

УДК 622.011.4 : 622.023

К ВОПРОСУ О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ СКАЛЬНЫХ ПОРОД

Григорян С. С., Джанашия С. В., Рыков Г. В.

Предлагается математическая модель деформирования и разрушения скальных пород, в которой скорость объемной пластической деформации включает гидростатическую и дилатансионную составляющие. При этом последняя принята пропорциональной скоростям изменения инвариантов тензора напряжений. Сдвиг описывается соотношениями теории пластического течения, аналогичными [1—3]. Соотношения модели не учитывают эффектов, связанных с влиянием на процесс разрушения скорости деформирования. Таким образом, предлагаемая модель может рассматриваться как предельная — динамическая или статическая. Понятно, что количественная мера учитываемых эффектов и конкретный вид основных зависимостей для двух предельных моделей будут разными для одного и того же материала.

В рамках предлагаемой модели приводятся количественные данные о механических характеристиках различных горных пород, полученные на основе проведенной авторами статистической обработки опубликованных в литературе результатов статических испытаний.

В настоящее время предложен ряд математических моделей горных пород [1, 4—9], отражающих в той или иной степени имеющиеся экспериментальные данные об их деформировании и разрушении при статических и динамических нагрузках [10—22]. В рамках этих моделей горные породы в упругой и пластической стадиях работы, а также в разрушенном состоянии, рассматриваются как сплошная среда. При этом предполагается, что существенные изменения напряженного состояния такой среды происходят на расстояниях, значительно превышающих размеры блоков, на которые разделяется среда в стадии развитого разрушения.

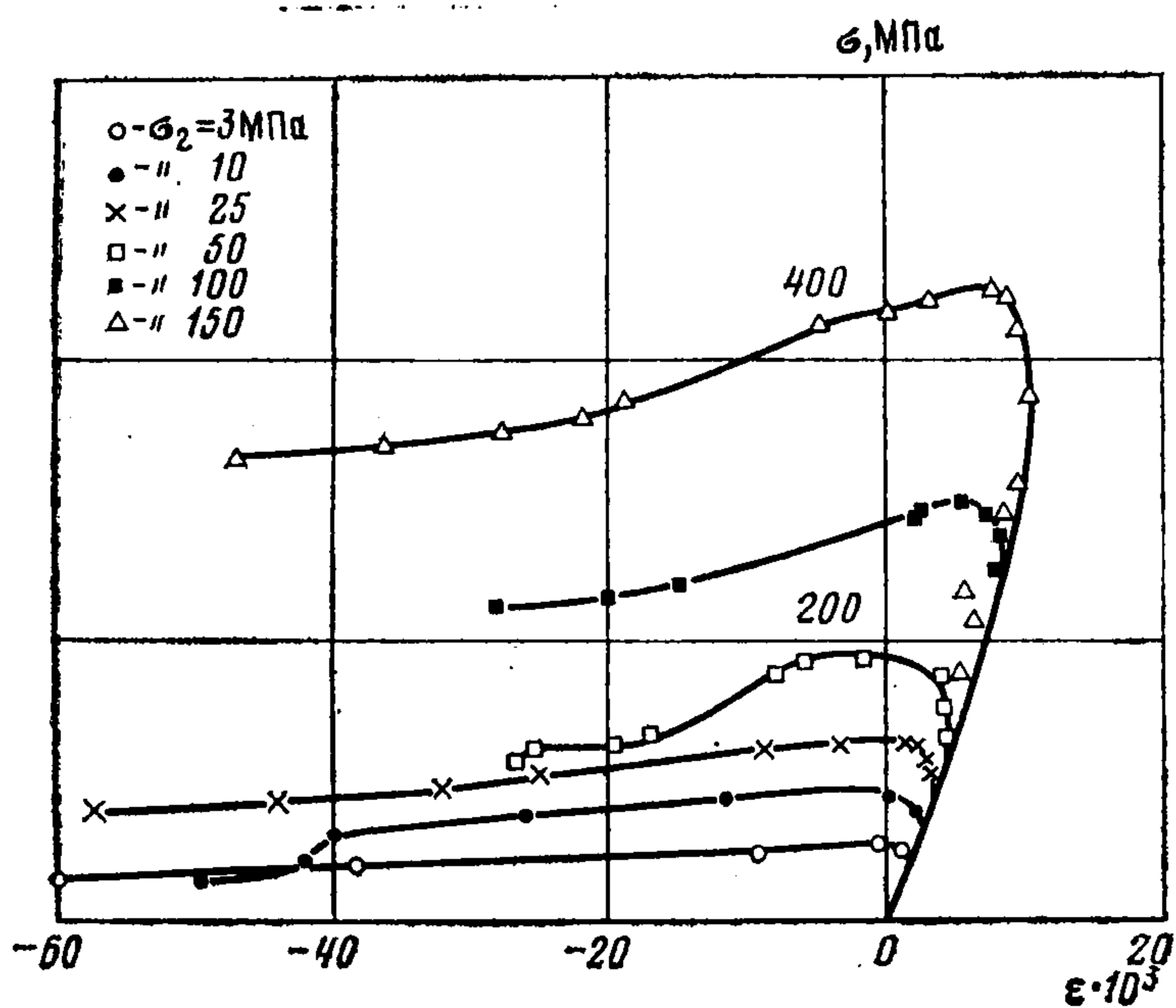
Важными эффектами, наблюдающимися при разрушении, являются, как видно из экспериментальных данных [10—22], изменение прочности и возникновение дополнительной пористости в связи с появлением трещиноватости — проявление так называемой дилатансии среды.

