Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 6, 1987

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ

Бутузов В. Ф., Уразгильдина Т. А.

Строится асимптотическое разложение решения квазистатической задачи термоупругости для тонкого цилиндрического стержня при наличии массовых сил и нелинейных тепловых источников. Алгоритм построения асимптотики, основанный на методе пограничных функций, достаточно прост и удобен для проведения численных расчетов. На основе построенной асимптотики делается вывод о том, как правильно выбрать упрощенную одномерную модель, чтобы получить хорошее приближение для решения исходной двумерной задачи. При определенных условиях доказывается теорема существования решения.

1. Постановка задачи. Система уравнений термоупругости для вектора перемещений $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ и температуры $\theta(x, y, z, t)$ в некоторой области G в линейном приближении имеет вид [1]

$$
\begin{gathered}
\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{X} = \gamma\operatorname{grad}\theta + \rho_0\mathbf{u}^{\cdot\cdot} \\
\Delta\theta - \varkappa^{-1}\theta^{\cdot} - \eta\operatorname{div}\mathbf{u}^{\cdot} = -\varkappa^{-1}H \\
\gamma = (3\lambda+2\mu)\alpha, \quad \varkappa = \lambda_0/c, \quad \eta = \gamma\langle\theta\rangle/\lambda_0
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Здесь точкой обозначена частная производная по времени, μ, λ — модули упругости (величины, характеризующие упругие свойства материалов при малых деформациях), $\mathbf{X}(x, y, z, t)$ — вектор массовых сил в области, α — коэффициент линейного термического расширения, $\rho_0(x, y, z)$ — объемная плотность области G, λ_0 — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость при постоянной деформации, $\langle\theta\rangle$ —средняя температура тела, $H(\theta, x, y, z, t)$ — тепловые источники в области. Система (1.1) записана при следующих предположениях: изменение θ невелико и не приводит к изменениям тепловых и упругих констант, соотношения между перемещениями и деформациями линейны.

Рассмотрим краевую задачу термоупругости для тонкого стержня радиуса εb и длины a ($\varepsilon > 0$ — малый параметр). Для этого перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, z, и будем искать осесимметричное решение, т. е. не зависящее от φ. Тогда система уравнений (1.1) примет вид

$$
\begin{gathered}
\mu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{\rho^2}\right) + \\
+ (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v) + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + F = \gamma\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \rho_0 v^{\cdot\cdot} \\
\mu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v) + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + f = \\
= \gamma\frac{\partial\theta}{\partial z} + \rho_0 w^{\cdot\cdot} \\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \varkappa^{-1}\theta^{\cdot} - \eta\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v^{\cdot}) + \frac{\partial w^{\cdot}}{\partial z}\right) = -\varkappa^{-1}H
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

где $v(\rho, z, t)$ и $w(\rho, z, t)$ — радиальное и осевое перемещения, $F(\rho, z, t)$ и $f(\rho, z, t)$ — радиальная и осевая составляющие вектора $\mathbf{X}(\rho, z, t)$.

Поставим следующие дополнительные условия.

На боковой поверхности стержня

$$\rho = \varepsilon b, \quad v = \varepsilon\varphi(z, t, \varepsilon), \quad \frac{\partial w}{\partial\rho} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial\rho} + A\varepsilon\theta = 0$$

Первое условие показывает, что точки боковой поверхности стержня с течением времени совершают малые радиальные перемещения в соответствии с функцией $\varepsilon\varphi(z, t, \varepsilon)$, в частности жестко закреплены, если $\varphi(z, t, \varepsilon) = 0$. Второе условие означает, что прилегающие к боковой поверхности слои являются однородными в радиальном направлении. И, наконец, третье условие показывает, что на боковой поверхности стержня осуществляется слабый (порядка ε) теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

На концах стержня

$$z = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial\rho} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = \psi_1(\rho, t), \quad \theta = \mu_1(\rho, t)$$

$$z = a, \quad \frac{\partial w}{\partial\rho} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = \psi_2(\rho, t), \quad \theta = \mu_2(\rho, t)$$

Условия смешанного типа указывают на отсутствие скалывающих напряжений, остальные условия задают изменения с течением времени осевых перемещений и температуры на концах стержня.

