Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 539.374

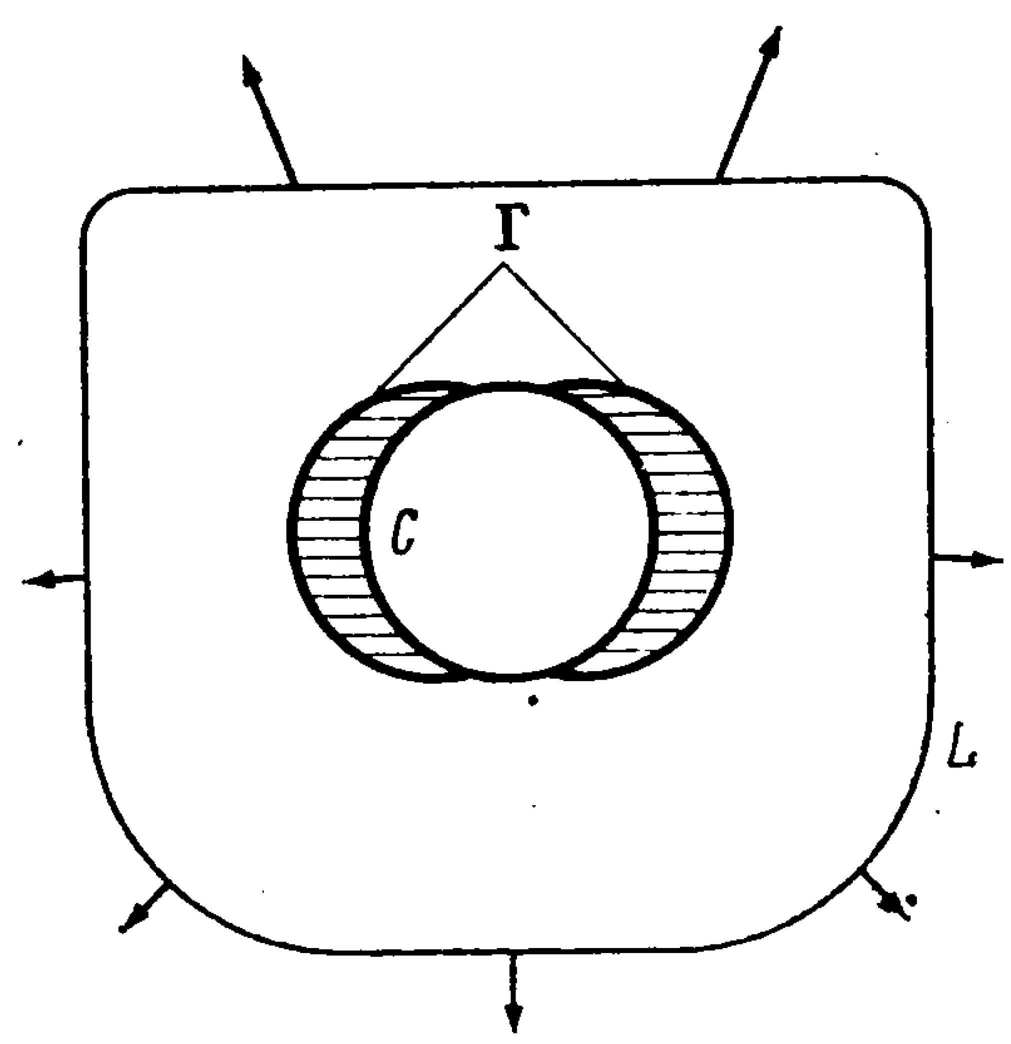
ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛА С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Керчман В. И., Эрлихман Ф. М.

Предлагается подход, основанный на теории вариационных неравенств, и обобщенная пластинчатая аналогия для решения упругопластической задачи (УПЗ) о напряженном состоянии тела, ослабленного круговым отверстием, без предположения о полном охвате отверстия пластической зоной; при этом не используется гипотеза Хаара — Кармана либо эквивалентные ей утверждения. Даются обобщения на случай пластически неоднородного тела и при использовании экспоненциального условия текучести. Рассматриваются примеры и предлагается простой способ оценки размеров пластической зоны.