При формулировке математических моделей таких сред в работах [6—9] предполагается, что скорость дилатансионной составляющей объемной деформации пропорциональна скорости сдвига. В [7, 9] скорость дилатансионной составляющей объемной деформации дополнительно зависит от первого инварианта тензора напряжений.

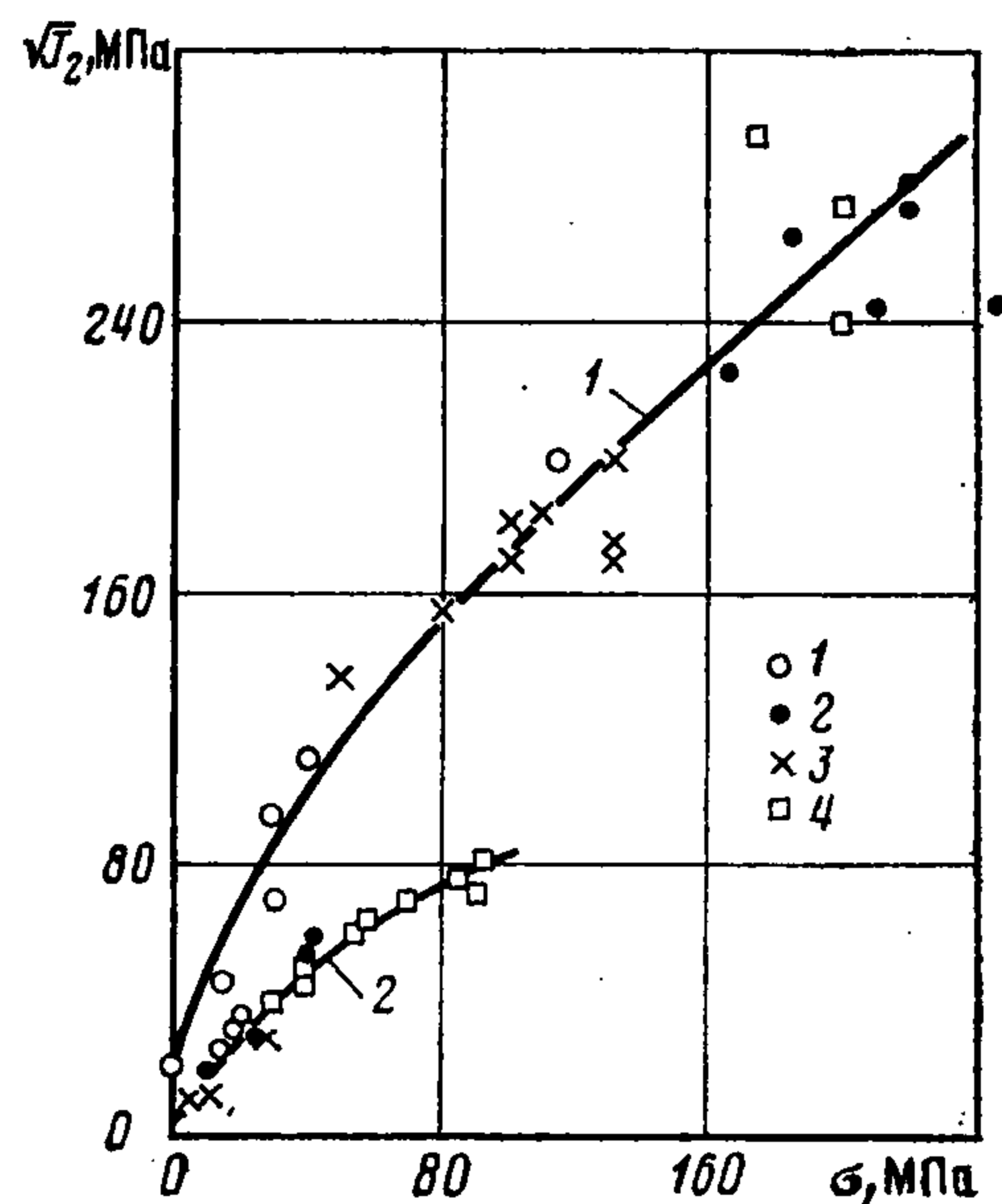
1. Рассмотрим имеющиеся экспериментальные данные, характеризующие процесс разрушения образцов достаточно прочных скальных пород.

На фиг. 1 представлены результаты испытаний образцов серого песчаника с объемной массой $\gamma = 2,49 \text{ г/см}^3$, пористостью $w = 5,9\%$ в условиях непропорционального нагружения [15] ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения). Здесь $\sigma = 1/3 (\sigma_1 + 2\sigma_2)$, ϵ — объемная деформация. Испытания проводились на «жесткой» установке, что позволило получить ниспадающий участок на диаграмме деформирования материала. Значения σ_2 при испытаниях изменялись в различных опытах от 3 до 150 МПа.

Необходимо отметить наличие для каждой из кривых трех характерных точек, соответствующих появлению пластических деформаций, достижению максимальной прочности образца, т. е. максимального напряжения σ_1^{max} , и достижению остаточной прочности, когда прекращается увеличение объемной деформации ϵ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Аналогичное явление наблюдается и для условий пропорционального нагружения образцов ($\sigma_2/\sigma_1 = \text{const}$, $\sigma_3 = \sigma_2$) [10].

Геометрическими местами этих трех классов точек в плоскости $\sqrt{J_2}$, σ будут кривые, соответствующие условиям начальной, максимальной и остаточной прочности, которые, по-видимому, не зависят от траекторий нагружения [17, 18].