Начальное условие для температуры

$$t = 0, \quad \theta = \chi(\rho, z)$$

Для системы (1.2) нужно было бы задать также начальные условия для v и w. Но далее будем рассматривать укороченную систему. Известно [1], что если массовые силы, поверхностные усилия и тепловые источники медленно меняются во времени, то можно пренебречь слагаемыми $\rho_0\ddot{v}$, $\rho_0\ddot{w}$ в системе (1.2) и решать так называемую квазистатическую задачу термоупругости. Именно такую задачу и будем рассматривать. При этом учтем, что для широкого класса веществ отношение $\gamma/(\lambda + 2\mu)$ имеет порядок 10^{-6}—10^{-5} K^{-1}, и положим $\gamma = \varepsilon\beta$.

Сделаем замену переменной $\rho = \varepsilon r$. Тогда в переменных r, z, t задача для $y = (v, w, \theta)$ примет вид сингулярно возмущенной задачи (малый параметр ε входит множителем при производных)

$$\begin{aligned}
(1.3)\qquad & L_1 y \equiv (\lambda + 2\mu)\left(L_0 v - \frac{v}{r^2}\right) + \varepsilon^2\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \varepsilon(\lambda + \mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z} = \\
& = -\varepsilon^2 F + \varepsilon^2\beta\frac{\partial\theta}{\partial r} \\
& L_2 y \equiv \mu L_0 w + \varepsilon^2(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \varepsilon(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right) = \\
& = -\varepsilon^2 f + \varepsilon^3\beta\frac{\partial\theta}{\partial z} \\
& L_3 y \equiv L_0\theta + \varepsilon^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \varepsilon^2\varkappa^{-1}\dot{\theta} - \varepsilon\eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{v}) - \varepsilon^2\eta\frac{\partial\dot{w}}{\partial z} = \\
& = -\varepsilon^2\varkappa^{-1}H \\
& L_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}; \quad (r, z, t) \in G = \\
& = (0 \leqslant r < b,\ 0 < z < a,\ 0 < t \leqslant T) \\
(1.4)\qquad & r = b, \quad v = \varepsilon\varphi(z, t, \varepsilon), \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial r} + A\varepsilon^2\theta = 0 \\
& z = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = \psi_1(r, t, \varepsilon), \quad \theta = \mu_1(r, t, \varepsilon) \\
& z = a, \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad w = \psi_2(r, t, \varepsilon), \quad \theta = \mu_2(r, t, \varepsilon) \\
& t = 0, \quad \theta = \chi(r, z, \varepsilon)
\end{aligned}$$

(В краевых, начальном условиях и неоднородностях уравнений рассматриваем зависимость функций ψ_i, μ_i $(i=1, 2)$, χ, F, f, H от r, ε, а не от $r\varepsilon$, как получается после замены $\rho = \varepsilon r$.)

Отметим, что стационарная задача термоупругости (отбрасывается также член $\theta^{\cdot}$) для тонкого стержня с другими краевыми условиями в случае $\mathrm{X} \equiv 0$, $H \equiv 0$, рассматривалась в [2].

Цель работы — построить асимптотическое решение задачи (1.3), (1.4) при следующих требованиях.

1°. Все входящие в (1.3), (1.4) известные функции достаточно гладкие.

2°. Выполнены условия согласования краевых значений для v, w, а также начального и краевых значений для θ:

$$\frac{\partial\psi_i(b, t, \varepsilon)}{\partial r}=0, \qquad \frac{\partial\varphi(0, t, \varepsilon)}{\partial z}=\frac{\partial\varphi(a, t, \varepsilon)}{\partial z}=0$$

$$\mu_1(r, 0, \varepsilon) = \chi(r, 0, \varepsilon),\ \mu_2(r, 0, \varepsilon) = \chi(r, a, \varepsilon)$$

$$\frac{\partial\mu_i(b, t, \varepsilon)}{\partial r}=0,\ \frac{\partial\chi(b, t, \varepsilon)}{\partial r}=0, \quad i=1, 2$$

3°. $$\frac{\partial\psi_i(0, t, \varepsilon)}{\partial r}=\frac{\partial\mu_i(0, t, \varepsilon)}{\partial r}=\frac{\partial\chi(0, z, \varepsilon)}{\partial r}=0, \quad i=1, 2$$

Последнее требование является необходимым условием существования гладкого осесимметричного решения.

