Прикладная математика и механика. Том 52, вып. 1, 1988

УДК 539.3 : 534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СЛАБОАНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.

Изучаются слабонелинейные плоские волны в упругих материалах, обладающих произвольного вида собственной анизотропией, а также анизотропией, вызванной однородной предварительной деформацией. Влияние деформационной анизотропии на поведение простых и ударных волн подробно исследовано в предыдущих работах авторов [1—3].

При рассмотрении волн малой амплитуды внутреннюю энергию среды можно раскладывать в ряд по деформациям, ограничиваясь членами не выше четвертой степени. Если анизотропия влияет только на вид квадратичных членов, то внутренняя энергия всегда может быть приведена к тому же виду, что и при деформационной анизотропии с сохранением всех свойств нелинейных волн, изучавшихся в [1—3]. Если анизотропия приводит к появлению кубичных членов в разложении внутренней энергии, которые имеют тот же порядок величины, что и связанные с анизотропией квадратичные члены, то показано, что преобразованием системы координат в пространстве градиентов перемещений собственную анизотропию материала для некоторых типов анизотропии, в частности для трансверсально-изотропных и ортотропных сред, можно формально свести к тому же виду, что и для анизотропии, созданной предварительной упругой деформацией в изотропном материале.

1. Описание среды. Упругая среда задается своим упругим потенциалом $\Phi = \rho_0 U(\varepsilon_{ij}, g_{ij}, d_{lmn}^{(k)} \ldots, S)$. Здесь U — внутренняя энергия и S — энтропия единицы массы, ε_{ij} — тензор конечных деформаций Грина, ρ_0 — плотность среды в ненапряженном состоянии, g_{ij} — метрический тензор недеформированного состояния, $d_{lmn\ldots}^{(k)}$ — тензоры, задающие отличие среды от изотропной, например тензоры, задающие группы симметрий.

При изучении плоских волн удобно ввести обозначения $\partial w_i/\partial x = u_i(x, t)$, где x — направление распространения волны, w_i — компоненты вектора перемещения. Координаты $x_1, x_2, x_3 = x$ лагранжевы, в недеформированном состоянии — декартовы прямоугольные ($g_{ij} = \delta_{ij}$). Уравнения движения для плоских волн и соответствующие им условия на разрыве имеют вид [1, 4]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right] = \rho_0 W^2 [u_i], \quad i = 1, 2, 3 \qquad (1.1)$$

Здесь $W = dx/dt$ — лагранжева скорость разрыва. Деформации как начальные u_j^0, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$), так и их изменения при прохождении волны Δu_i считаем малыми, не превышающими некоторой величины ε, и воспользуемся разложением функции Φ в ряд по ε_{ij}, ограничиваясь таким минимальным количеством членов, которые уловят главные нелинейные эффекты. Из работ [1—4] известно, что для получения нелинейных эффектов в поперечных волнах понадобится разложение Φ до степеней ε^4, для продольных — до ε^3.

Отличие материала от изотропного считаем небольшим, характеризуем его некоторым параметром δ, таким, что $\delta \leqslant \varepsilon$. В частности, этому автоматически удовлетворяет деформационная анизотропия, созданная предварительной деформацией $\varepsilon_{\alpha\beta} \sim \varepsilon$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$. При слабой анизотропии любой природы волны станут квазипродольными и квазипоперечными, все три характеристические скорости будут различны.

Представим упругий потенциал Φ в виде двух слагаемых $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$. Первое слагаемое задает изотропную среду без начальных деформаций. Малый второй член описывает отклонение материала от изотропного. Обе функции Φ_0 и Φ_1 представим разложением в ряд по u_i (будем в дальнейшем обозначать $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$)

(1.2) $$\Phi_0 = {}^1/_2\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \beta I_1 I_2 + \gamma I_3 + \nu I_1^3 + \xi I_2^2 + \ldots$$
$$\ldots + \rho_0 T_0 (S - S_0) \equiv {}^1/_2\mu (u^2 + v^2) + {}^1/_2 (\lambda + 2\mu) w^2 +$$
$$+ bw (u^2 + v^2) + aw^3 + {}^1/_4 h (u^2 + v^2)^2 + {}^1/_4 kw^4 + {}^1/_2 mw^2 (u^2 +$$
$$+ v^2) + \rho_0 T_0 (S - S_0)$$
$$I_1 = \varepsilon_{ii},\ I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},\ I_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}$$
$$a = {}^1/_2\lambda + \mu + \beta + \gamma + \nu,\ 2b = \lambda + 2\mu + \beta + {}^3/_2\gamma,$$
$$h = {}^1/_2\lambda + \mu + \beta + {}^3/_2\gamma + \xi$$