В известном решении Л. А. Галина [1] УПЗ о двухосном растяжении плоскости с круговым отверстием и его обобщениях [2—5] предполагалось, что пластическая область полностью охватывает отверстие. Большинство известных решений было получено для концентрации напряжений вокруг отверстия в бесконечной области.

Рассмотрим задачу о плоской деформации тела Ω с гладким внешним контуром L и круговым отверстием C радиуса a (фиг. 1). Вблизи внешней границы среда при действующих на тело нагрузках находится в упругом состоянии. Будем предполагать также, что если пластическая зона не охватывает отверстие, то все ее связные подобласти лежат внутри соответствующих характеристических треугольников, так что, как и в случае полного охвата, напряжения в пластически однородной зоне D^p описываются соотношениями (условия растяжения)



Фиг. 1

$$\sigma_{rr}{}^p = 2\tau_s \ln (r/a), \quad \sigma_{\vartheta\vartheta}^p = 2\tau_s [1 + \ln (r/a)], \quad \sigma_{r\vartheta}^p = 0 \tag{1}$$

где r, ϑ — полярные координаты, связанные с центром отверстия, а τ_s — предел пластичности.

Статически определимую УПЗ удобно сформулировать в терминах функции напряжений Эри [1—3]: найти функцию $u(x, y)$, которая в упругой зоне D^e удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 u = 0 \tag{2}$$

и условию

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 < 4\tau_s{}^2 \tag{3}$$

а в пластической зоне D^p удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4\tau_s{}^2 \tag{4}$$

На границе тела ставятся условия

$$u|_L = f(l), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_L = f_1(l), \quad u|_C = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = 0 \tag{5}$$

На неизвестной заранее упругопластической границе Г функция $u(x, y)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно, что соответствует непрерывному полю напряжений.

Пусть $u^e(x, y)$ — решение уравнения (2) с граничными условиями (5). Отвечающее ему чисто упругое поле напряжений гладкое внутри тела.

Утверждение. Если $u(x, y)$ — решение УПЗ (2) — (5), то функция $U(x, y) = u - u^e$ минимизирует функционал

$$J(v) = \iint_\Omega (\Delta v)^2 \, d\Omega \tag{6}$$

на множестве допустимых функций K:

$$v(x, y) \in W_2^2(\Omega), \ v|_{\partial\Omega} = 0, \ \partial v/\partial n|_{\partial\Omega} = 0 \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v + u^e) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(v + u^e)\right]^2 + 4\left[\frac{\partial^2 (v + u^e)}{\partial x \partial y}\right]^2 \leqslant 4\tau_s^2 \tag{8}$$

Доказательство. В случае однородных пластических свойств материала функция $u(x, y)$ в пластической зоне совпадает с бигармонической функцией $u^p(r)$, соответствующей полю напряжений (1), так что $U(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2) в каждой из подобластей D^e и D^p.

Получим вариационное неравенство для функции $U(x, y)$. Умножим бигармонический оператор от U на функцию $(v - U)$, где $v(x, y)$ — произвольный элемент выпуклого множества K. Проинтегрируем это выражение по каждой из подобластей D^e и D^p. После применения формулы Грина и суммирования интегралов по обеим зонам получается соотношение

$$a(U, v - U) = \iint_\Omega \Delta U \cdot \Delta(v - U) \, d\Omega = -\int_\Gamma (v - U)\,\delta(l)\,dl + \int_{\partial\Omega} \left\{\Delta U \frac{\partial}{\partial n}(v - U) - (v - U)\frac{\partial}{\partial n}\Delta U\right\} dl \tag{9}$$

$$\delta = \left[\frac{\partial^3 U}{\partial n^3}\right] = \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\bigg|_{\Gamma^p} - \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\bigg|_{\Gamma^e} \tag{10}$$

Здесь δ — скачок нормальной производной от тангенциального напряжения $\sigma_{tt} = \partial^2 u/\partial n^2$ при переходе из упругой зоны в пластическую (нормаль n — внешняя относительно D^p). При этом используется установленный в [6] факт разрывности почти всюду на упругопластической границе Г производной $\partial\sigma_{tt}/\partial n$. Остальные третьи производные $U(x, y)$ в локальных координатах (t, n) в окрестности Г непрерывны.

