

УДК 539.3

**РАСТЯЖЕНИЕ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТОНКИМ УПРУГИМ  
ВКЛЮЧЕНИЕМ, ОРТОГОНАЛЬНО ВЫХОДЯЩИМ  
НА ПРЯМУЮ ЛИНИЮ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ**

Евтушенко А. А., Сорокатый Ю. И.

Решается задача плоской теории упругости о растяжении составной плоскости с тонким упругим включением конечной длины, ортогонально выходящим на прямую линию раздела материалов. Результаты численного решения сингулярного интегрального уравнения этой задачи представлены для коэффициентов интенсивности напряжений и касательных напряжений на осевой линии включения. Как частные случаи из полученных результатов следуют решения соответствующих задач для трещины [1—4] и абсолютно жесткого включения. Ранее [5—7] исследовалась особенность поля напряжений вблизи вершины малоподратливого включения, выходящей на свободную границу однородной изотропной полуплоскости.

Была решена [8] задача упругого равновесия кусочно-однородной плоскости, состоящей из двух спаянных полуплоскостей, внутри одной из которых расположено тонкое упругое включение конечной длины  $2a_0 = b - a$  и толщины  $2h$ . Составное тело находится под действием однородных полей растягивающих усилий на бесконечности  $\sigma_0, \sigma_1$  и  $\sigma_2$ , причем

$$(1) \quad k_0^1 \sigma_1 = k_0^2 \sigma_2 - (k_1^2 - k_1^1) \sigma_0, \quad k_0^j = (1 + \kappa_j)/(8\mu_j), \quad k_1^j = (3 - \kappa_j)/(8\mu_j).$$

где  $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$  для плоской деформации,  $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$  для обобщенного плоского напряженного состояния,  $\mu_j, \nu_j$  ( $j = 1, 2$ ) — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материалов полуплоскостей. При помощи преобразования Меллина получены выражения для напряжений и производных смещений на оси, совпадающей на отрезке  $a < r < b$  со срединной линией включения ([8], формула (10)). Переходя в этих соотношениях к пределу  $a \rightarrow 0, \theta = \pi$  (фиг. 1), находим

$$(2) \quad \begin{aligned} \tau_{1\theta\theta}(r, \pi) &= \tau_{1\theta\theta}^0(r, \pi) + a_{11}t_1(r) + a_{12}t_2(r) + h_1(r) \\ u_{1r}'(r, \pi) &= u_{1r}^{0'}(r, \pi) + a_{21}t_1(r) + a_{22}t_2(r) + h_2(r), \\ 0 < r < b \end{aligned}$$

Здесь

$$t_j(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{f_j(r_0)}{r_0 - r} dr_0, \quad h_i(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^b \sum_{j=1}^2 K_{ij}(r_0, r) f_j(r_0) dr_0.$$

$$K_{ij}(r, r_0) = \sum_{n=0}^2 c_{ij}^n \frac{r^n}{(r_0 + r)^{n+1}} \quad (i, j = 1, 2)$$

$$c_{11}^n = \frac{b_{11}^n}{1 + \kappa_1}, \quad c_{12}^n = -a_{12}b_{12}^n, \quad c_{21}^n = \frac{a_{21}b_{21}^n}{\kappa_1},$$

$$c_{22}^n = \frac{b_{22}^n}{1 + \kappa_1} \quad (n = 0, 1, 2)$$

$$b_{11}^0 = b_{22}^0 = l_1 + 3(2 + \kappa_1)l_2, \quad b_{11}^1 = -2(7 + \kappa_1)l_2,$$

$$b_{12}^0 = l_1 + 3l_2, \quad b_{12}^1 = b_{21}^1 = -12l_2$$

$$b_{21}^0 = l_1 + (4 - \kappa_1^2)l_2, \quad b_{22}^1 = 4(5 - \kappa_1)l_2, \quad b_{ij}^2 = 8l_2$$