(1.3) $$\Phi_1 = B_1 u^2 + B_2 v^2 + B_3 w^2 + B_4 uv + B_5 uw + B_6 vw +$$
$$+ A_1 u^3 + A_2 v^3 + A_3 w^3 + A_4 u^2 w + A_5 v^2 w + A_6 uw^2 +$$
$$+ A_7 vw^2 + A_8 u^2 v + A_9 uv^2 + A_{10} uvw$$

Здесь λ, μ, β, γ, ν, ξ — упругие модули среды, a, b, h, k, m — их комбинации, A_i, B_i — константы, описывающие анизотропию, т. е. содержащие компоненты тензоров $d^{(k)}_{ijl\ldots}$ и величины предварительной деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Самый большой из коэффициентов A_i, B_i будем отождествлять с δ. Поэтому A_i, B_i порядка ε или меньше, что позволило функцию Φ_1 взять в виде многочлена не более чем третьей степени общего вида, что отвечает самому произвольному виду анизотропии. При отсутствии предварительной деформации A_i, B_i — константы, описывающие отличие упругих свойств среды от изотропных. Функция Φ не содержит линейных членов, что означает отсутствие напряжений в недеформированном состоянии.

В общем случае можно считать, что все константы A_i, B_i одного порядка малости δ. Но тогда в разложении Φ_1 члены с B_i будут на порядок больше, чем члены с A_i, и кубические члены в Φ_1 можно не писать. В этом случае, для того чтобы члены, учитывающие анизотропию, были одного порядка с членом $h (u^2 + v^2)^2$, содержащим нелинейность, необходимо выбрать ε так, чтобы $B_i \sim \delta \sim \varepsilon^2$. Тогда вид функции $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ ничем не отличается от упругого потенциала Φ изотропной среды, в которую анизотропия внесена лишь членом $\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}$ — предварительной деформацией. Нелинейные волны (простые, ударные и автомодельная задача с их использованием) подробно изучены в [1—3, 5], и все эти результаты переносятся тогда на исходно анизотропные среды.

Далее не будем, вообще говоря, предполагать, что A_i и B_i одного порядка. В случае, когда кубические члены будут учитываться, будет считаться, что наибольший коэффициент A_i много больше всех B_i.

2. Квазипродольные волны. В слабоанизотропных средах существует одна квазипродольная ($\Delta w \gg \Delta u$, Δv) и две квазипоперечные ($\Delta w \ll (\Delta u^2 + \Delta v^2)^{1/2}$) волны. Чтобы выявить нелинейные эффекты в поведении квазипродольной волны, достаточно иметь разложение Φ до членов ε^3 [1, 4], а значит, в слагаемом Φ_1 брать лишь члены с B_i. Можно увидеть, что для квазипродольной волны анизотропия среды любого вида автоматически сводится к деформационной анизотропии. Для этого достаточно в пространстве u_i сделать перенос начала координат, т. е. положить $u_* = u + B_5/(2b)$, $v_* = v + B_6/(2b)$, $w_* = w + B_3/(3a)$, и в новых переменных среда ведет себя в квазипродольной волне как изотропная с предварительной упругой деформацией.