Обработка результатов экспериментов [12—14], проводившихся с полыми и сплошными цилиндрическими образцами различных горных пород в условиях одновременного сжатия и кручения ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$), показала, в частности, что указанные кривые начальной и максимальной прочности можно считать не зависящими также от третьего инварианта тензора напряжений $I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$. Соответствующие кривые максимальной прочности для некоторых пород, по данным [12], приведены на фиг. 2 (кривая 1 — известняк, $\gamma = 2,60$ г/см³, $w = 4,7\%$, 2 — доломит, $\gamma = 2,84$ г/см³, $w = 0,9\%$). Цифрами 1—4 обозначены точки, полученные в испытаниях при различных значениях $(I_3)^{1/3}$ (МПа): 1 — 0; 2 — 100 — 230; 3 — —50 — —130; 4 — —150 — —290.

Эксперименты показывают, что после достижения максимальной прочности происходит дальнейшее нарастание «пластических» деформаций разрыхления при убывающих напряжениях. Этот процесс завершается достижением на плоскости $(\sqrt{J_2}, \sigma)$ кривой остаточной прочности, характеризующей способность разрушенного образца все еще воспринимать некоторую нагрузку [15, 16, 19].

2. Приведенные выше экспериментальные данные позволяют ввести три предельные характеристики пород — условие начальной прочности $F_1(\sigma_{ij}) = 0$, условие максимальной прочности $F_2(\sigma_{ij}) = 0$ и условие остаточной прочности $F_3(\sigma_{ij}) = 0$.

Принимая в качестве существенной гипотезы эти условия не зависящими от истории нагружения и от третьего инварианта тензора напряжений, запишем их в инвариантном виде

$$(2.1) \quad \sqrt{J_2} = F_k(\sigma), \quad k = 1, 2, 3$$

$$\sigma = I_1/3, \quad I_1 = \sigma_{kk}, \quad J_2 = I_2 - I_1^2/6 = 1/2 S_{ij}S_{ij}$$

где I_1 , I_2 — инварианты тензора напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ — компоненты девиатора тензора напряжений, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $i, j = 1, 2, 3$.

Введем соотношение, выражающее условие пластичности по сдвиговой деформации, которое в общем случае, как видно из приведенных выше экспериментальных результатов, будет зависеть от характеристик упрочнения. В качестве параметра упрочнения примем объемную пластическую дилатансионную деформацию ε_D^p и для условия пластичности по сдвигу используем запись

$$(2.2) \quad \sqrt{J_2} = F(\sigma, \varepsilon_D^p)$$

С учетом условия пластичности (2.2) соотношения течения для приращений пластических сдвиговых деформаций запишем, как и в [2], в виде

$$(2.3) \quad Ge_{ij}' \equiv G \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) = \frac{dS_{ij}}{dt} + \lambda S_{ij}$$

$$(2.4) \quad \lambda = \frac{GW' - F dF/dt}{F^2} e(W') e(\sqrt{J_2} - F)$$

$$(2.5) \quad W' \equiv S_{ij} e_{ij}'$$

Здесь e_{ij} — тензор скоростей деформаций; остальные обозначения обычные [2].

В этих соотношениях содержится и определение разгрузки по сдвиговым деформациям: при такой разгрузке должно быть $e_{ij}'^p = 0$, но, по определению, в (2.3) $e_{ij}'^p = \lambda S_{ij}/G$, следовательно, $e_{ij}'^p = 0$ при $\lambda = 0$, а это имеет место согласно (2.4) при $W' = 0$ и $\sqrt{J_2} < F$, поскольку $e(u) = 1$ при $u \geq 0$ и $e(u) = 0$ при $u < 0$.

Будем далее предполагать, что условие пластичности (2.2) связано с введенными выше предельными характеристиками (2.1) соотношениями

$$(2.6) \quad F = F_A = (F_1 - F_2) f_1(\varepsilon_D^p) + F_2$$

$$F = F_B = (F_2 - F_3) f_2(\varepsilon_D^p) + F_3$$

Здесь F_A соответствует допредельным состояниям нагружения и деформирования, т. е. состояниям, реализующимся при переходе от начальной прочности до максимальной, а F_B — запредельным, т. е. состояниям при переходе от максимальной прочности к остаточной. Функции f_1, f_2 , определяемые экспериментально, характеризуют зависимость условия сдвиговой пластичности от параметра упрочнения ε_D^p .

3. Обратимся к построению соотношений, определяющих объемную деформируемость среды. Скорость объемной деформации $d\varepsilon/dt \equiv e = e_{kk}$ представим в виде суммы упругой e^e и пластической e^p составляющих, а e^p представим в виде суммы «гидростатической» e_H^p и дилатансионной e_D^p составляющих.

Для упругой части e^e гидростатической составляющей объемной деформации ε_H примем, как и в [2], зависимость деформационного типа

$$(3.1) \quad \varepsilon^e = \varepsilon_H - \varepsilon_H^p = \varphi(\sigma, \varepsilon_H^p)$$

Семейство линий на плоскости σ, ε^e , определяемое соотношением (3.1) при $\varepsilon_H^p = \text{const}$, представляет собой закон упругого деформирования при гидростатическом нагружении. Накопление же гидростатической составляющей необратимой объемной деформации определяется «кинетическим» уравнением

$$(3.2) \quad \frac{d\varepsilon_H^p}{dt} = \frac{df^{-1}(\sigma)}{d\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right) e \left(\frac{d\sigma}{dt} \right) e(\varepsilon^e - \varepsilon_{\text{max}}^e)$$

$$\varepsilon_{\text{max}}^e = \psi(\varepsilon_H^p)$$

а функция ψ получается из (3.1) при $\varepsilon^e = \varepsilon_{\max}^e$, $\sigma = \sigma_*$, где

$$(3.3) \quad \sigma_* = f(\varepsilon_H^*) = f(\varepsilon_H^p + \varepsilon_{\max}^e)$$

В формулах (3.2), (3.3) функция f (f^{-1} — функция, обратная к f) определяет нагрузочную ветвь диаграммы гидростатического сжатия среды.