Для всех функций $v \in K$ интеграл по границе тела $\partial\Omega$ в правой части (9) обращается в нуль, так что достаточно показать знакопостоянство оставшегося интеграла по упругопластической границе Г. Положительность скачка производной (10) для решения УПЗ вытекает из соотношения [6] (при учете условия $\sigma_{tt} > \sigma_{nn}$)

$$\left[\frac{\partial\sigma_{tt}}{\partial n}\right] = \frac{4\tau_m}{\sigma_{nn} - \sigma_{tt}}\left(\frac{\partial\tau_m}{\partial n}\right)_{\Gamma^e}, \quad \tau_m = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{nn} - \sigma_{tt})^2 + 4\sigma_{nt}^2} \tag{11}$$

Действительно, в пластической области всюду максимальное касательное напряжение $\tau_m = \tau_s$ (4), в то время как в соседних точках области D^e выполняется неравенство $\tau_m < \tau_s$, так что $\delta(l) \geqslant 0$.

Далее для определенности рассматривается случай растягивающих напряжений. Покажем, что для произвольной функции $v(x, y)$ из множества K во всей пластической зоне вплоть до границы Г в этом случае выполняется неравенство

(12) $$v(x, y) \leqslant U(x, y) = u^p(r) - u^e(r, \vartheta) = F(r, \vartheta)$$

Действительно, неравенство (8), задающее множество K, можно переписать в полярной системе координат в виде соотношения

(13) $$\tau_{\vartheta\vartheta} - \tau_{rr} = M[v + u^e] = 2\tau_s - \Phi(r, \vartheta), \quad \Phi \geqslant 0$$
$$M = \partial^2/\partial r^2 - r^{-1}\partial/\partial r - r^{-2}\partial^2/\partial\vartheta^2$$
$$\tau_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial(v + u^e)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(v + u^e)}{\partial\vartheta^2}, \qquad \tau_{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial^2(v + u^e)}{\partial r^2}$$

Здесь τ_{rr}, $\tau_{\vartheta\vartheta}$ — компоненты напряжений, отвечающие «пробной» функции Эри $v + u^e$, причем для случая растяжения допустимые поля напряжений удовлетворяют в D^p, как и решение (1), условию $\tau_{\vartheta\vartheta} > \tau_{rr}$.

Для действительного поля напряжений в пластической зоне выполняется равенство

(14) $$M[u] = M[u^p] = 2\tau_s$$

Следовательно, функция $w = u^p - u^e - v$ удовлетворяет уравнению с условиями на контуре отверстия

(15) $$M[w] = \Phi(r, \vartheta) \geqslant 0; \quad w|_{r=a} = \partial w/\partial r|_{r=a} = 0$$

где $\Phi(r, \vartheta)$ — некоторая неотрицательная функция.

Анализ решений задачи (15) удобно проводить в переменных $\xi = \ln r + \vartheta$, $\eta = \ln r - \vartheta$, после перехода к которым получим

(16) $$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{1}{4}e^{\xi+\eta}\Phi(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta) \geqslant 0$$
$$u = \partial u/\partial\xi = \partial u/\partial\eta = 0 \quad \text{при} \quad \xi + \eta = 2\ln a$$

Методом Римана [7] решение этой задачи Коши в области $\xi + \eta > 2\ln a$ представляется в виде

$$u(\xi_0, \eta_0) = \iint\limits_{\xi\leqslant\xi_0,\ \eta\leqslant\eta_0} V(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)\,\Psi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

