

УДК 539.3

О ДВУХ ПОДХОДАХ К ИССЛЕДОВАНИЮ АНТИПЛОСКОЙ
ДЕФОРМАЦИИ ИЗОТРОПНОГО МАССИВА
С ТОНКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Опанасович В. К.

Предлагается подход к исследованию напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной плоскости, состоящей из матрицы и туннельного тонкого прямоугольного включения с закругленными углами, в предположении, что такое составное тело находится в условиях антиплоской деформации. Проводится численное сравнение результатов, полученных в данной работе и на основании приближенной модели [1]. Показано удовлетворительное их совпадение на достаточно больших расстояниях от вершины включения, когда включение податливее матрицы.

1. Предположим, что на линии раздела материалов L выполняются условия идеального механического контакта. Выберем декартову систему координат $OxyZ$ с началом в центре прямоугольного включения и осью OZ , направленной по оси деформации тела. Известно, что функция, отражающая единичную окружность γ на контур L , имеет вид [2, 3].

$$(1.1) \quad z = x + iy = \omega(\sigma) = R \left(\sigma + \sum_{k=1}^n c_k \sigma^{-k} \right), \quad \sigma \in \gamma$$

$$R = \left(1 + \sum_{k=1}^n c_k \right)^{-1}$$

Согласно постановке задачи, на линии L должны выполняться условия

$$(1.2) \quad \tau = \tau_0, \quad \partial w_0 / \partial s = \partial w / \partial s$$

Здесь τ — вектор напряжения на линии раздела материалов, w — отличная от нуля компонента вектора смещения; s — дуговая координата линии L ; нижний нулевой индекс означает, что соответствующая величина отнесена к включению.

Введем в рассмотрение функцию напряжений $F(z)$ [4]. Тогда можно записать соотношения [5]

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \Phi(\sigma) - \sigma^{-2} \overline{\Phi(\sigma)} &= -2i\mu\sigma^{-1} |\omega'(\sigma)| \partial w / \partial s \\ \Phi(\sigma) + \sigma^{-2} \overline{\Phi(\sigma)} &= 2\tau\sigma^{-1} |\omega'(\sigma)|; \quad \sigma \in \gamma \\ \Phi(\sigma) &= F(\omega(\sigma)) \omega'(\sigma) \end{aligned}$$

Для простоты выкладки предположим, что функция $F(z)$ при больших z имеет вид

$$(1.4) \quad F(z) = -i\tau_l + O(z^{-2})$$

($\tau_{yz}^\infty = \tau_l$ — компонента касательного напряжения на бесконечности).

Учитывая соотношения (1.3), граничные условия (1.2) можно записать таким образом:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \mu_0 [\Phi(\sigma) - \sigma^{-2} \overline{\Phi(\sigma)}] &= \mu [\Phi_0(\sigma) - \sigma^{-2} \overline{\Phi_0(\sigma)}] i \\ \Phi(\sigma) + \sigma^{-2} \overline{\Phi(\sigma)} &= \Phi_0(\sigma) + \sigma^{-2} \overline{\Phi_0(\sigma)}; \quad \sigma \in \gamma \end{aligned}$$

Функцию $\Phi_0(\eta)$ будем искать в виде

$$(1.6) \quad \Phi_0(\eta) = i \sum_{k=-N_1}^N A_k \eta^k$$

где A_k — неизвестные коэффициенты, которые найдем на основании системы линейных алгебраических уравнений, полученной из граничных условий задачи

$$\sum_{n=2}^{N+2} A_{-n} (D_{k, -1+n} + \kappa D_{k, 1-n}) = \frac{2\beta R \tau_l}{\beta + 1} D_{k, -1}, \quad k = 1, 2, \dots, N + 1$$

$$A_{-1} = 0, \quad A_0 = 1/2 (\beta + 1) R \tau_l (\kappa^2 - 1) + \kappa A_{-2}$$

$$A_i = \kappa A_{-(i+2)}, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad D_{0,0} = 1, \quad D_{0,j} = 0, \quad j \neq 0$$

$$k \geq 1, \quad D_{k,j} = R (D_{k-1, j-1} + \sum_{\rho=1}^n c_\rho D_{k-1, j+\rho})$$

$$j = -nk, \quad -nk + 1, \dots, k$$

$$D_{k,j} = 0, \quad j < -nk \vee j > k; \quad \kappa = (\beta - 1)/(\beta + 1), \quad \beta = \mu_0/\mu$$

Учитывая соотношения (1.6) и (1.4), на основании (1.5) найдем

$$(1.7) \quad \Phi(\eta) = i R \tau_l (x \eta^{-2} - 1) + \frac{2i}{\beta + 1} \sum_{k=2}^{N+2} A_{-k} \eta^{-k}$$

Заметим, что при $\mu_0 \rightarrow 0$ из (1.7) получим выражение для функции $\Phi(\eta)$ для тела с незагруженным отверстием, при $\mu_0 \rightarrow \infty$ — для тела с жестким включением, при $\mu_0 = \mu$ — решение задачи для однородного тела. Если же положить $c_1 = m$ и $n = 1$ ($0 \leq m < 1$), то придем к решению задачи для тела с эллиптическим включением, совпадающим с решением, полученным иным путем [6].