В приведенных выше соотношениях также содержится определение разгрузки от состояний пластического деформирования при гидростатических процессах нагружения и разгрузки.

Для определения дилатансионной составляющей пластической деформации ε_D^p примем гипотезу,¹ выраженную соотношением

$$(3.4) \quad \frac{d\varepsilon_D^p}{dt} = A_j \frac{dJ_j}{dt} e(W^*)$$

где W^* — скорость диссипации энергии на сдвиговых деформациях, определяемая по (2.4), J_j ($j = 1, 2, 3$) — инварианты тензора напряжений, A_j — некоторые функции величин J_j , ε_D^p , ε_H^p и, возможно, других параметров.

В соотношении (3.4) содержатся определения понятий нагружения и разгрузки для дилатансионного деформирования: $d\varepsilon_D^p > 0$ при $W^* \geq 0$ — нагружение, $d\varepsilon_D^p = 0$ при $W^* < 0$ — разгрузка.

Соотношение (3.4), вообще говоря, неинтегрируемо по переменным J_j , причем A_j могут сложным образом зависеть от «истории» нагружения, т. е. от параметров ε_D^p , ε_H^p и других, а также будут разными в до- и за-предельном состояниях.

В частных случаях простых траекторий нагружения, например при $\sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma_2/\sigma_1 = \text{const}$ или при $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$ и возрастающем σ_1 , имевших место в обсуждавшихся выше экспериментах, соотношение (3.4) может быть проинтегрировано и приведено к виду

$$(3.5) \quad \varepsilon_D^p = \Phi(\sigma, \sqrt{J_2}, I_3, a_i)$$

где a_i — параметры, характеризующие данный класс траекторий нагружения. Представление (3.5) будет, конечно, различным для до- и за-предельного режимов нагружения.

Построенные выше соотношения образуют замкнутую модель среды, испытывающей необратимые сдвиговую, объемную гидростатическую и объемную дилатансионную деформации. По соотношениям модели, диссипация механической энергии (работа напряжений на необратимых деформациях) положительна.

В частном случае монолитных непористых скальных пород необратимая объемная гидростатическая деформация будет отсутствовать. Однако для пористых пород учет этой составляющей может быть существенным.

4. Обработка имеющихся экспериментальных результатов [10—22] позволила конкретизировать данную модель следующим образом. Функция Φ , характеризующая допредельную деформацию среды, была получена в виде

$$(4.1) \quad \Phi_1 = \alpha \left(\beta \frac{\Delta \sqrt{J_2}}{\sigma - R_p} \right)^\kappa$$

$$\beta = 1 + I_3^{1/3} / J_2^{1/2}, \quad \Delta \sqrt{J_2} = \sqrt{J_2} - (\sqrt{J_2})_e$$

где R_p — прочность породы при растяжении (сжимающие напряжения считаются положительными, т. е. $R_p < 0$); α , κ — экспериментальные

коэффициенты, приведенные для различных пород в таблице, а также на фиг. 3 в зависимости от значений скорости распространения упругих волн a_0 в этих породах; $(\sqrt{J_2})_e$ — значение $\sqrt{J_2}$, удовлетворяющее условию (2.1) при $k = 1$.

Горная порода	R_c , МПа	γ , г/см ³	$\alpha \times 10^3$	$\alpha^* \times 10^3$	$\frac{a_1}{v_1}$	$\frac{a_2}{v_2}$	$\frac{a_3}{v_3}$
	a_0 , м/с	w , %	κ	κ_*			
Кварцит [22]	281	—	0,5	—	1,16	5,86	—
	6400	—	1,87	—	0,96	0,79	—
Песчаник П-0 [10]	235	2,76	3,6	—	3,15	5,61	—
	6060	0,36	2,71	—	0,86	0,79	—
Диорит [10]	232	—	2,65	—	2,65	6,21	—
	6000	0,15	3,04	—	0,88	0,79	—
Кварцит [19]	211	—	10,4*	17,5	1,45	1,65	2,02
	5850	—	4,3	0,62	0,99	0,98	0,93
Гранодиорит [17]	207	2,67	2,0	—	1,37	6,26	—
	5800	0,7	4,0	—	0,89	0,76	—
Гранит [21]	263	2,65	2,86	—	0,89	3,16	—
	4900	1,3	3,82	—	0,99	0,88	—
Диабаз [10]	200	2,97	5,31	—	3,01	3,92	—
	5750	0,98	2,0	—	0,88	0,85	—
Алевролит [10]	181	—	3,18	—	5,0	7,7	—
	5600	—	2,09	—	0,78	0,75	—
Гранит [15]	160	—	40,6*	31,12	2,23	1,86	1,04
	5300	—	3,11	0,57	0,9	0,94	1,0
Песчаник [15]	140	2,49	76,4*	16,15	6,6	6,0	3,84
	5100	5,9	2,81	0,52	0,75	0,78	0,82
Песчаник Д-8 [10]	134	2,49	1,89	—	2,44	8,88	—
	5030	7,4	4,92	—	0,88	0,72	—
Песчаник [17]	132	2,45	2,5	—	2,5	8,79	—
	4900	8,5	5,0	—	0,83	0,71	—
Известняк [10]	79	2,97	5,6	—	2,24	11,31	—
	4220	—	4,61	—	0,88	0,65	—

Указанные в таблице значения a_0 (кроме приведенных согласно [17, 21]) определялись по данным [23] в зависимости от прочности при одноосном сжатии.