$$(i, j = 1, 2)$$

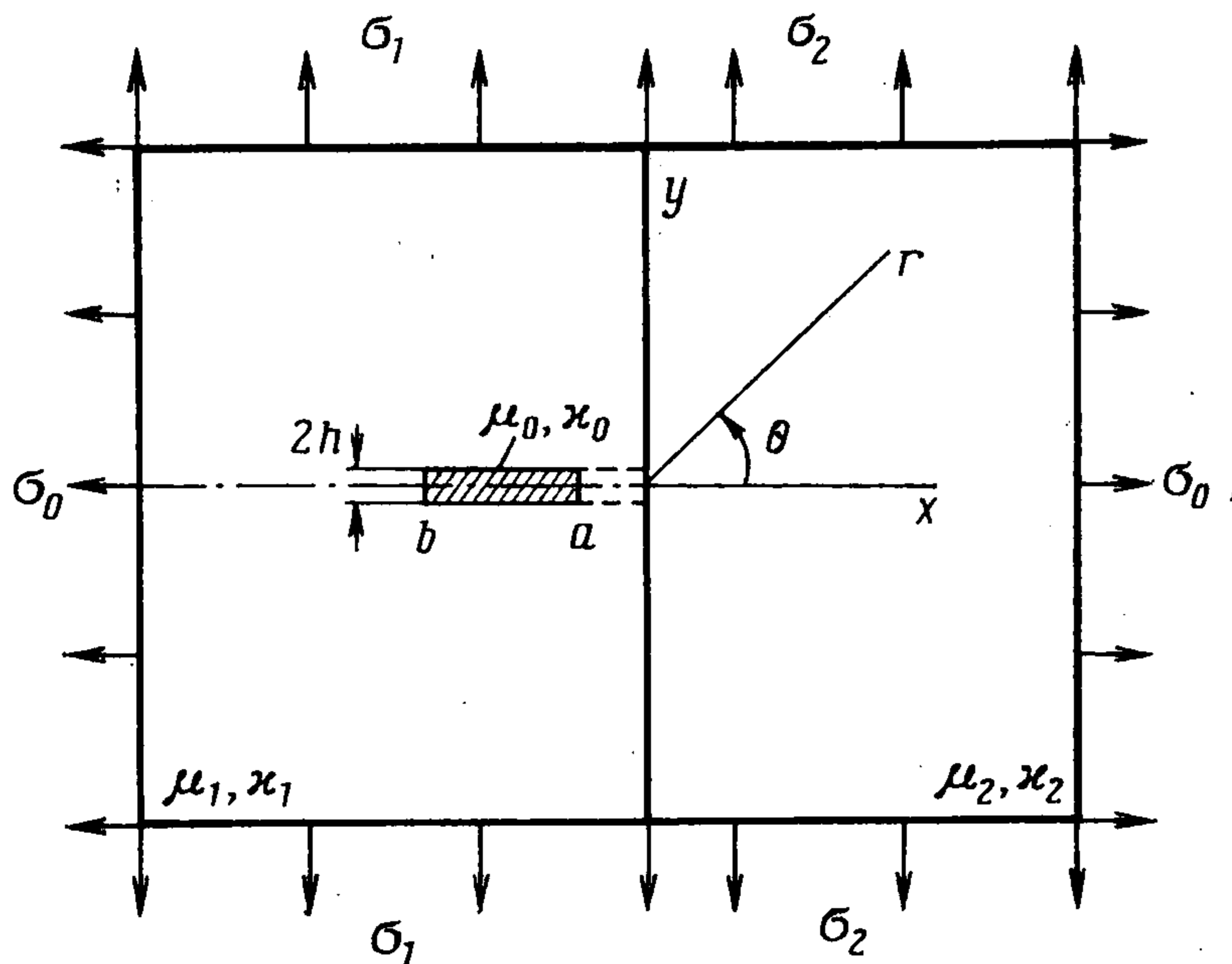
$$l_1 = \frac{m\kappa_1 - \kappa_2}{2(m + \kappa_2)}, \quad l_2 = \frac{1 - m}{2(1 + m\kappa_1)}, \quad m = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$a_{11} = a_{22} = \frac{\kappa_1 - 1}{2(\kappa_1 + 1)}, \quad a_{12} = \frac{2\mu_1}{\kappa_1 + 1}, \quad a_{21} = -\frac{\kappa_1}{2\mu_1(\kappa_1 + 1)}$$

$f_j(r)$  ( $j = 1, 2$ ) — скачки напряжений и перемещений, моделирующие наличие включения

$$(3) \quad \tau_{1r\theta}(r, \pi) = -1/2 f_1(r), \quad u_{1r}'(r, \pi) = -1/2 f_2(r), \quad 0 < r < b$$

$\tau_{1\theta\theta}^0, u_{1r}^0$  — напряжения и смещения от заданной внешней нагрузки



Фиг. 1

при отсутствии включения; штрихом отмечены производные соответствующих величин по переменной  $r$ .