Воспользовавшись формулой $\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \Phi(\eta)/\omega'(\eta)$ и приняв во внимание (1.7), приходим к следующему выражению для определения напряжений в матрице в точках вещественной оси:

$$x = R \left(r + \sum_{k=1}^n c_k r^{-k} \right), \quad r \geq 1, \quad \tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{\omega'(r)} \left[R (\kappa r^{-2} - 1) \tau_l + \frac{2}{1 + \beta} \sum_{k=2}^M A_{-k} r^{-k} \right].$$

Представим функцию напряжений $F_0(z)$ для включения в виде

$$(1.8) \quad F_0(z) = i \sum_{k=1}^{N+1} B_k z^{k-1}$$

Для определения коэффициентов B_k , учитывая (1.6), будем иметь соотношения

$$B_n = \sum_{k=n-1}^N A_k \gamma_{n, k+1}$$

$$\gamma_{1,1} = \frac{1}{R}, \quad \gamma_{1,2} = 0, \quad \gamma_{1,k} = -\sum_{j=1}^{k-2} \gamma_{1,j} c_{k-j-1}$$

$$k = 3, 4, \dots, N + 1$$

$$\gamma_{k+1, m} = \sum_{i=1}^{m-k} \gamma_{k, m-i} \gamma_{1, i}; \quad m = k + 1, k + 2, \dots, N + 1;$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

$$c_i = 0, \quad i > n$$

Численный эксперимент показал, что функции (1.7) и (1.8) с хорошей точностью удовлетворяют граничным условиям (1.2), зависящей от параметра N .

Так как $\tau_{xz} - i\tau_{yz} = F(z)$, то, используя формулу (1.8), приходим к следующим выражениям для определения напряженного состояния во включении на вещественной оси:

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = - \sum_{k=1}^{N+1} B_k x^{k+1}$$

2. Для прямоугольного тонкостенного включения постоянной толщины $2h$ и длины 2 функция $F(z)$ имеет вид [1]

$$F(z) = -i\tau_l + \frac{ih\mu}{2\mu_0} \frac{\tau_l}{\sqrt{z^2-1}} \sum_{k=1}^M \frac{X_k}{(z + \sqrt{z^2-1})^{2k-1}}$$

где $X_k = \pi c Y_k$, а Y_k — решение системы линейных алгебраических уравнений (δ_{1n} — символ Кронекера)

$$\frac{h\mu\pi}{2\mu_0} Y_n + \sum_{k=1}^M \frac{Y_k}{2k-1} H(2k-1, 2n-1) = \delta_{1n}, \quad n = 1, 2, \dots, M$$

$$H(m, n) = \frac{1}{(m+n)^2-1} - \frac{1}{(m-n)^2-1}$$

Постоянную c выберем двойко: как в работе [1]

$$(2.1) \quad c = \begin{cases} \beta - 1, & \beta \leq 1 \\ 0, & \beta > 1 \end{cases}$$

и на основании методики, предложенной в [7]

$$(2.2) \quad c = (\beta - 1) \left[1 + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^M \frac{Y_k \sin(2k-1)\gamma}{(2k-1)\rho^{2k-1}} \right]^{-1}$$

$$\gamma = \arctg \frac{h+d(2+h)}{1+d(2-h)}, \quad d = 2^{-1/2} (1 + 4h^{-2})^{-1/4}$$