3. Квазипоперечные волны. Для квазипоперечных волн при помощи уравнений (1.1) можно исключить продольную компоненту w, выразив ее через u и v. В результате вместо упругого потенциала $\Phi\ (u_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ можно ввести двумерный потенциал $F\ (u_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2)$. Процедура исключения $u_3 = w$ подробно описана в [6]. Исходные предположения этой статьи, заключающиеся в том, что вторые производные от Φ_1 по u, v и по w, u или w, v не превосходят соответственно $\max\ \{\varepsilon^2, \delta\}$ и $\max\ \{\varepsilon, \delta\}$, где $\varepsilon = \max\ \{u, v\}$, выполнены. При этом система уравнений (1.1) упрощается и содержит два уравнения движения или соответствующие им два соотношения на разрыве

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}, \quad \left[\frac{\partial F}{\partial u_\alpha}\right] = \rho_0 W^2 [u_\alpha], \quad \alpha = 1, 2 \tag{3.1}$$

В работе [6], в которой для Φ_1 было принято квадратичное представление (кубические члены в (1.3) не учитывались), для F было получено выражение

$$F = {}^1/_2\, (f - g)u^2 + {}^1/_2\, (f + g)v^2 - {}^1/_8 \varkappa\, (u^2 + v^2)^2 \tag{3.2}$$

где f, g, $\varkappa$ — постоянные коэффициенты. Малая величина g — единственный параметр, полностью учитывающий анизотропию при предположении, что Φ_1 содержит только квадратичные члены. Упругая константа $\varkappa$ характеризует нелинейные свойства среды. От знака $\varkappa$ зависит качественное различие в нелинейных эффектах. Для изотропной среды с предварительной деформацией ε_{11}, ε_{22} (оси x_1, x_2 в плоскости фронта волны выбраны так, что $\varepsilon_{12} = 0$)

$$f = \mu + 2bI_1{}^0 - (\mu + {}^3/_4\gamma)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}),\ g = (\mu + {}^3/_4\gamma)\,(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})$$
$$\varkappa = \mu + (\mu + \beta + {}^3/_2\gamma)^2/(\lambda + \mu) - 2\xi = 4b^2/(\lambda + \mu) - 2h$$

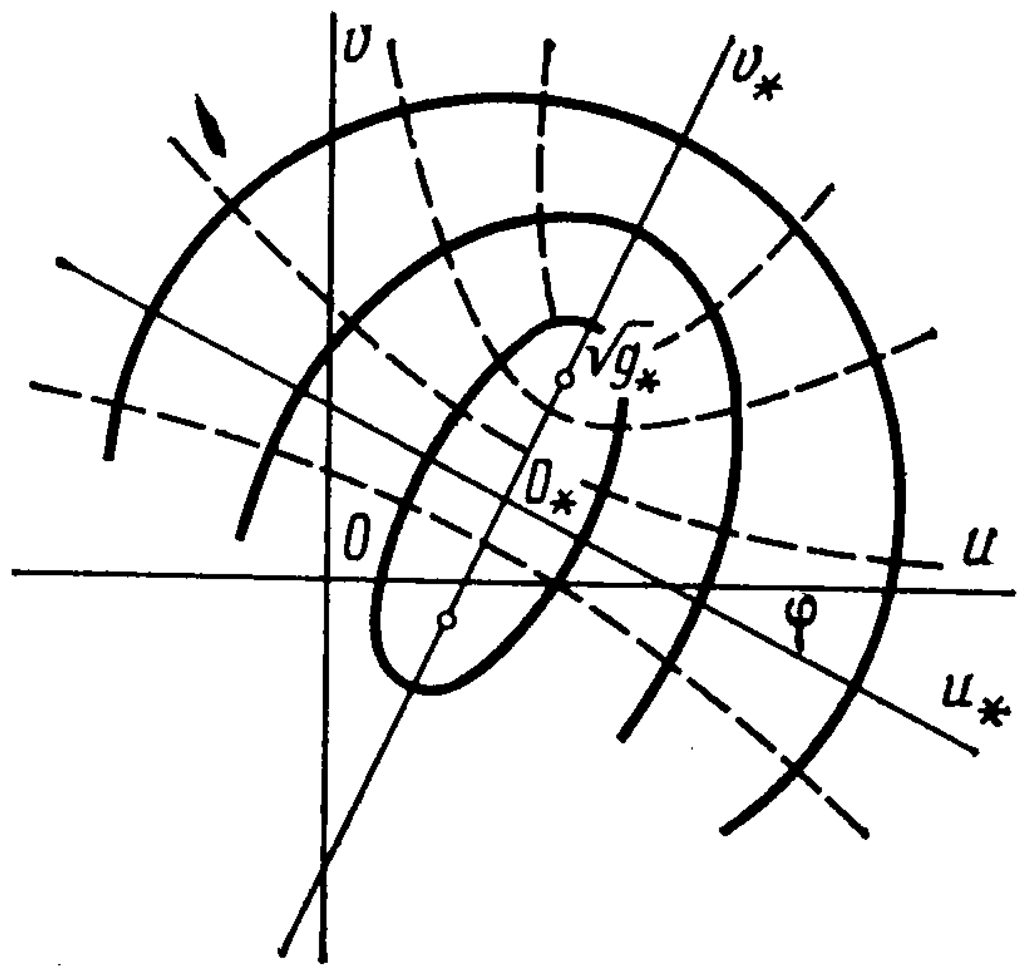
Если в изотропной среде предварительная деформация отсутствует, то $f = \mu$, $g = 0$ [4].