Условия взаимодействия тонкого упругого включения с матрицей, записанные с учетом симметрии рассматриваемой задачи относительно плоскости  $0 < r < \infty, \theta = \pi$ , имеют вид [9—11]

$$(4) \quad \begin{aligned} u_{1r}'(r, \pi) &= k_0^0 \tau_{1r}^a(r, \pi) - k_1^0 \tau_{1\theta\theta}(r, \pi) \\ h^{-1} u_{1\theta}(r, \pi) &= k_0^0 \tau_{1\theta\theta}(r, \pi) - k_1^0 \tau_{1r}^a(r, \pi) \\ u_{1\theta}'(r, \pi) &= \mu_0^{-1} \tau_{1r\theta}(r, \pi), \quad 0 \leq r < b \end{aligned}$$

$$\tau_{1r}^a(r, \pi) = \tau_{1rr}(0, \pi) - h^{-1} \int_0^r \tau_{1r\theta}(r_0, \pi) dr_0; \quad k_0^0 = \frac{1 + \kappa_0}{8\mu_0},$$

$$k_1^0 = \frac{3 - \kappa_0}{8\mu_0}$$

( $\mu_0, \nu_0$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала включения). Исключив из первых двух равенств (4) среднее растягивающее напряжение  $\tau_{1r}^a(r, \pi)$  в поперечном сечении включения, получаем

$$(5) \quad \begin{aligned} u_{1r}'(r, \pi) + k_0^0 (hk_1^0)^{-1} u_{1\theta}(r, \pi) &= -k_2 \tau_{1\theta\theta}(r, \pi), \quad 0 \leq r \leq b \\ k_2 &= (k_1^{02} - k_0^{02})/k_1^0 \end{aligned}$$

Подстановка выражений (2) в условие (5) с учетом третьего из соотношений (4) приводит к сингулярному интегральному уравнению (СИУ)

$$(6) \quad \frac{\lambda_1}{\pi} \int_0^b \frac{f_2(r_0)}{r_0 - r} dr_0 + \lambda_2 \int_0^r f_2(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^b K(r_0, r) f_2(r_0) dr_0 = F(r)$$

$$f_1(r) = \mu_0 f_2(r), \quad 0 < r < b$$

$$K(r_0, r) = \mu_0 k_2 K_{11}(r_0, r) + k_2 K_{12}(r_0, r) + \mu_0 K_{21}(r_0, r) + K_{22}(r_0, r)$$

$$F(r) = -k_2 \tau_{1\theta\theta}^0(r, \pi) - u_{1r}^{0'}(r, \pi) - k_0^0 (k_1^0 h)^{-1} u_{1\theta}^0(0, \pi)$$

$$\lambda_1 = \mu_0 a_{11} k_2 + a_{12} k_2 + \mu_0 a_{21} + a_{22}, \quad \lambda_2 = -k_0^0 (2hk_1^0)^{-1}$$

Искомая функция  $f_2(r)$  удовлетворяет дополнительному условию [8, 10]

$$(7) \quad \int_0^b f_2(r_0) dr_0 = A$$

$$A = [u_{1\theta}(0, \pi) - u_{1\theta}(b, \pi)] \cdot h^{-1} \simeq \varepsilon_{1\theta\theta}(0, \pi) - \varepsilon_{1\theta\theta}(b, \pi)$$

(выражение для  $A$  записано на основании определения скачков (3)).

Деформацию  $\varepsilon_{1\theta\theta}(0, \pi)$  представим в форме

$$(8) \quad \varepsilon_{1\theta\theta}(0, \pi) = k_0^0(\sigma_1 + M) - k_1^0(\sigma_0 + L)$$

где постоянные  $M$  и  $L$  должны обеспечивать непрерывность изменения решения задачи при переходе от материала включения к материалу матрицы. Этому требованию удовлетворяют значения

$$(9) \quad M = \Delta_1/\Delta, \quad L = \Delta_2/\Delta$$

$$\Delta = \delta_{0+}^{01}\delta_{0+}^{20} - \delta_{1+}^{01}\delta_{1+}^{02}$$

$$\Delta_1 = 2(k_0^0k_1^0 - k_0^1k_1^2)\sigma_0 + (\delta_{1-}^{01}\delta_{1+}^{02} - k_0^0\delta_{0+}^{01})\sigma_1 + k_0^2\delta_{0+}^{01}\sigma_2,$$