Здесь функция Римана — Грина $V(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ — решение задачи Гурса для сопряженного уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial\eta} = 0$$
$$V|_{\xi=\xi_0} = \varphi_1(\eta) = \exp[(\eta_0 - \eta)/2], \quad V|_{\eta=\eta_0} = \varphi_2(\xi) = \\ = \exp[(\xi_0 - \xi)/2]$$

При этом в рассматриваемом случае

$$\varphi_1(\eta) > 0, \ \varphi_2(\xi) > 0, \ \varphi_1'(\eta) < 0, \ \varphi_2'(\xi) < 0$$

Построение функции Римана проводится методом последовательных приближений [7]. Вводя обозначения

$$w^{(1)}(\xi, \eta) = \partial V/\partial\xi, \quad w^{(2)}(\xi, \eta) = \partial V/\partial\eta$$

перепишем решение в виде

$$V = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(V_n - V_{n-1})$$
$$w^{(1)} = w_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}[w_n^{(1)} - w_{n-1}^{(1)}], \quad w^{(2)} = w_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty}[w_n^{(2)} - w_{n-1}^{(2)}]$$

где нижний индекс указывает номер приближения, причем

$$V_0 = \varphi_2(\xi) > 0, \ w_0^{(1)} = \varphi_2'(\xi) < 0, \ w_0^{(2)} = \varphi_1'(\eta) < 0$$

По индукции на основе итерационных формул [7] доказывается знакопостоянство членов рядов для функции Римана и ее производных:

$$V_n - V_{n-1} \geqslant 0, \quad w_n^{(1)} - w_{n-1}^{(1)} \leqslant 0, \quad w_n^{(2)} - w_{n-1}^{(2)} \leqslant 0$$

Таким образом, функция Римана для гиперболического оператора M неотрицательна. Следовательно, решение задачи Коши (15) при произвольной неотрицательной правой части Φ также неотрицательно. Поэтому в пластической зоне D^p имеем $v \leqslant U$.

Вместе с неравенством для скачка δ это дает неотрицательность правой части (9), т. е. выполняется вариационное неравенство

$$a(U,\ v - U) \geqslant 0 \tag{17}$$

Для случая сжимающих напряжений знаки правых частей в (1), (11), (15) изменяются на противоположные, так что $\delta < 0$, а пробные функции $v(x, y) \geqslant U = -F(r, \vartheta)$, и неравенство (17) также выполняется. Поскольку множество K выпуклое и замкнутое, а билинейная форма $a(v_1, v_2)$ положительно-определенная в пространстве (7), из теории вариационных неравенств [8] следует существование единственного элемента $U \in K$, удовлетворяющего неравенству (17) для всех $v \in K$, и это решение УПЗ доставляет минимум функционалу (6) на множестве K. Достаточность доказывается стандартным способом [8]. Следует отметить, что вариационное неравенство (17) получено без каких-либо предположений об уравнении состояния пластического тела (типа гипотезы Хаара — Кармана, принципа максимума Мизеса и т. п., которые использовались в работах [8, 9]).

Вообще говоря, после построения решения задачи (6)—(8) необходимо проверить, что характеристики уравнений идеальной пластичности, выходящие с контура отверстия, пересекают упругопластическую границу только один раз.

Приведенное доказательство вариационного принципа легко обобщается на случай неоднородных пластических свойств материала вокруг отверстия, когда аналогично [10] предел пластичности зависит от расстояния до контура отверстия: $\tau_s = \tau_s(r)$. Пусть выполняется дополнительное требование