$$\rho = [(1 + (2-h)d)^2 + (h + (2+h)d)^2]^{1/2}$$

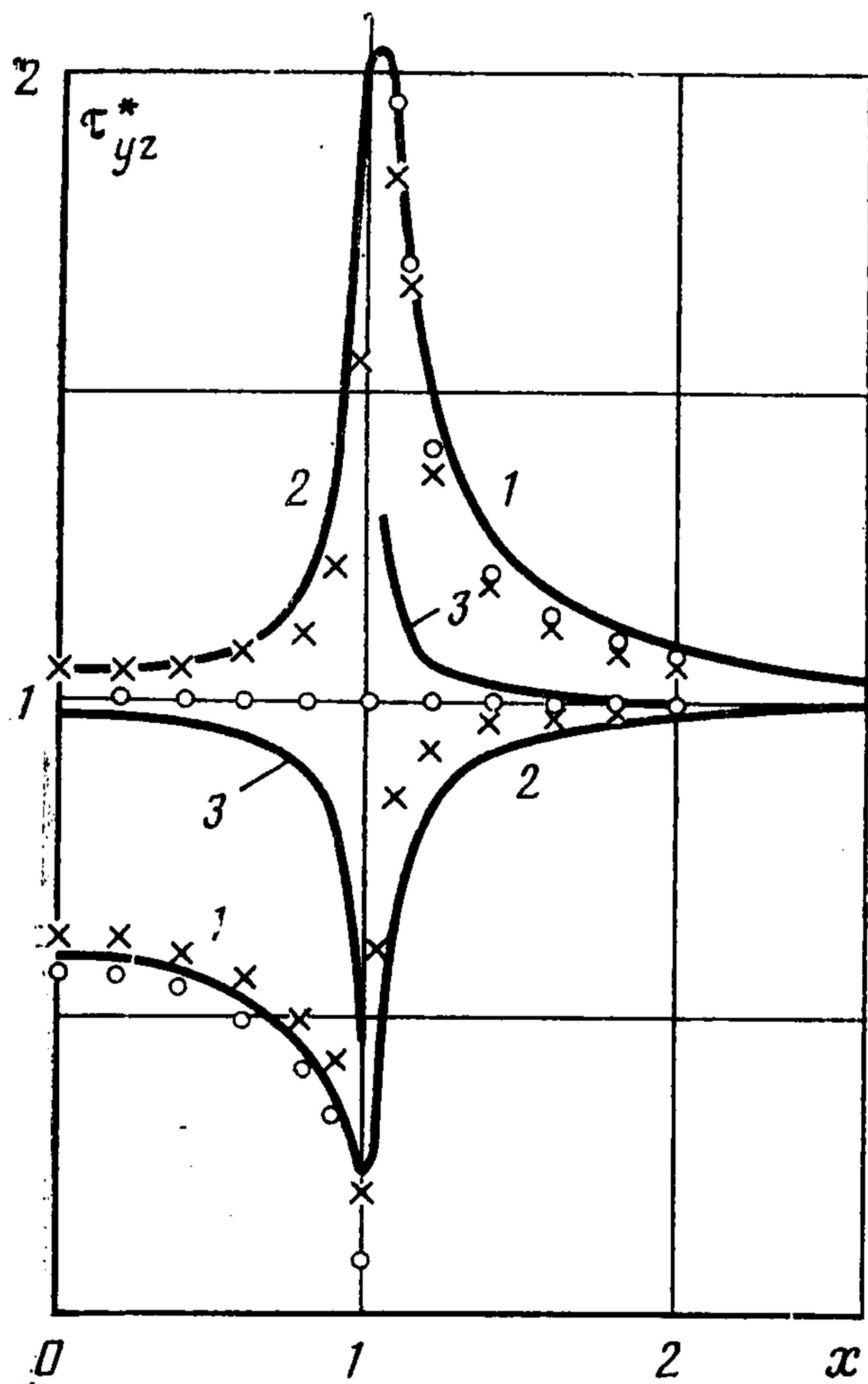
Напряжения на действительной оси как в матрице, так и во включении определим по формулам