$$\Delta_2 = (\delta_{0-}^{01}\delta_{0+}^{20} + \delta_{1-}^{02}\delta_{1+}^{01})\sigma_0 + (k_0^2\delta_{1-}^{01} - 2k_0^0k_1^1)\sigma_1 + k_0^2\delta_{1+}^{01}\sigma_2$$

$$\delta_{p\pm}^{ln} = k_p^l \pm k_p^n; \quad p = 0, 1; \quad l, n = 0, 1, 2$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при отсутствии включения ( $\mu_0 = \mu_1, \nu_0 = \nu_1$ ), наличии трещины ( $\mu_0 = 0, \nu_0 = 0$ ) или абсолютно жесткого включения ( $\mu_0 = \infty, \nu_0 = 0,5$ ) значения  $\varepsilon_{1\theta\theta}(0, \pi)$  (8) совпадают с решениями соответствующих задач. Постоянная  $\varepsilon_{1\theta\theta}(b, \pi)$  получается из (8), (9) заменой всех индексов 2 на 1.

В случае абсолютно жесткого включения ( $\mu_0 = \infty, \nu_0 = 0,5$ ) из интегрального уравнения (6) следует  $f_2(r) = 0$  и получаем уравнение

$$\frac{a_{21}}{\pi} \int_0^b \frac{f_1(r_0)}{r_0 - r} dr_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^b K_{21}(r_0, r) f_1(r_0) dr_0 = -u_{1r}^{0'}(r, \pi),$$

$$0 \leq r \leq b$$

для определения скачка касательных напряжений.

Когда же  $\mu_0 = 0, \nu_0 = 0$ , то из (6) получаем  $f_1(r) = 0$ , и уравнение, описывающее упругое равновесие двух разнородных полуплоскостей с математическим разрезом, выходящим одной своей вершиной на прямую линию спая [4]

$$\frac{a_{12}}{\pi} \int_0^b \frac{f_2(r_0)}{r_0 - r} dr_0 +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^b K_{12}(r_0, r) f_2(r_0) dr_0 = -\tau_{1\theta\theta}^0(r, \pi), \quad 0 < r < b$$

Путем замены переменных  $2r = b(x + 1)$ ,  $2r_0 = b(t + 1)$  и учета соотношения

$$\int_{-1}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sign}(x - t) \varphi(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt, \quad -1 < x < 1$$

интегральное уравнение (6) и условие (7) запишем в виде

$$(10) \quad \frac{\lambda_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(t)}{t - x} dt + \lambda_2' \int_{-1}^1 \text{sign}(x - t) \varphi_2(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x, t) \varphi_2(t) dt = \Phi(x)$$

$$\varphi_1(x) = \mu_0 \varphi_2(x), \quad -1 < x < 1$$

$$(11) \quad \int_{-1}^1 \varphi_2(t) dt = A'$$

Здесь

$$k(x, t) = \sum_{n=0}^2 d_n (1+x)^n \frac{d^n (t+x+2)^{-1}}{dx^n},$$

$$d_n = \mu_0 k_2 d_{11}^n + k_2 d_{12}^n + \mu_0 d_{21}^n + d_{22}^n$$

$$d_{ij}^0 = b_{ij}^0, \quad d_{ij}^1 = -b_{ij}^1, \quad d_{ij}^2 = 1/2 b_{ij}^2 \quad (n=0, 1, 2; i, j=1, 2)$$

$$\Phi(x) = F(2r/b - 1) - \lambda_2' A, \quad \varphi_j(x) = f_j(2r/b - 1) \quad (j=1, 2),$$

$$A' = 2A/b, \quad \lambda_2' = b\lambda_2/4$$

Решение СИУ (6) при условии (7) ищем в форме

$$(12) \quad \varphi_j(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta g_j(t), \quad -1 < \alpha, \beta < 0, \quad -1 < t < 1$$

$$(j=1, 2)$$

( $g_j(t)$  — ограниченная измеримая функция). Используя асимптотические значения интегралов Коши [12]

$$(13) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_i(t)}{t-x} dt = -g_i(-1) 2^\alpha \operatorname{ctg} \pi\beta (x+1)^\beta +$$

$$+ g_i(1) 2^\beta \operatorname{ctg} \pi\beta (1-x)^\alpha + \Phi_{0i}(x)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_i(t) (x+1)^n \frac{d^n (t+x+2)^{-1}}{dx^n} dt =$$

$$= -g_i(-1) \frac{2^\alpha}{\sin \pi\beta} \beta(\beta-1) \dots (\beta-n+1) (x+1)^\beta +$$

$$+ (x+1)^n \frac{d^n \Phi_{1i}(x)}{dx^n}, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (n=0, 1, 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (1+x)^{-\beta} [\Phi(x), \Phi_{0i}(x), (x+1)^n \Phi_{1i}^{(n)}(x)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{-\alpha} [\Phi(x), \Phi_{0i}(x), (x+1)^n \Phi_{1i}^{(n)}(x)] = 0$$

