P_3)^2 + (P_3 - P_1)^2] = \\ = K^2\,(P_1, \ \ P_2, \ \ P_3), \ \ P_4^2 + P_5^2 + P_6^2 + \\ + {}^1\!/_3\,[(P_1 - P_2)^2 + (P_2 - P_3)^2 + (P_3 - P_1)^2 = K^2\,(P_1, \ P_2, P_3) \end{gathered} \tag{3.2}$$

И в этом случае критерии (3.2) могут быть представлены в виде

$$f(P_4, P_5, P_6) = K(P_1, P_2, P_3), \; P_4^2 + \alpha_1 P_5^2 + \alpha_2 P_6^2 = K^2(P_1, P_2, P_3), \; P_4^2 + P_5^2 + P_6^2 = K^2(P_1, P_2, P_3) \tag{3.3}$$

хотя из (3.3) труднее увидеть связь с критериями (1.3), (1.4) для изотропной среды.

Заметим также, что критерии (3.1)—(3.3) более общие, чем соответствующие им критерии (2.1)—(2.3): при их формулировке не потребовалось предположения об отсутствии кубичного инварианта (1.2), ибо аргументами функции F (3.1) являются только линейные и квадратичные инварианты.

4. Можно сформулировать аналогичные критерии для среды с произвольной анизотропией. Пусть для рассматриваемой среды тензор напряжений имеет N независимых инвариантов $Q_1, \ldots, Q_N$, причем m из них линейные, $(n - m)$ квадратичные $(m \leqslant 3)$. При этом под величинами Q_i $(i = 1, \ldots, N)$ понимаются совместные инварианты тензора напряжений с тензорами, задающими геометрическую симметрию среды. Такие тензоры для всех текстур и сингоний выписаны в работе [10], из которой также следует, что N — конечное число. Тогда обобщение критерия (1.1) будет выглядеть так:

$$F(Q_1, \ldots, Q_N) = 0 \tag{4.1}$$

Вводим дополнительно постулат квазилинейности [9], который применительно к (4.1) заключается в том, что F зависит только от линейных и квадратичных инвариантов, причем $N \leqslant 6$.

После этого можно сформулировать обобщение критерия (1.3)

$$f(Q_{m+1}, \ldots, Q_n) = K(Q_1, \ldots, Q_m)$$

причем $m \leqslant 3$. Учитывая тождество

$$\Theta \equiv \sum_{\varkappa=1}^{m} a_\varkappa Q_\varkappa, \quad \sigma_u^2 \equiv \sum_{\gamma=m+1}^{n} Q_\gamma^2 + \sum_{\varkappa \neq \rho = 1}^{m} (a_\varkappa Q_\rho - a_\rho Q_\varkappa), \quad n \leqslant 6$$

можно сформулировать обобщение критериев (1.3), (1.4) в виде

$$f(Q_{m+1}, \ldots, Q_n, \; |a_1 Q_2 - a_2 Q_1|, \ldots, |a_m Q_1 - a_1 Q_m|) = K(Q_1, \ldots, Q_m)$$

$$\sum_{\gamma=m+1}^{n} \alpha_\gamma Q_\gamma^2 + \sum_{\varkappa \neq \rho = 1}^{m} (a_\varkappa Q_\rho - a_\rho Q_\varkappa)^2 = K^2(Q_1, \ldots, Q_m)$$

$$\sum_{\gamma=m+1}^{n} Q_\gamma^2 + \sum_{\varkappa \neq \rho = 1}^{m} (a_\varkappa Q_\rho - a_\rho Q_\varkappa)^2 = K^2(Q_1, \ldots, Q_m)$$

Здесь $a_\varkappa$ — числа, подчиняющиеся условию (1.5)

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} a_\varkappa^2 = 3 \tag{4.2}$$

В частности, для изотропной среды $m = 1$ $(n = 2)$, и поэтому из (4.2) следует, что

$$a_1 = \sqrt{3}, \; Q_1 = {}^1/_3\sqrt{3}\Theta, \; Q_2 = \sigma_u$$

Для трансверсально-изотропной среды $m = 2$ $(n = 4)$, при этом [11]

$$a_1 = 1, \; a_2 = \sqrt{2}, \; Q_1 = \sigma, \; Q_2 = \sqrt{2}\bar{\sigma}, \; Q_3 = P, \; Q_4 = \sqrt{2}Q$$

Для ортотропной среды, как уже указывалось, $m = 3$ ($n = 6$), при этом

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1,\ Q_i = P_i\ (i = 1,\dots,6)$$

Разумеется, все предложенные выше критерии прочности нуждаются в экспериментальном подтверждении и пока их единственное преимущество перед уже имеющимися заключается в общности и логической связи с соответствующими критериями для изотропных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Королев В. И.* Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение. 1965. 272 с.
2. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне. 1980. 571 с.
3. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М.: Наука. 1974. 311 с.
4. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука. 1972. 327 с.
5. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ. 1986. 262 с.
6. Механика композиционных материалов / Под ред. Сендецки Дж. М.: Мир. 1978. 564 с.
7. *Ашкенази Е. К., Ганов Э. В.* Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. Л.: Машиностроение. 1972. 216 с.
8. *Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А.* Длительная прочность в машиностроении. М.: Машиностроение. 1977. 248 с.
9. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984. 336 с.
10. *Лохин В. В., Седов Л. И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 393—417.
11. *Победря Б. Е.* Деформационная теория пластичности анизотропных сред // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 29—37.

Москва

Поступила в редакцию
30.IX.1986