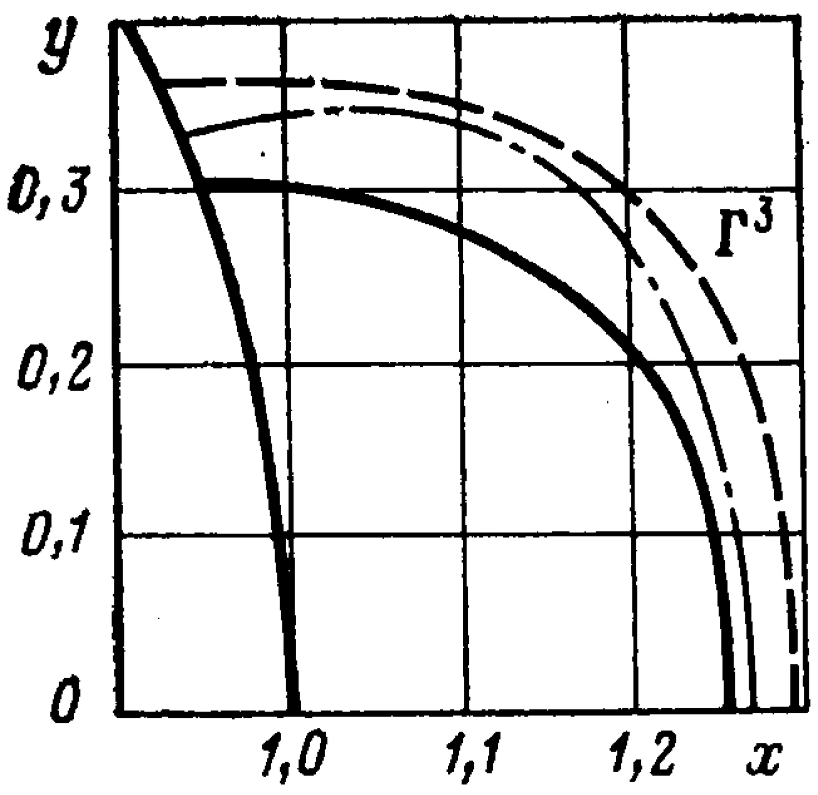
$$\Delta(\sigma_{rr}^p + \sigma_{\vartheta\vartheta}^p) = \Delta^2 u^p = 2\tau_s''(r) + 6\tau_s'(r)/r \leqslant 0 \tag{18}$$

Тогда неравенство (17) также справедливо. Действительно, в этом случае в правой части соотношения (9) добавляется неотрицательный член

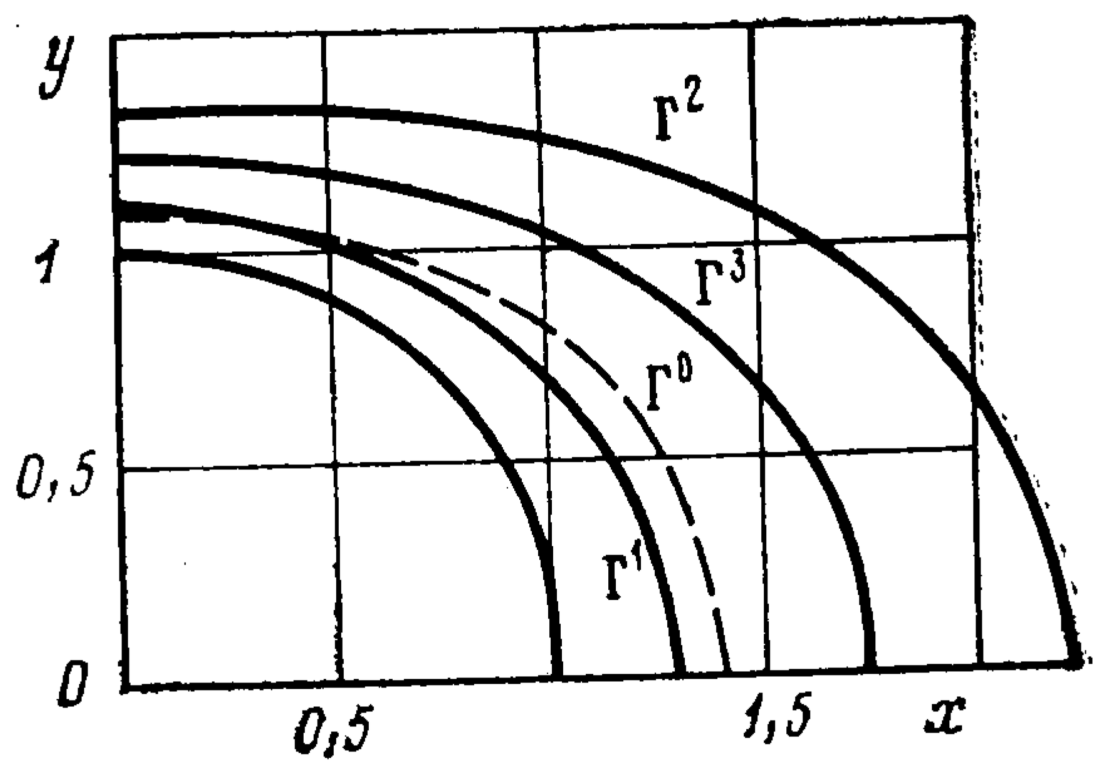
$$\iint\limits_{D^p} (v - U)\, \Delta^2 u^p\, dS$$