где  $\Phi_{ki}(x) \in H_{\gamma_{ki}}([-1, 1]; R^1)$ ,  $\gamma_{ki}$  ( $k=0, 1; i=1, 2$ ) — показатель Гельдера, из СИУ (10) получаем

$$(14) \quad \operatorname{ctg} \pi\alpha = 0, \quad \alpha = -1/2$$

$$\lambda_1 \cos \pi\beta + d_0 + d_1\beta + d_2\beta(\beta-1) = 0$$

Исследование второго из уравнений (14) показало, что оно содержит один действительный корень  $\beta_0$  на интервале  $(-1, 0)$  для произвольных значений  $m = \mu_2/\mu_1$  и  $\varepsilon = \mu_0/\mu_1$ . Значения  $-\beta_0 \cdot 10^3$  приведены в таблице при  $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0,3$ .

С учетом (12) СИУ (10) при условии (11) решаем численно путем применения аналога квадратурной формулы Гаусса — Якоби [4] для инте-

$m$	$\varepsilon = 10^{-3}$	0,1	10	$10^3$	$m$	$\varepsilon = 10^{-3}$	0,1	10	$10^3$
$10^3$	289	255	871	977	0,98	502	502	498	497
$10^2$	294	260	851	929	0,1	754	786	377	321
23,1	302	278	742	855	0,045	826	858	367	304
10	333	305	709	786	$10^{-2}$	915	933	360	292
1,02	498	497	501	502	$10^{-3}$	973	963	358	289
1,0	500	500	500	500					

гралов Коши. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$(15) \quad \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N g_2(t_j) W_j \left[ \frac{\lambda_1}{t_j - x_k} + \lambda_2' \pi \operatorname{sign}(x_k - t_j) + k(x_k, t_j) \right] = \Phi(x_k)$$

$$\sum_{j=1}^N W_j g_2(t_j) = A', \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

Здесь

$$P_N^{(\alpha, \beta)}(t_j) \equiv 0, \quad P_{N-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x_k) \equiv 0$$

$$W_j = - \frac{2N + \alpha + \beta + 2}{(N+1)! (N + \alpha + \beta + 1)} \frac{\Gamma(N + \alpha + 1) \Gamma(N + \beta + 1)}{\Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \times$$

$$\times \frac{2^{\alpha+\beta}}{P_N^{(\alpha, \beta)'}(t_j) P_{N+1}^{(\alpha, \beta)}(t_j)}$$

$P_N^{(\alpha, \beta)}(\cdot)$  — полиномы Якоби,  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция. Коэффициенты интенсивности напряжений у торцов включения определим в форме

$$(16) \quad k(0) = \lim_{r \rightarrow 0} 2^{1/2} r^{-\beta} \tau_{2\theta\theta}(r, 0), \quad k(b) = \lim_{r \rightarrow b} [2(r-b)]^{1/2} \tau_{1\theta\theta}(r, \pi)$$

где напряжения  $\tau_{1\theta\theta}(r, \pi)$  даются соотношениями (2), а  $\tau_{2\theta\theta}(r, 0)$  на основании [8] таковы:

$$(17) \quad \tau_{2\theta\theta}(r, 0) = \tau_{2\theta\theta}^0(r, 0) + H(r), \quad 0 < r < \infty$$

$$H(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^b \sum_{j=1}^2 Q_j(r_0, r) f_j(r_0) dr_0$$

$$Q_j(r_0, r) = \sum_{n=0}^1 q_j^n \frac{r^n}{(r_0 + r)^{n+1}} \quad (j = 1, 2)$$

$$q_1^0 = 1/2 m [(2 + \kappa_1) l_3 - 3l_4], \quad q_1^1 = m (l_4 - l_3)$$

$$q_2^0 = \mu_2 (3l_4 - l_3), \quad q_2^1 = 2\mu_2 (l_3 - l_4)$$

$$l_3 = (1 + m\kappa_1)^{-1}, \quad l_4 = (m + \kappa_2)^{-1}$$

С использованием асимптотических соотношений (13) из (17) получим

$$(18) \quad \tau_{2\theta\theta}(r, 0)|_{r>0} = -\mu_1^* f_1(r)|_{r<0} + \mu_2^* f_2(r)|_{r<0} + O(r^\lambda), \quad \lambda > 0$$