Остальные требования будут наложены по ходу построения асимптотики.

2. **Алгоритм построения асимптотики.** Асимптотику решения задачи (1.3), (1.4) ищем в виде, характерном для метода пограничных функций (ПФ) [3]

(2.1) $$\begin{aligned} y(r, z, t, \varepsilon) &= \bar y(r, z, t, \varepsilon) + Qy(r, \xi, t, \varepsilon) + \\ &+ Q^*y(r, \xi_*, t, \varepsilon) + \Pi y(r, z, \tau, \varepsilon) + Py(r, \xi, \tau, \varepsilon) + \\ &+ P^*y(r, \xi_*, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i(\bar y_i(r, z, t) + Q_iy(r, \xi, t) + \\ &+ Q_i^*y(r, \xi_*, t) + \Pi_iy(r, z, \tau) + P_iy(r, \xi, \tau) + P_i^*y(r, \xi_*, \tau)); \\ \xi &= \frac{z}{\varepsilon}, \quad \xi_* = \frac{a-z}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Здесь $\bar y$ — регулярная часть асимптотики, $Qy, \ldots, P^*y$ — ПФ, назначение которых описано ниже, ξ, ξ_*, τ — погранслойные переменные.

Подставляя (2.1) в (1.3) и используя представление [4] $H = \bar H + QH + Q^*H + \Pi H + PH + P^*H$, стандартным способом (раскладывая в ряды по степеням ε) получаем уравнения для членов асимптотики. Функции F, f, φ, ψ_i, μ_i $(i = 1, 2)$, χ также представляем в виде рядов по степеням ε, например

$$F(r, z, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iF_i(r, z, t)$$

2.1. Регулярная часть асимптотики. Для $\bar v_0(r, z, t)$ получаем задачу

$$L_0\bar v_0 - r^{-2}\bar v_0 = 0; \ r = b, \ \bar v_0 = 0$$

решение которой, ограниченное в $\bar G$, есть $\bar v_0 = 0$.

Функция $\bar w_0(r, z, t)$ определяется из системы

(2.2) $$L_0\bar w_0 = 0; \quad r = b, \quad \partial\bar w_0/\partial r = 0$$

Ее решение — произвольная функция переменных z, t: $\overline{w}_0 = g_0(z, t)$. Для $\overline{\theta}_0(r, z, t)$ получаем задачу, аналогичную (2.2). Поэтому $\overline{\theta}_0 = \alpha_0(z, t)$ — произвольная функция z и t.

Таким образом, задача (1.3), (1.4) относится к так называемым критическим случаям в теории сингулярных возмущений: решение вырожденной задачи ($\varepsilon = 0$) определяется не однозначно, а зависит от произвольных функций [5]. (Аналогичная ситуация для уравнения теплопроводности в тонком стержне рассмотрена в [6].)

Для $\overline{v}_1(r, z, t)$ получаем задачу

$$L_0\overline{v}_1 - r^{-2}\overline{v}_1 = 0; \qquad r = b, \qquad \overline{v}_1 = \varphi_0(z, t) \tag{2.3}$$

Ее решение: $\overline{v}_1 = \varphi_0(z, t)r/b$. Аналогично функциям $\overline{w}_0$, $\overline{\theta}_0$ определяются функции $\overline{w}_1$ и $\overline{\theta}_1$: $\overline{w}_1 = g_1(z, t)$, $\overline{\theta}_1 = \alpha_1(z, t)$ (g_1 и α_1 — произвольные функции).

Для $\overline{v}_i(r, z, t)$ при $i \geqslant 2$ получаем задачу, аналогичную (2.3), с ненулевой правой частью в уравнении. Отсюда $\overline{v}_i$ определяется однозначно.