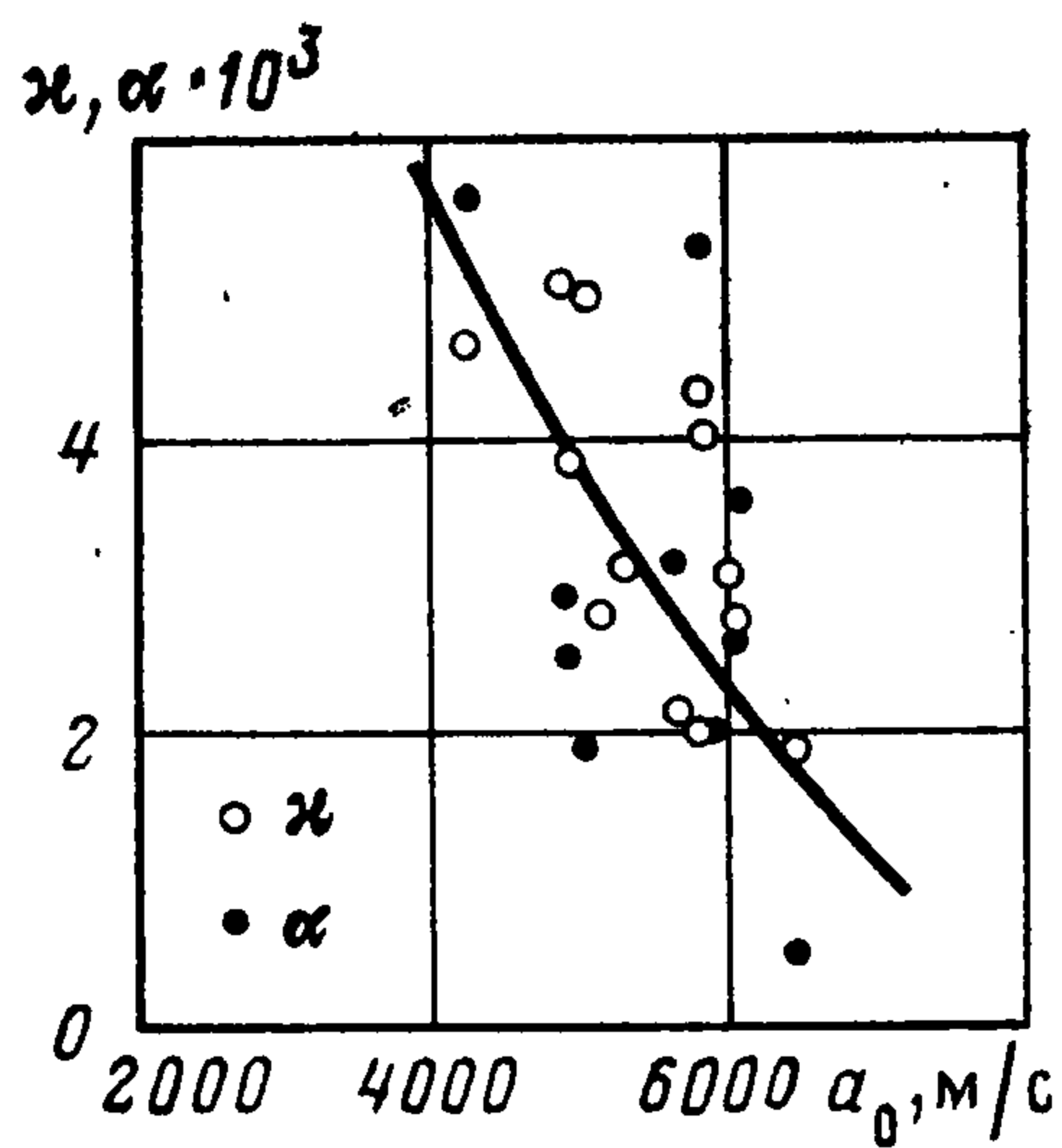
В качестве примера на фиг. 4, а, б представлены результаты определения функции (4.1) по экспериментальным данным [10], соответствующим результатам испытаний образцов серого песчаника с $\gamma = 2,76$ г/см³, $w = 0,36\%$ в условиях пропорционального нагружения. Цифрами 1—4 на графиках обозначены данные опытов при значениях σ_2/σ_1 , равных соответственно: 1 — 0; 2 — 0,069; 3 — 0,116; 4 — 0,178. Видно, что экспериментальные точки, соответствующие различным значениям отношения σ_2/σ_1 , достаточно хорошо описываются одной кривой.