Для среды с анизотропией общего вида (1.3) (с учетом кубических членов) при произвольных осях x_α имеем

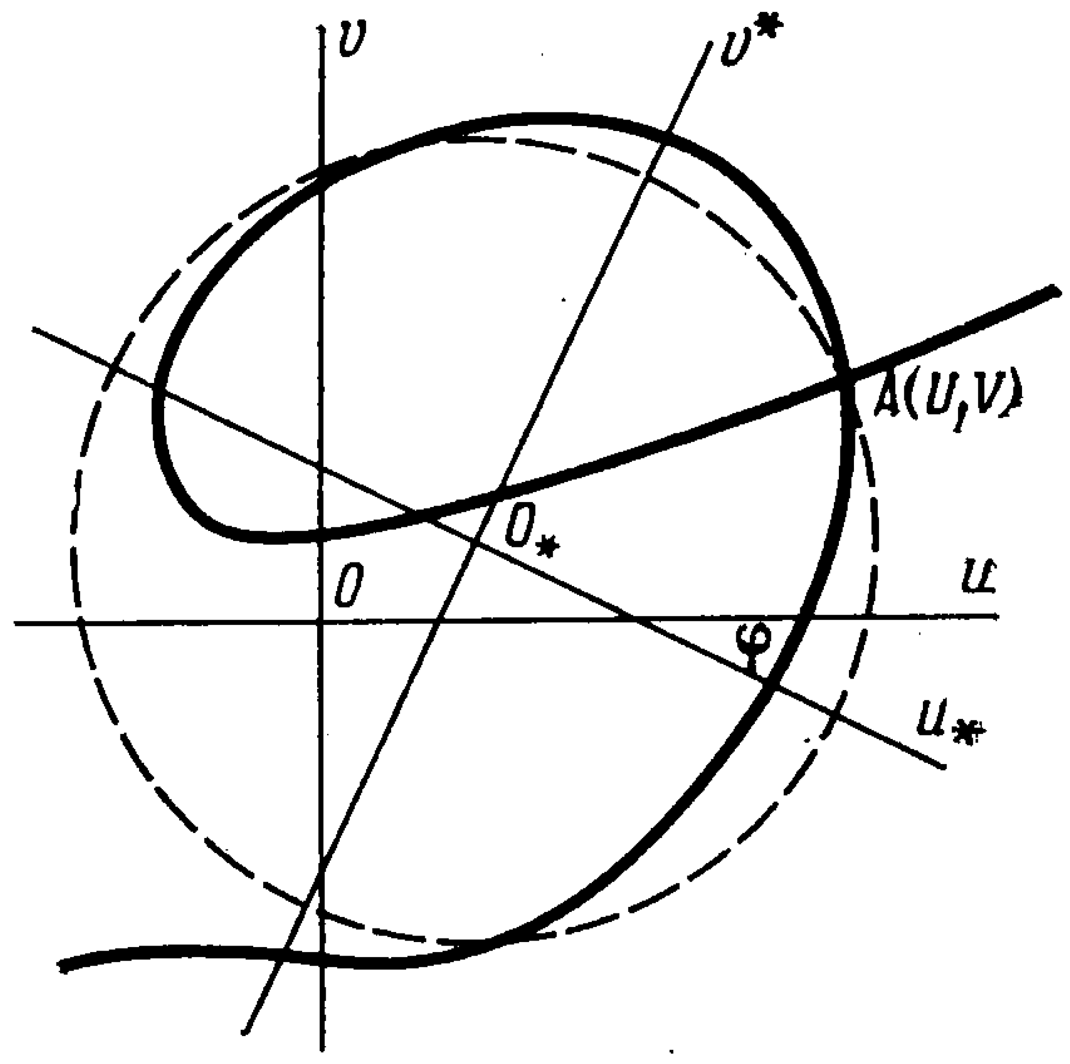
$$F = {}^1/_2\, (f - g)u^2 + {}^1/_2\, (f + g)v^2 - {}^1/_8 \varkappa\, (u^2 + v^2)^2 + suv + {}+ {}^1/_2\, (pv + qu)(u^2 + v^2) + eu^3 + dv^3 \tag{3.3}$$