Л. А. Галин на основе интерпретации полученного им точного решения [1] предложил [11] пластинчатую аналогию для УПЗ о двухосном растяжении плоскости с отверстием. При помощи полученных выше неравенств можно строго обосновать обобщенную пластинчатую аналогию. Из неравенства $\delta \geqslant 0$ вытекает, что в окрестности границы Γ в D^e упругопластическая функция Эри $u(x, y) \leqslant u^p(r)$ а из соотношений (15) для функции $w = u^p - u$ получаем, что для областей Ω, в которых поле пластических характеристик допускает продолжение вплоть до внешнего контура L, будет выполняться неравенство $u \leqslant u^p(r)$. Тогда решение исходной задачи (2)—(5) можно заменить решением задачи об изгибе пластинки формы Ω в плане (u — ее прогиб) при заданных граничных условиях (5) и ограничении на прогиб

$$u(x, y) \leqslant u^p(r) \tag{19}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Действительно, решение УПЗ $u(x, y)$ в зоне «контакта» D^p совпадает с «пластической» поверхностью $u = u^p(r)$ и «реакция» этой поверхности направлена в сторону пластинки (при $\Delta^2 u^p \leqslant 0$ и учете неравенства $\delta \geqslant 0$ для сосредоточенных вдоль линии Г «перерезывающих сил»). В области D^e, где пластинка свободна от нормальной нагрузки, она лежит ниже поверхности $u = u^p(r)$. На границе Г, как и в УПЗ, производные до второго порядка включительно непрерывны (отсутствуют сосредоточенные моменты).

Поскольку граничные условия (5) при ненулевых f и f_1 не допускают подходящей физической реализации, удобно перейти к задаче с нулевыми граничными условиями: $\zeta = u - u^e$. Таким образом, приходим к задаче о давлении штампа с профилем $F = u^p(r) - u^e(r, \vartheta)$ на защемленную по контуру $\partial\Omega$ двухсвязную пластинку. Решение этой задачи удовлетворяет вариационному неравенству

$$(20)\qquad a(\zeta, \zeta' - \zeta) \geqslant 0, \quad \zeta, \zeta' \in K_1$$
$$K_1 = \{\zeta' \mid \zeta' \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega), \ \zeta'(x, y) \leqslant F(x, y)\}$$

где K_1 — выпуклое замкнутое множество функций из (7).

Как обычно, решение вариационного неравенства (20) может быть получено минимизацией функционала $a(\zeta', \zeta')$ на K_1

$$(21)\qquad J[U] = \inf_{K_1} a(\zeta', \zeta')$$

Численная реализация вариационной задачи (21) существенно проще минимизации функционала (6) на исходном множестве K. Было показано [12], что при $\Delta^2 F \leqslant 0$ решение задачи (21) обладает достаточной гладкостью ($U \in W_2^3(\Omega)$, $U \in C^2(\Omega)$) и область отсутствия контакта (в аналогии D^e) для этого решения связна.