Запредельная пластическая объемная деформация представлена соотношением

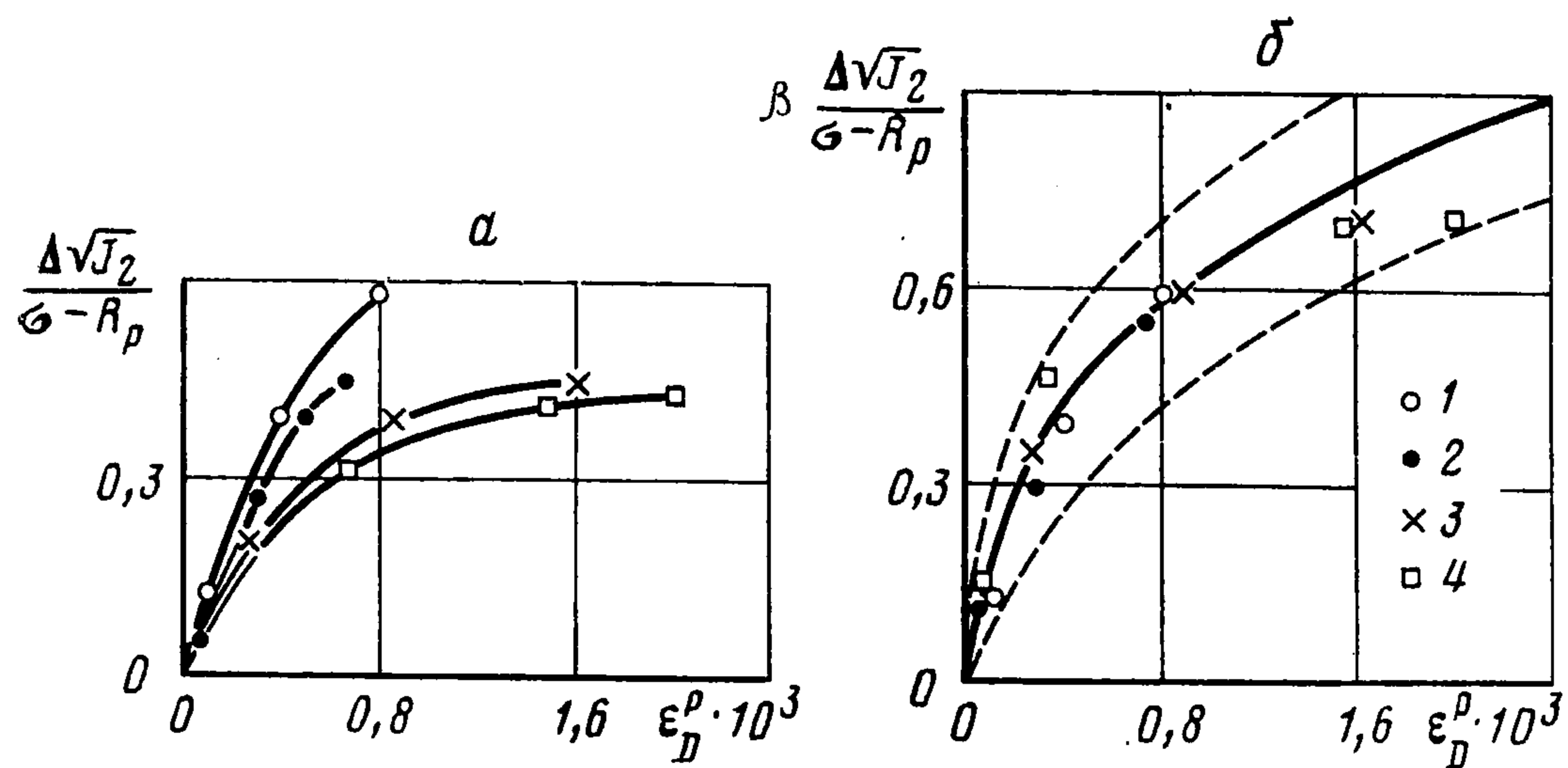
$$(4.2) \quad \Phi_2 = \varepsilon_{D*2}^p + \alpha_* \left(\frac{\delta \sqrt{J_2}}{\sigma - R} \right)^{\kappa_*}, \quad R = R_p \frac{F - F_3}{F_2 - F_3}$$