$$f = \mu + B_1 + B_2 - \frac{B_5{}^2 + B_6{}^2}{2(\lambda + \mu)}, \quad g = B_2 - B_1 + \frac{B_5{}^2 - B_6{}^2}{2(\lambda + \mu)}$$
$$p = A_8 - \frac{bB_6}{\lambda + \mu}, \quad q = A_9 - \frac{bB_5}{\lambda + \mu}, \quad s = B_4 - \frac{B_5 B_6}{\lambda + \mu}$$
$$d = A_2 - A_8,\ e = A_1 - A_9$$

Так как для случая деформационной анизотропии (3.2) имеется достаточно полное исследование нелинейных упругих волн [1—3, 5], то имеет смысл выяснить, когда и как функция F для общего случая анизотропии (3.3) сводится к виду (3.2). Оказалось, что это возможно только при $e = d = 0$, т. е. для сред с некоторыми свойствами симметрии, когда $A_1 = A_9$, $A_2 = A_8$ в (1.3). Ниже будет показано, что именно таким свойством обладают трансверсально-изотропные и ортотропные упругие среды.



Фиг. 1



Фиг. 2

При $e = d = 0$ параллельным переносом осей координат в плоскости uv можно избавиться от кубичных членов в выражении для F (3.3). Новое начало координат O_* должно находиться в точке $(2q/\varkappa,\ 2p/\varkappa)$. Последующим поворотом осей около нового начала O_* на угол φ функцию F для анизотропной среды приводим к виду, совпадающему с (3.2) (многоточием обозначены линейные члены)

$$F = {}^1/_2 (f_* - g_*) u_*^2 + {}^1/_2 (f_* + g_*) v_*^2 - {}^1/_8 \varkappa (u_*^2 + v_*^2)^2 + \ldots \tag{3.4}$$

$$f_* = f + 4\frac{p^2+q^2}{\varkappa}, \quad g_* = \left[\left(g + 2\frac{p^2-q^2}{\varkappa}\right)^2 + \left(s + 4\frac{pq}{\varkappa}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$u_* = (u - 2q/\varkappa)\cos\varphi + (v - 2p/\varkappa)\sin\varphi$$

$$v_* = (-u + 2q/\varkappa)\sin\varphi + (v - 2p/\varkappa)\cos\varphi$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -(s + 4pq/\varkappa)/[g + 2(p^2 - q^2)/\varkappa]$$

В новой системе координат в недеформированном состоянии напряжения отличны от нуля, на что указывает появление в результате преобразования координат в функции F линейных членов. Однако ни в уравнение ударной адиабаты, ни в уравнения интегральных кривых простых волн и выражения для характеристических скоростей эти члены не войдут. Поворот осей u, v соответствует повороту осей x_1, x_2 в физическом пространстве. До сих пор эти оси были произвольными в плоскости фронта волны и их выбором можно распорядиться. В новых переменных u_*, v_* описание поведения нелинейных упругих волн в анизотропной среде такое же, как в предварительно деформированной изотропной. Сохраняют силу все результаты, полученные в [1—3, 5].

На фиг. 1 приведены интегральные кривые квазипоперечных простых волн, на фиг. 2 — ударная адиабата для скачков и окружность, на которой энтропия $S = \mathrm{const}$. Радиус энтропийной окружности равен $R = [(U - 2q/\varkappa)^2 + (V - 2p/\varkappa)^2]^{1/2}$, где U, V — значения u, v перед разрывом.