В качестве примера использования вариационного подхода рассмотрена задача для широкого кольца $1 \leqslant r \leqslant 6{,}5$ при граничных условиях на внешней окружности, взятых по решению упругой задачи об одноосном растяжении плоскости с отверстием нагрузкой $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{yy} = 0{,}833\tau_s$. Ее решение строилось методом локальных вариаций [13] и сравнивалось с приближенным решением УПЗ о растяжении плоскости с отверстием [14] (пластическая зона не охватывает отверстие). Задача решалась для четверти кольца при разбиении по углу ϑ с шагом $\pi/60$, а по радиусу — с переменным шагом: 0,05 для $r \leqslant 2{,}5$ и 0,1 для $r > 2{,}5$. На фиг. 2 приведены результаты для упругопластической границы (штрихпунктир), там же сплошной линией показано приближенное решение [14].

Отметим также простую «внешнюю» оценку для пластической зоны, которая вытекает из пластинчатой аналогии. Поскольку площадка контакта штампа с пластинкой полностью содержится в области

$$G_2 = \{(r, \vartheta) \in \Omega : F(r, \vartheta) = u^p(r) - u^e(r, \vartheta) \leqslant 0\}$$

то неизвестная упругопластическая граница лежит внутри этой области с границей Γ^2. С другой стороны, известно, что приближенную оценку для области пластичности можно дать в терминах выполнения условия (3) для чисто упругого решения

$$D^p \approx G_1 : \left\{(x, y) \in \Omega : \left(\frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^e}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 u^e}{\partial x \partial y}\right)^2 \geqslant 4\tau_s^2\right\}$$

причем эта оценка в основном «внутренняя». Пусть $\Gamma^2 : \{r = R_2(\vartheta)\}$ и $\Gamma^1 : \{r = R_1(\vartheta)\}$ — соответствующие условиям равенства кривые, которые аппроксимируют упругопластические границы в этих оценках. Тогда в качестве подходящего приближения упругопластической границы естественно взять кривую $\Gamma^3 : \{r = [R_1(\vartheta) + R_2(\vartheta)]/2\}$.

На фиг. 3 показаны граничные линии Γ^1, Γ^2, Γ^3, построенные для условий задачи Л. А. Галина [1] о растяжении плоскости с отверстием единичного радиуса при $\sigma_{xx} = 1{,}3\,\tau_s$; $\sigma_{yy} = 1{,}6\,\tau_s$, там же приведена упругопластическая граница, отвечающая точному решению. На фиг. 2 соответствующая приближенная кривая Γ^3, построенная по упругому решению для плоскости с отверстием, показана штриховой линией. Видно, что предложенный подход к определению неизвестной границы дает хорошие результаты, когда пластическая область мала, при этом истинная граница Γ^0 всюду лежит внутри «среднего» контура Γ^3.

Аналогично исследуется УПЗ в случае, когда в пластической зоне выполняется экспоненциальное условие текучести [3]

$$(22)\qquad (\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr})^2 + 4\sigma_{r\vartheta}^2 = 4k^2\{1 - \exp[-\sigma_0/k + (\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta})/(2k)]\}^2$$

Здесь k и σ_0 — положительные постоянные, имеющие размерность напряжений. В случае бесконечной среды с круговым отверстием задача с условием пластичности (22) рассматривалась [3] в предположении полного охвата отверстия пластической зоной.

При вариационном подходе эту задачу, как и предыдущую, удобно сформулировать в терминах функции напряжений Эри. При этом для условий сжатия в упругой зоне выполняется неравенство

$$(23)\qquad Mu \geqslant Nu, \quad Nu = -2k\left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma_0}{k} + \frac{\Delta u}{2k}\right)\right]$$

(оператор M определен в (13)).

Далее предполагается, что в упругой зоне, как и в пластической, в условиях сжатия справедливо неравенство $\sigma_{\vartheta\vartheta} < \sigma_{rr}$ [3]. Условие (22), которое выполняется в пластической зоне D^p, в принятых обозначениях имеет вид $Mu = Nu$.