$$\mu_1^* = m \frac{(3 + 2\beta) l_4 - (2 + \kappa_1 + 2\beta) l_3}{2 \sin \pi\beta}$$

$$\mu_2^* = \mu_2 \frac{(3 + 2\beta) l_4 - (1 + 2\beta) l_3}{\sin \pi\beta}$$

У торца  $r = b$  из (2) получаем

$$(19) \quad \tau_{1\theta\theta}(r, \pi)|_{r>b} = a_{11} f_1(r)|_{r<b} + a_{12} f_2(r)|_{r<b} + O[(r-b)^\lambda], \quad \lambda > 0$$

Подстановка выражений (18), (19) в (16) дает

$$(20) \quad k(0) = a_a^{-\beta} [\mu_1^* q_1(-1) + \mu_2^* g_2(-1)]$$

$$k(b) = a_0^{1/2} 2^{1/2+\beta} [a_{11} g_1(1) + a_{12} g_2(1)]$$

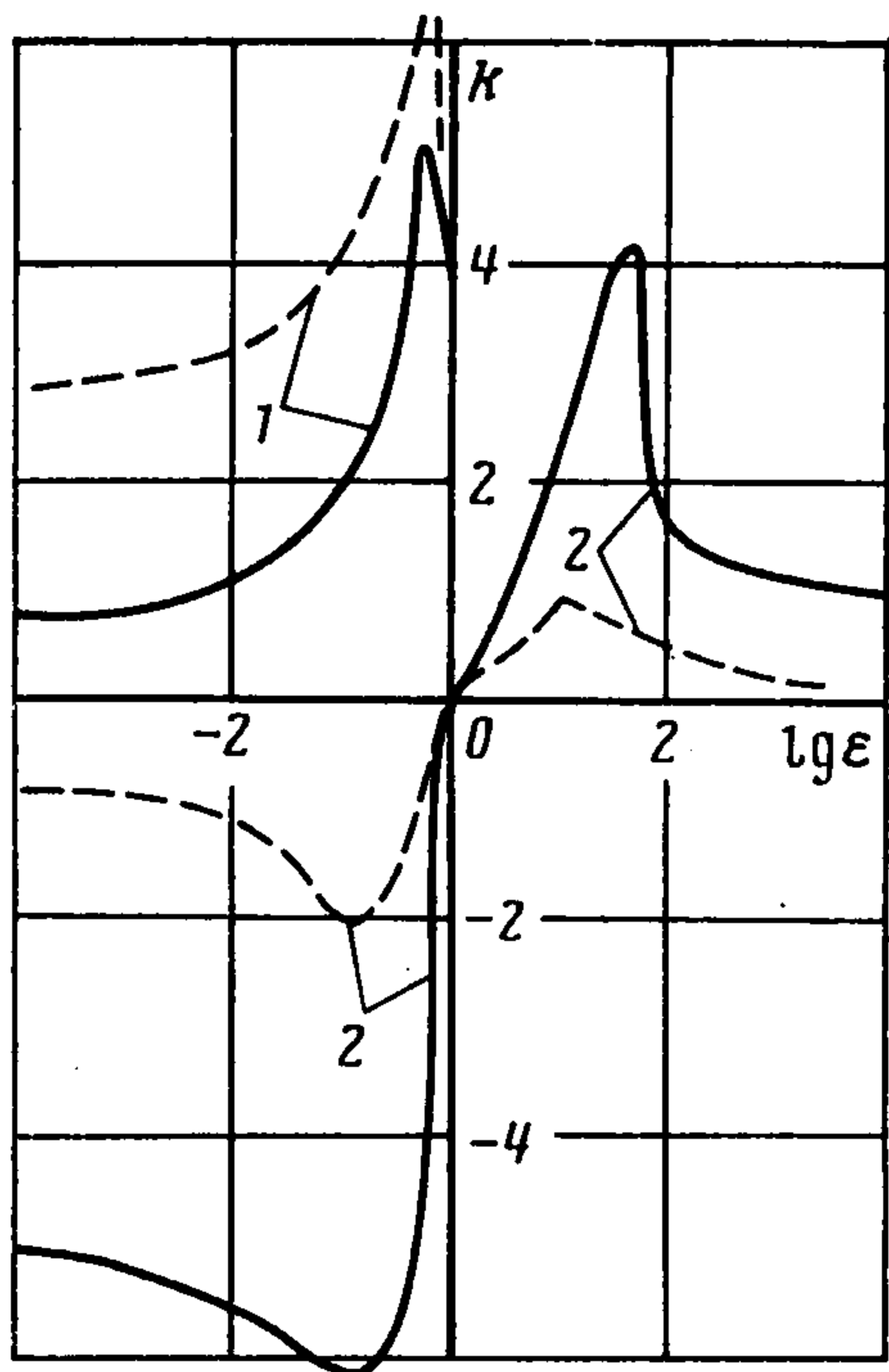
На фиг. 2 показана зависимость вычисленных по формулам (20) коэффициентов интенсивности напряжений  $k(0)/(\sigma_j a_0^{-\beta})$  (штриховая линия) и  $k(b)/(\sigma_j a_0^{1/2})$  (сплошная) ( $j = 1, 2$ ) от относительной жесткости включения  $\varepsilon$ . Индекс  $j = 1$  и кривые 1 соответствуют случаю  $m = 23,08$  (алюминий — эпоксид),  $j = 2$  и кривые 2 —  $m = 0,045$  (эпоксид — алюминий). Внешнюю растягивающую нагрузку задавали равной (при учете (1)):