$$\delta \sqrt{J_2} = (\sqrt{J_2})_* - \sqrt{J_2}$$

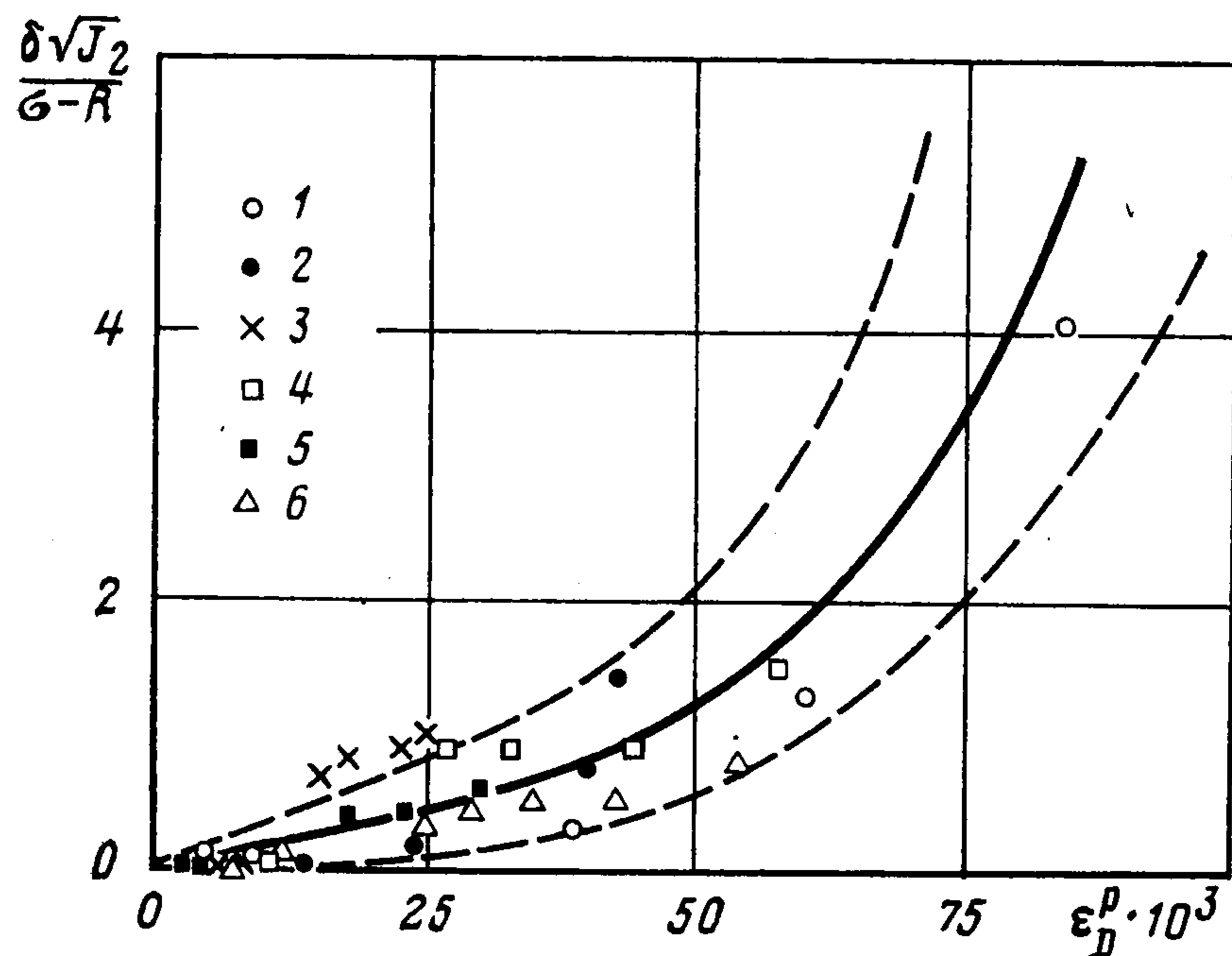
где α_* , κ_* — экспериментальные коэффициенты (таблица), $(\sqrt{J_2})_*$ — значение $\sqrt{J_2}$ при выполнении условия (2.1) при $k = 2$, R — текущая прочность горной породы при растяжении с учетом ее изменения в процессе разрушения.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Экспериментальные точки для различных значений σ_2 (1 — 3; 2 — 10; 3 — 25; 4 — 50; 5 — 100; 6 — 150 МПа), так же, как и в случае допредельного деформирования, хорошо описываются единой кривой (фиг. 5).