Для $\overline{w}_2(r, z, t)$ получаем также неоднородную задачу

$$\mu L_0\overline{w}_2 = -(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 g_0}{\partial z^2} - \frac{2(\lambda+\mu)}{b}\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} - f_0 \tag{2.4}$$

$$r = b, \ \partial\overline{w}_2/\partial r = 0$$

Заметим, что в правую часть уравнения входит вторая производная неизвестной пока функции $g_0(z, t)$. Общее решение уравнения, ограниченное в $\overline{G}$, есть

$$\overline{w}_2 = \frac{1}{4\mu}\left\{-(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 g_0}{\partial z^2} - \frac{2(\lambda+\mu)}{b}\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\right\}r^2 -$$

$$- f_0^+(r, z, t) + g_2(z, t), \qquad f_0^+ = \frac{1}{\mu}\int\limits_0^r \frac{d\sigma}{\sigma}\int\limits_0^\sigma \eta f_0(\eta, z, t)\,d\eta$$

где g_2 — произвольная функция. Это решение удовлетворяет краевому условию в (2.4) только в том случае, если выполняется равенство (условие разрешимости задачи (2.4))

$$\frac{\partial^2 g_0}{\partial z^2} = -\frac{2(\lambda+\mu)}{b(\lambda+2\mu)}\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} - \frac{2\mu}{b(\lambda+2\mu)}\frac{\partial f_0^+(b, z, t)}{\partial r} \tag{2.5}$$

Условие (2.5) представляет собой уравнение относительно функции $g_0(z, t)$. Краевые условия для функции g_0 будут получены при построении ПФ. В силу (2.5)

$$\overline{w}_2 = \frac{\partial f_0^+(b, z, t)}{\partial r}\frac{r^2}{2b} - f_0^+(r, z, t) + g_2(z, t)$$

Функция $\overline{\theta}_2(r, z, t)$ — решение задачи

$$L_0\overline{\theta}_2 = -\frac{\partial\alpha_0}{\partial z^2} + \varkappa^{-1}\alpha_0^{\cdot} + \eta\left(\frac{2}{b}\varphi_0^{\cdot} + \frac{\partial g_0^{\cdot}}{\partial z}\right) - \tag{2.6}$$

$$- \varkappa^{-1}H_0(\alpha_0, r, z, t); \quad r = b, \quad \partial\overline{\theta}_2/\partial r = -A\alpha_0(z, t)$$

Здесь в правую часть уравнения входят производные неизвестных пока функций $\alpha_0(z, t)$ и $g_0(z, t)$. Решение (2.6) определяется с точностью до произвольной функции $\alpha_2(z, t)$:

$$\overline{\theta}_2 = \left\{-A\alpha_0 + \frac{\partial H_0^+(\alpha_0, b, z, t)}{\partial r}\right\}\frac{r^2}{2b} - H_0^+(\alpha_0, r, z, t) + \alpha_2$$

$$H_0^+ = \frac{1}{\varkappa}\int\limits_0^r \frac{d\sigma}{\sigma}\int\limits_0^\sigma \eta H_0(\alpha_0, \eta, t)\,d\eta$$

а для $\alpha_0(z, t)$ из условия разрешимости задачи (2.6) получаем параболическое уравнение

$$\alpha_0^{\cdot} - \varkappa\partial^2\alpha_0/\partial z^2 = K(\alpha_0, z, t), \quad K(\alpha_0, z, t) = \tag{2.7}$$
$$= \frac{2}{b}\frac{\partial H_0^+(\alpha_0, b, z, t)}{\partial r} - \eta\varkappa\left(\frac{2}{b}\varphi_0^{\cdot} + \frac{\partial g_0^{\cdot}}{\partial z}\right) - \frac{2A}{b}\varkappa\alpha_0$$

Начальное и краевые условия для функции α_0 будут получены ниже при построении ПФ.

Для $\bar{w}_i(r, z, t)$ и $\bar{\theta}_i(r, z, t)$ при $i \geqslant 3$ имеем задачи, аналогичные (2.4) и (2.6). Из условий разрешимости этих задач получаем для $g_{i-2}(z, t)$ уравнение типа (2.5), для $\alpha_{i-2}(z, t)$ — линейное уравнение типа (2.7).

Таким образом, функции $\bar{v}_i$ определяются на каждом шаге однозначно, а функции $\bar{w}_i$ и $\bar{\theta}_i$ — с точностью до произвольных функций $g_i(z, t)$ и $\alpha_i(z, t)$, для которых из условий разрешимости задач для $\bar{w}_{i+2}$ и $\bar{\theta}_{i+2}$ получаются уравнения типа (2.5) и (2.7). Однозначное определение членов регулярной части асимптотики будет произведено после построения ПФ.