$$(21) \quad \sigma_0 = k_1^1/k_0^1 = 0,428, \quad \sigma_1 = 1,0, \quad \sigma_2 = 19,0 \text{ (алюминий — эпоксид)}$$

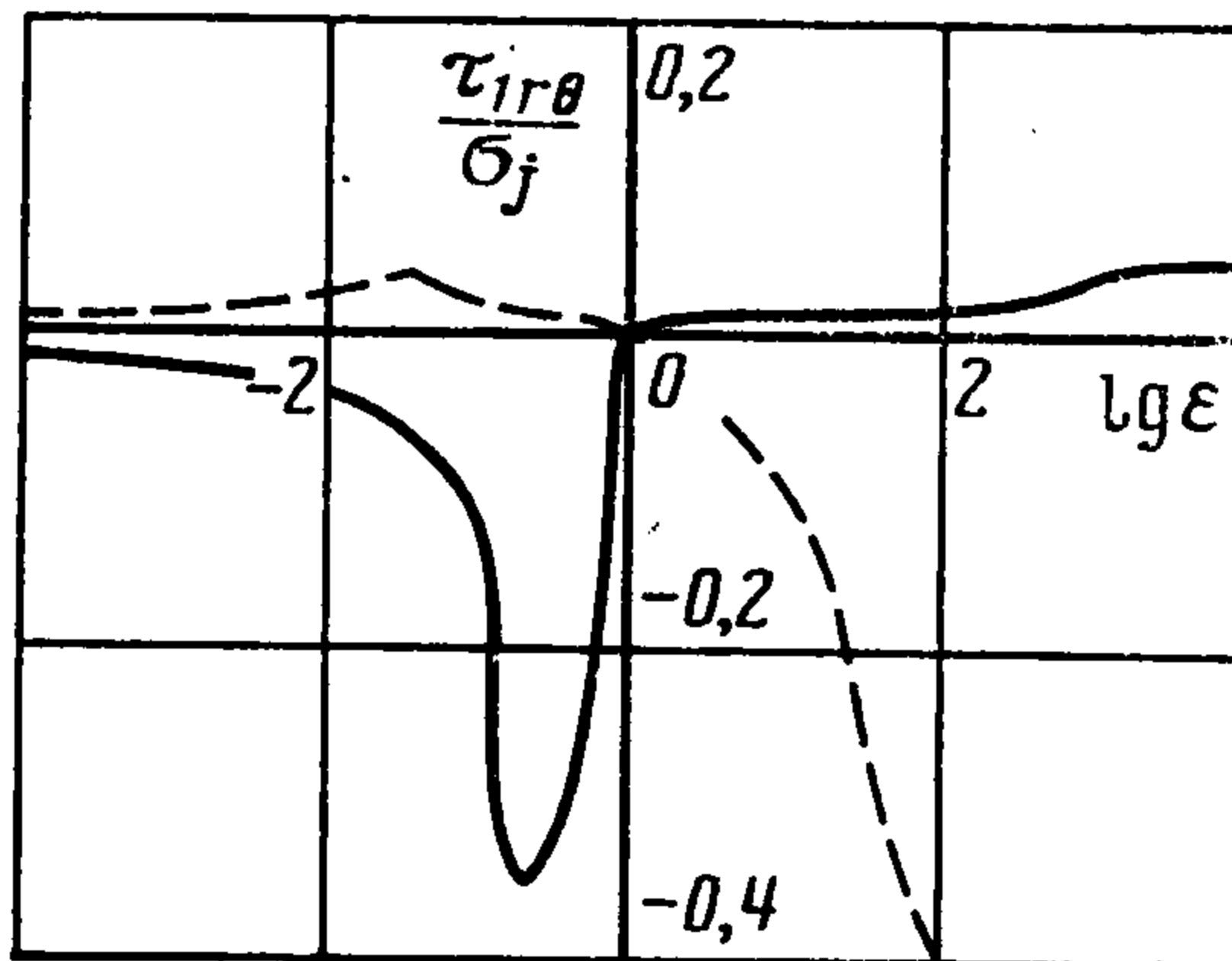
$$\sigma_0 = k_1^2/k_0^1 = 0,428, \quad \sigma_2 = 1,0, \quad \sigma_1 = 18,3 \text{ (эпоксид — алюминий)}$$