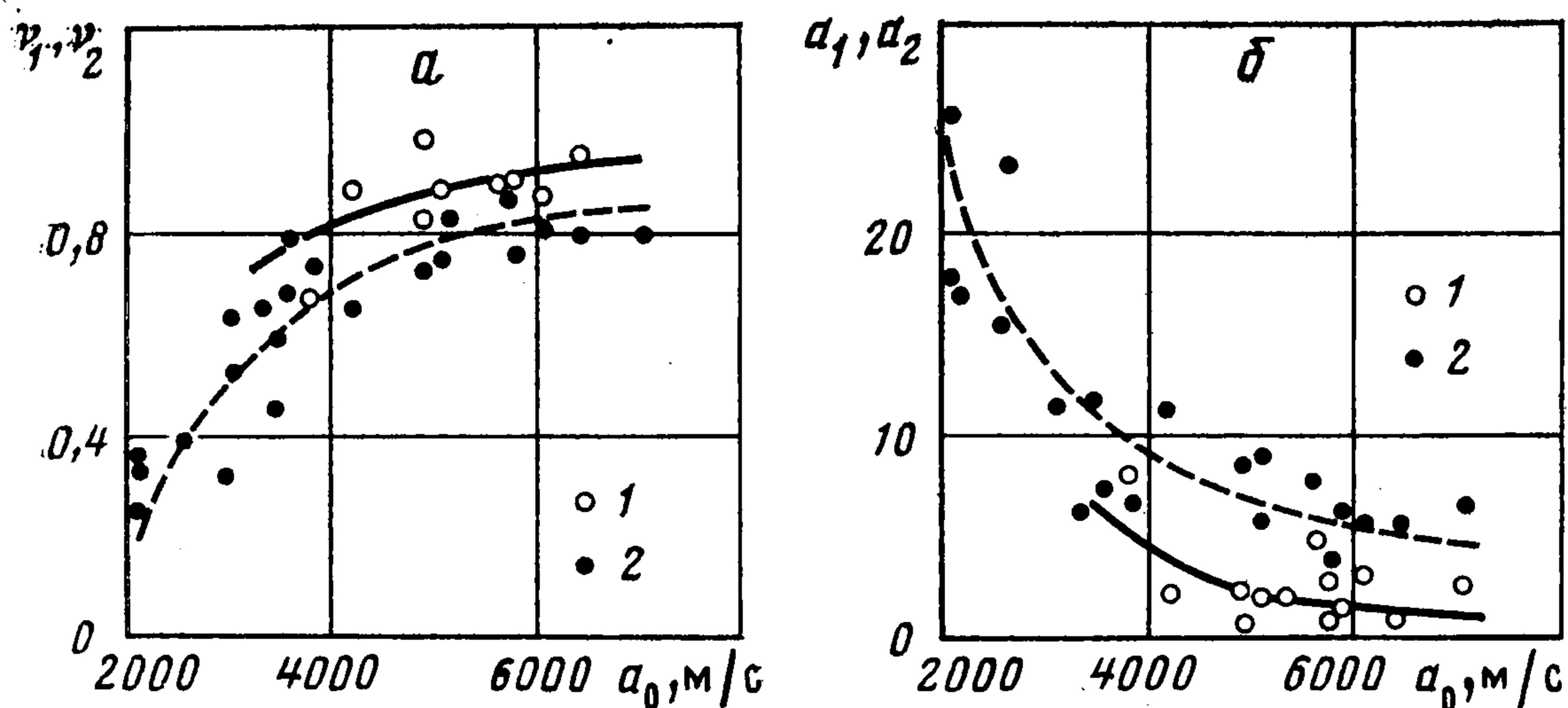
Функции $F_k(\sigma)$ получены в виде

$$(4.3) \quad F_k(\sigma) = a_k (\sigma - R_p)^{\nu_k}, \quad k = 1, 2, 3$$

где значения a_k , ν_k для различных пород приведены в таблице. На фиг. 6, а, б точки 1 относятся к величинам ν_1 , a_1 , а точки 2 — к ν_2 , a_2 .

Функции $f_1(\epsilon_D^p)$ и $f_2(\epsilon_D^p)$ представлены формулами

$$(4.4) \quad f_1 = 1 - \left(\frac{\epsilon_D^p}{\epsilon_{D*2}^p} \right)^{q_1}, \quad f_2 = 1 - \left(\frac{\epsilon_D^p}{\epsilon_{D*3}^p} \right)^{q_2}$$



Фиг. 6

где $\varepsilon_{D_2}^p, \varepsilon_{D_3}^p$ — значения объемной деформации разрыхления, соответствующие условиям (2.1) при $k = 2, 3$; $q_1 = 0,2-0,5, q_2 = 0,9-1,2$ — экспериментальные коэффициенты для горных пород (см. таблицу).

Приведенные выше результаты обработки (за исключением некоторых, помеченных в таблице звездочками) свидетельствуют о достаточно представительной корреляционной зависимости параметров $\alpha, \kappa, a_1, a_2, a_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ для большинства обследованных горных пород от скорости распространения упругих волн a_0 в этих породах.

Полученные корреляционные зависимости могут быть использованы для предварительных оценок основных характеристик горных пород в рамках предлагаемой модели при наличии данных только о скорости распространения продольных упругих волн a_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 643—669.
2. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1057—1072.
3. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука. 1971. 231 с.
4. Замышляев Б. В., Евтерев Л. С., Кривошеев С. Г. Об уравнениях состояния горных пород при взрывных нагрузках // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1980. Т. 251. № 2. С. 322—326.
5. Никифоровский В. С., Шемякин Е. И. Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: Наука. 1979. 271 с.
6. Николаевский В. Н. Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучей среды // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 1070—1082.
7. Коротков П. Ф. О математической модели постепенного разрушения горных пород и превращения их в пористые сыпучие среды // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1980. Т. 253. № 6. С. 1357—1360.
8. Башуров В. В., Вахрамеев Ю. С., Демьяновский С. В. и др. Модель грунта и вычислительный комплекс для расчета подземных взрывов // ПМТФ. 1979. № 3. С. 153—160.
9. Капустянский С. М., Николаевский В. Н. Количественная формулировка упруго-пластической дилатансионной модели (на примере песчаника) // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 113—123.
10. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. Пластичность горных пород. М.: Недра. 1979. 301 с.
11. Введение в механику скальных пород: Пер. с англ. М.: Мир. 1983. 276 с.
12. Handin J., Heard H. C., Magouirk J. N. Effects of the intermediate principal stress on the failure of limestone, dolomite, and glass at different temperatures and strain rates // J. Geophys. Res. 1967. V. 72. No 2. P. 611—640.
13. Mogi K. Effect of the intermediate principal stress on rock failure // J. Geophys. Res. 1967. V. 72. No 20. P. 5117—5131.
14. Hoskins E. R. The failure of thick-walled hollow cylinders of isotropic rock // Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. 1969. V. 6. No 1. P. 99—125.
15. Ставрогин А. Н., Тарасов Б. Г., Ширкес С. А., Певзнер Е. Д. Прочность и деформативность горных пород в допредельной и запредельной областях // Физ.-тех. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1981. № 6. С. 3—11.

16. Ардашев К. А., Матвеев Б. В., Ильинов М. Д. Показатели сопротивления и разрыхления и механизм разрушения горных пород в условиях объемного сжатия // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1981. № 2. С. 24—29.
17. Schock R. N., Heard H. C., Stephens D. R. Stress-strain behavior of a granodiorite and two graywackes on compression to 20 kilobars // J. Geophys. Res. 1973. V. 78. No 26. P. 5922—5941.
18. Swanson S. R., Brown W. S. An observation of loading path independence of fracture in rock // Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. 1971. V. 8. No 3. P. 277—281.
19. Crouch S. L. Experimental determination of volumetric strains in failed rock // Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. 1970. V. 7. No 6. P. 589—603.
20. Каталог механических свойств горных пород при широкой вариации видов напряженного состояния и скорости деформирования. Л.: ВНИМИ. 1976. 168 с.
21. Green S. J., Leasia J. D., Perkins R. D., Jones A. H. Triaxial stress behavior of Solenhofer limestone and Westerly granite at high strain rates // J. Geophys. Res. 1972. V. 77. No 20. P. 3711—3724.
22. Bieniawski Z. T. Propagation of brittle fracture in rock // Basic and Appl. Rock. Mech.: Proc. 10th Symp. Rock Mech. Austin, Tex. 1968. N.Y.: Soc. Mining Engrs. 1972. P. 409—427.
23. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. М.: Недра. 1975. 279 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.V.1987