4. Трансверсально-изотропные и ортотропные среды. Эти среды используются во многих задачах механики в качестве моделей анизотропных материалов, причем часто отличие среды от изотропной бывает невелико. Например, анизотропия материалов, вызванная их изготовлением (штамповка, прокатка), анизотропия пород, составляющих верхнюю мантию Земли, невелики и обладают некоторыми свойствами симметрии.

Для изотропной среды ее геометрия описывается метрическим тензором g_{ij}. Для описания отклонения среды от изотропной вводятся тензоры $d^{(k)}_{ij\ldots}$. В рассматриваемых средах такой тензор один и можно указать его специальный вид, обусловленный свойствами симметрии. В трансверсально-изотропной среде (ТИС) имеется некоторое выделенное направление **l**, в плоскостях, ортогональных ему, свойства среды изотропны. Так как направление этой оси безразлично, его задают квадратом вектора **l**, т. е. тензором $l_{ij} = \alpha_i\alpha_j$, где α_i пропорциональны направляющим косинусам оси **l** [7]. Ортотропные среды обладают тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, что можно задать симметричным тензором второго ранга d_{ij} [7]. Модель ТИС при математическом описании является частным случаем ортотропной среды, когда $d_{ij} = \alpha_i\alpha_j$.

Итак, упругая среда задана своим потенциалом $\Phi = \Phi(\varepsilon_{ij}, g_{ij}, d_{ij}, S)$. Из трех симметричных тензоров второго ранга ε_{ij}, g_{ij}, d_{ij} можно составить только шесть независимых скалярных инвариантов, содержащих компоненты деформации: I_1, I_2, I_3, приведенные в (1.2), и $K_1 = d_{ij}\varepsilon_{ij}$, $K_2 = d_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}$, $K_3 = d_{ij}d_{jk}\varepsilon_{ki}$. Таким образом, $\Phi = \Phi(I_1, I_2, I_3, K_1, K_2, K_3, S)$. Отметим, что в ТИС независимых инвариантов только пять, так как инвариант K_3 пропорционален K_1.

Считаем, что отклонение среды от изотропной невелико. Для количественного описания этого факта примем, что компоненты тензора d_{ij} имеют порядок малости $\delta < \varepsilon$. Это не единственный способ описания малости анизотропии, но примем такой. Очевидно, тогда инварианты K_i имеют порядок $K_1 \sim \varepsilon\delta$, $K_2 \sim \varepsilon^2\delta$, $K_3 \sim \varepsilon\delta^2$.

Следуя прежнему методу, примем для учитывающей анизотропию части упругого потенциала Φ_1 разложение, в котором выписаны члены до суммарного по ε и δ четвертого порядка малости

$$\Phi_1 = a_1K_1^2 + a_2K_2 + a_3K_1I_1 + a_4K_1I_2 + a_5K_1I_1^2 + a_6I_1K_2 + a_7K_3I_1$$

Коэффициенты a_i представляют собой упругие константы среды, величины конечные. Для ТИС $a_7 = 0$.

Переходя к переменным u, v, w, найдем выражения коэффициентов A_k, B_k формулы (1.3) через компоненты тензора d_{ij} и $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$. При этом, как видно из (1.3), для A_k вычисление следует вести с точностью до ε, для B_k — с точностью до ε^2. В квазипоперечных волнах $w \sim \varepsilon^2$, поэтому члены с $A_3, A_4, \ldots, A_7, A_{10}, B_3$ в рассмотрении не участвуют, а коэффициенты B_5 и B_6 следует вычислять с точностью до ε. Прежде всего получаем

$$A_1 = A_9 = {}^1/_2 a_4 d_{13}, \quad A_2 = A_8 = {}^1/_2 a_4 d_{23}$$

т. е. для ТИС и ортотропных сред обращаются в нуль обсуждавшиеся выше в п. 3 коэффициенты e и d. Значит, для этих материалов исследование нелинейных упругих волн приводится, как было показано в п. 3, к случаю деформационной анизотропии [1—3, 5].