$$\kappa_j = 3 - 4\nu_j, \quad \nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0,3, \quad h/b = 0,1$$

Значения  $g_j(\pm 1)$



Фиг. 2



Фиг. 3

( $i = 1, 2$ ) определяем по данным решения системы алгебраических уравнений (15)  $g_i(t_j)$  ( $i = 1, 2$ ) при помощи интерполяционной формулы [13]

$$g_i(x) \approx \sum_{k=0}^{N-1} e_{ki} P^{(\alpha, \beta)}(x), \quad e_{ki} = p_k^{-1} \sum_{j=1}^N W_j P_k^{(\alpha, \beta)}(t_j) g_i(t_j)$$

$$p_k = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2k + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(k + \alpha + 1) \Gamma(k + \beta + 1)}{k! \Gamma(k + \alpha + \beta + 1)}$$

Для достижения относительной точности вычислений в 1% (определяемой путем сравнения последующих приближений с предыдущими) потребовалось взять  $N = 25$ . Изменение касательных напряжений  $\tau_{1r\theta}(r, \pi)/\sigma_j$  ( $j = 1, 2$ ) в точке  $r = 0,1$   $b$  осевой линии включения в зависимости от  $\epsilon$  показано на фиг. 3. Растягивающие напряжения задавались также в виде (21).

Авторы благодарят Д. В. Грилицкого, под руководством которого выполнена работа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине // Тр. Америк. о-ва инж.-механиков Сер. Е. Прикл. механика. 1968. Т. 35. № 4. С. 124—135.
2. Маневич Л. И., Павленко А. В. О характере особенности контактных напряжений при передаче нагрузки от стержня к полубесконечной упругой пластине // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Изд-во Днепропетров. ун-та. 1979. С. 150—155.
3. Тихоненко Л. Я. Об особенности решения задачи для упругой полуплоскости со стержнем, ортогонально выходящим на границу // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 454—459.
4. Зак А., Вильямс М. Сингулярности в напряжениях у конца трещины на поверхности раздела двух материалов // Тр. Америк. о-ва инж.-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1963. Т. 30. № 1. С. 169—171.
5. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука. 1974. 640 с.
6. Боджи Д. Плоская статическая задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела материалов // Тр. Америк. о-ва инж.-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1971. Т. 38. № 4. С. 196—202.
7. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. Numerical solution of singular integral equations // Mechanics of Fracture. I. Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden: Noordhoff Intern. Publ. Co. 1973. P. 368—425.
8. Евтушенко А. А. Упругое равновесие составной плоскости с произвольно расположенным тонким упругим включением // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 875—881.
9. Чобанян К. С., Хачикян А. С. Плоское деформируемое состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением // Изв. АН АрмССР. Механика. 1967. Т. 20. № 6. С. 19—29.
10. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
11. Сулим Г. Т. Термоупругие условия взаимодействия среды с тонкостенным включением // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. 1979. Вып. 15. С. 83—92.
12. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука. 1977. 640 с.
13. Krenk S. On the use of the interpolation polynomial for solutions of singular integral equations // Quart. Appl. Math. 1975. V. 32. No. 4. P. 479—484.