В отличие от задачи с классическим условием пластичности сделаем дополнительное предположение, что на внешнем контуре L компоненты тензора напряжений τ_{rr} и $\tau_{\vartheta\vartheta}$, найденные из решения УПЗ, удовлетворяют условию

$$(24)\qquad \tau_{rr} + \tau_{\vartheta\vartheta} > \sigma_{rr}^A + \sigma_{\vartheta\vartheta}^A$$

где σ_{rr}^A, $\sigma_{\vartheta\vartheta}^A$ — «пластические» напряжения (это предположение выполняется для точного решения в [3]).

Утверждение. При выполнении условия (24) всюду в упругой зоне D^e выполняется неравенство

$$(25)\qquad u(x, y) \geqslant u_p^A(x, y) = \chi^A(r)$$

где χ^A — «пластическая» функция Эри для тела с условием текучести (22).

Доказательство. По определению функции χ^A она удовлетворяет в Ω соотношению $M\chi^A = N\chi^A$. Вычитая из обеих частей этого равенства соответствующие части неравенства (23), получим в упругой зоне

$$M(\chi^A - u) < N\chi^A - Nu \tag{26}$$

Рассмотрим правую часть соотношения (26)

$$2k\left[\exp\left(-\frac{\sigma_0}{2k} + \frac{\Delta\chi^A}{2k}\right) - \exp\left(-\frac{\sigma_0}{k} + \frac{\Delta u}{2k}\right)\right]$$

Так как функции χ^A и u — бигармонические в области D^e [3], то из (24) и условия совпадения χ^A и u на Γ вплоть до вторых производных следует, что $\Delta\chi^A < \Delta u$ в D^e. Отсюда вытекает, что $N\chi^A \leqslant Nu$ в D^e, а следовательно, в соответствии с (26) в упругой области выполняется неравенство $M(\chi^A - u) < 0$. Выше было показано, что из последнего следует неравенство (25).

Повторяя изложенные ранее рассуждения, приходим к эквивалентности рассматриваемой УПЗ контактной задаче об изгибе пластинки формы Ω в плане штампом $z = F^A = \chi^A(r) - u^e(x, y)$, которая в свою очередь сводится к экстремальной задаче (21) на выпуклом множестве

$$K_1' = \{\zeta' \mid \zeta' \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega), \quad \zeta'(x, y) \geqslant F^A(x, y)\}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Плоская упругопластическая задача // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 3. С. 367—386.
2. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк. 1969. 608 с.
3. *Аннин Б. Д.*, *Черепанов Г. П.* Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1983. 238 с.
4. *Ивлев Д. Д.*, *Ершов В. Л.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука. 1978. 208 с.
5. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка. 1968. 887 с.
6. *Эрлихман Ф. М.*, *Машуков В. И.* О поведении решения в окрестности упругопластической границы в случае плоской деформации // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1970. Вып. 4. С. 120—130.
7. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966. 443 с.
8. *Duvaut G.*, *Lions J.-L.* Les inéquations en mécanique et en physique. P.: Dunod. 1972 = М.: Мир. 1980. 383 с.
9. *Михлин С. Г.* Об устойчивости решений односторонних вариационных задач: приложения к теории пластичности // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1981. Т. 102. С. 68—101.
10. *Кузнецов А. И.* Плоская деформация неоднородных пластических тел // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математика, механика и астрономия. 1958. № 13. Вып. 3. С. 112—131.
11. *Галин Л. А.* Аналогия для плоской упругопластической задачи // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 6. С. 757—760.
12. *Caffarelli L. A.*, *Friedman A.* The obstacle problem for the biharmonic operator // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. IV. 1979. V. 6. No 1. P. 151—184.
13. *Черноусько Ф. Л.*, *Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука. 1976. 238 с.
14. *Francis Ph. H.*, *Rim Kwan.* A method of solving certain plane problems of contained elastoplasticity // SIAM J. Appl. Math. 1967. V. 15. No 4. P. 842—855.

Кишинев

Поступила в редакцию 7.IV.1987