$$(2.3) \quad \tau_{xz} = 0, \quad 0 \leq x \leq \infty$$

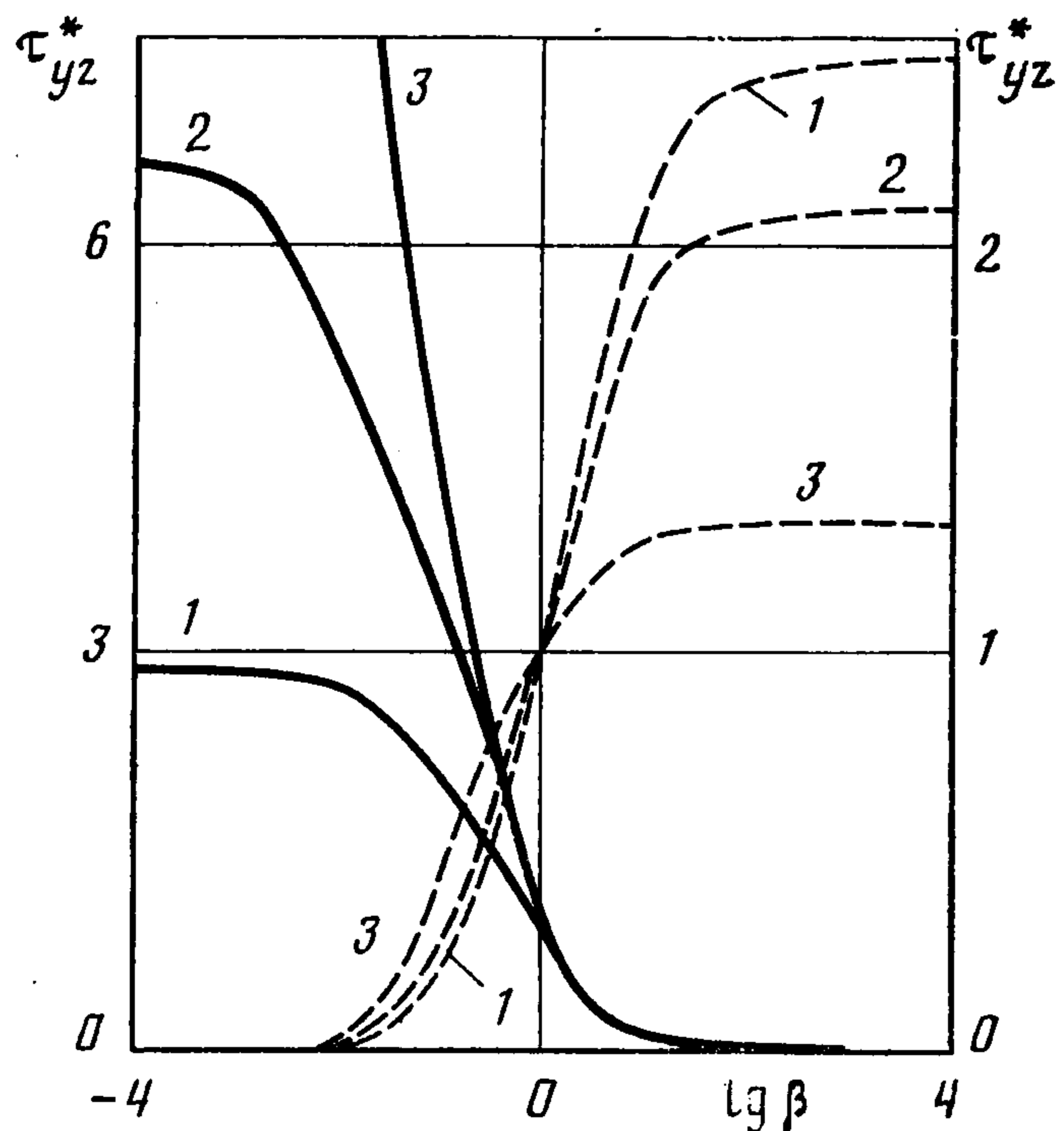
$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_l} = \tau_{yz}^* = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \sum_{k=1}^M \frac{X_k}{2k-1} U_{2(k-1)}(x) + c + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{h}{2\beta} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \sum_{k=1}^M \frac{X_k}{(x + \sqrt{x^2-1})^{2k-1}}, & x > 1 \end{cases}$$

3. Был проведен численный анализ задачи при $n = 11$. Значения коэффициентов c_i в этом случае приведены в [2, 3].

На фиг. 1 дается зависимость напряжений τ_{yz} от координаты x при относительной жесткости включения и матрицы $\beta = 0,1$ (кривые 1, 3) и $\beta = 10$ (кривая 2) для значений высоты включения $h = 0,1; 0,006$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Точками обозначены значения напряжений, вычисленных по формуле (2.3) при постоянной c , определяемой по формуле (2.1), а крестиками — значения тех же напряжений, но при использовании для c формулы (2.2). Видно, что в первом случае более жесткие, чем матрица, включения не влияют на напряженное состояние тела, т. е. этой постоянной можно пользоваться только при $\mu_0 < \mu$. Кроме того, модель включения [1] сравнительно хорошо описывает напряженное состояние вдали от вершины включения. Следует отметить, при подходе, описанном в п. 1, при $\mu_0 < \mu$ вблизи вершины включения в мат-



Фиг. 1



Фиг. 2

рице есть точка действительной оси, где напряжения достигают максимального значения.

На фиг. 2 дается зависимость напряжений τ_{yz}^* от относительной жесткости β в матрице (сплошные линии) и во включении (штриховые) в торцевой точке при $x = 1$, $y = 0$ и при значениях высоты включения $h = 0,1; 0,025; 0,006$ (кривые 1, 2, 3 соответственно).

ЛИТЕРАТУРА

1. Опанасович В. К., Драган М. С. Антиплоская деформация тела с тонкостенным упругим включением // Вест. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. 1981. Вып. 17. С. 69—73.
2. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев: Вища шк. 1975. 227 с.
3. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка. 1968. 887 с.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка. 1981. 323 с.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
6. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука. 1983. 296 с.
7. Александров В. М., Мхитарян М. С. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 487 с.

Львов

Поступила в редакцию
9.X.1986