Двумерный упругий потенциал F имеет вид (3.3), а коэффициенты вычисляются через компоненты d_{ij} по формулам

$$\begin{aligned}
&p = {}^1/_2\omega d_{23}, \quad q = {}^1/_2\omega d_{13}, \quad \omega = a_4 - 2b(a_2 + a_3)/(\lambda + \mu) \\
&s = 2(\mu + {}^3/_4\gamma)\varepsilon_{12} + {}^1/_2 d_{12}m - d_{13}d_{23}(a_2 + a_3)^2/(\lambda + \mu) \\
&g = (\mu + {}^3/_4\gamma)(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) + {}^1/_4 m(d_{22} - d_{11}) \\
&f = \mu + 2bI_1^\circ - (\mu + {}^3/_4\gamma)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\xi\varepsilon_{12}^2 - {}^1/_2 a_1 d_{33} + \\
&\quad + {}^1/_4 m(d_{11} + d_{22} + 2d_{33}) + {}^1/_2 a_4(\varepsilon_{11}d_{11} + \varepsilon_{22}d_{22} + 2\varepsilon_{12}d_{12}) \\
&m = a_2 + 4a_1d_{33} + a(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})
\end{aligned}$$

Чтобы привести функцию F к виду (3.2), надо переместить начало координат в плоскости uv в точку $O_*(\omega d_{13}, \omega d_{23})$. Выражение для $s + 4pq/\varkappa$, входящее в формулу (3.4) для вычисления угла φ, содержит компоненты предварительной деформации и тензора d_{ij}.

С самого начала при постановке задачи можно выбрать такие оси x_1, x_2, в которых эти компоненты связаны соотношением

$$2(\mu + {}^3/_4\gamma)\varepsilon_{12} + {}^1/_2 m d_{12} - d_{13}d_{23}[(a_2 + a_3)^2/(\lambda + \mu) + \omega^2/\varkappa] = 0$$

В таких осях функция F сразу имеет вид (3.2), а параметр анизотропии $g_* = g + {}^1/_2\omega^2(d_{23}{}^2 - d_{13}{}^2)\varkappa$.

В частности, для ТИС $d_{ij} = \alpha_i\alpha_j$, где α_i пропорциональны направляющим косинусам оси 1 и имеют величину $\sim\delta^{1/2}$. Тогда

$$p = {}^1/_2\omega\alpha_2\alpha_3,\ q = {}^1/_2\omega\alpha_1\alpha_3,\ g = (\mu + {}^3/_4\gamma)(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) + {}^1/_4 m(\alpha_2{}^2 - \alpha_1{}^2)$$

$$s = 2(\mu + {}^3/_4\gamma)\varepsilon_{12} + \alpha_1\alpha_2[{}^1/_2 m - \alpha_3{}^2(a_2 + a_3)^2/(\lambda + \mu)]$$

Если деформационная анизотропия отсутствует, т. е. $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$, то оси координат x_1, x_2 следует выбрать так, чтобы одна из них (например, x_2) совпала с проекцией 1 на плоскость фронта волны. Тогда $\alpha_1 = 0$, $s = 0$, $g_* = {}^1/_4 m\alpha_2{}^2$. Как показано в [1, 2], чтобы иметь возможность описать поведение ударных волн во всей плоскости uv, т. е. иметь полную ударную адиабату, проходящую через точку A (U, V), соответствующую состоянию перед скачком (фиг. 2), параметр анизотропии g_* должен быть небольшим, порядка $R^2 \sim \varepsilon^2$, где R — радиус проходящей через начальную точку окружности, на которой $S = \text{const}$. В данном случае $R^2 = U^2 + (V - \omega\alpha_2\alpha_3)^2$. Чтобы было $g_* \sim R^2$, либо надо иметь достаточно малую анизотропию, такую (по крайней мере, по оси x_2), что $\alpha_2 m^{1/2} \sim \varepsilon$, либо величина α_2 мала из-за того, что направление распространения волны (ось x) близко к 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 523—534.
2. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 831—840.
3. *Свешникова Е. И.* Простые волны в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 642—646.
4. *Бленд Д. Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир. 1972. 183 с.
5. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284—291.
6. *Куликовский А. Г.* Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597—604.
7. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука. 1983. 528 с.

Москва

Поступила в редакцию 28.IV.1987