2.2. Пограничный слой в окрестностях концов стержня. Функция $Qy(r, \xi, t, \varepsilon)$ служит для того, чтобы совместно с регулярной частью асимптотики удовлетворить заданному краевому условию при $z = 0$. Кроме того, функция $Qy(r, \xi, t, \varepsilon)$ должна быть ПФ по переменной ξ, т. е.

$$Qy(r, \xi, t, \varepsilon) \to 0 \text{ при } \xi \to \infty \tag{2.8}$$

Для $Q_0v(r, \xi, t)$, $Q_0w(r, \xi, t)$ получаем задачу

$$(\lambda + 2\mu)(L_0Q_0v - r^{-2}Q_0v) + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 Q_0w}{\partial r\partial\xi} + \mu\frac{\partial^2 Q_0v}{\partial\xi^2} = 0$$
$$\mu L_0Q_0w + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 Q_0w}{\partial\xi^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_0v)\right) = 0$$
$$r = b,\ Q_0v = 0,\ \partial Q_0w/\partial r = 0$$
$$\xi = 0,\ \partial Q_0w/\partial r + \partial Q_0v/\partial\xi = 0,\ Q_0w = \psi_{10}(r, t) - g_0(0, t)$$

Заметим, что в краевое условие входит $g_0(0, t)$ — значение неизвестной пока функции $g_0(z, t)$ при $z = 0$. Решение этой задачи ищем в виде

$$Q_0v = \sum_{n=0}^{\infty} q_{0n}(t, \xi)J_1(\nu_n r), \quad Q_0w = \sum_{n=0}^{\infty} p_{0n}(t, \xi)J_0(\nu_n r)$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя, а ν_n — корни уравнения

$$J_1(\nu_n b) = 0 \tag{2.9}$$

(занумеруем их в порядке возрастания). Тем самым Q_0v и Q_0w удовлетворяют краевым условиям при $r = b$. С учетом известных соотношений между J_0 и J_1 для $q_{0n}(t, \xi)$, $p_{0n}(t, \xi)$ получаем задачу

$$-(\lambda + 2\mu)\nu_n^2 q_{0n} - \nu_n(\lambda + \mu)p_{0n}' + \mu q_{0n}'' = 0 \tag{2.10}$$
$$-\mu\nu_n^2 p_{0n} + (\lambda + 2\mu)p_{0n}'' + (\lambda + \mu)\nu_n q_{0n}' = 0$$
$$\nu_n p_{0n}(t, 0) = q_{0n}'(t, 0),\ p_{0n}(t, 0) = s_{0n}(t)$$
$$\left(s_{0n}(t) = \frac{2}{b^2 J_0^2(\nu_n b)}\int_0^b (\psi_{10}(r, t) - g_0(0, t))J_0(\nu_n r)r\,dr\right)$$
$$q_{0n}(t, \infty) = p_{0n}(t, \infty) = 0$$

где штрих означает производную по ξ. Ее решение имеет вид

$$q_{0n}(t, \xi) = s_{0n}(t)\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\nu_n\xi - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right)\exp(-\nu_n\xi)$$
$$p_{0n}(t, \xi) = s_{0n}(t)\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\nu_n\xi + 1\right)\exp(-\nu_n\xi)$$

Известно, что $\nu_0 = 0$. Поэтому для выполнения условия (2.8) должно выполняться равенство $s_{00}(t) = 0$, которое позволяет определить краевое значение функции $g_0(z, t)$ при $z = 0$:

$$g_0(0, t) = \frac{2}{b^2}\int_0^b \psi_{10}(r, t)\, r\, dr \equiv g_0{}^0(t)$$

Тем самым функции $Q_0 v$ и $Q_0 w$ полностью определены и оказываются экспоненциально убывающими при $\xi \to \infty$.

Функция $Q_0\theta\,(r, \xi, t)$ — решение задачи

$$L_0 Q_0\theta + \partial^2 Q_0\theta/\partial\xi^2 = 0$$

$$r = b,\ \partial Q_0\theta/\partial r = 0;\ \xi = 0,\ Q_0\theta = \mu_{10}(r, t) - \alpha_0(0, t)$$

где в краевое условие входит неизвестная функция $\alpha_0(0, t)$. Методом разделения переменных получаем

$$Q_0\theta = \sum_{n=0}^{\infty} d_{0n}(t) \exp(-\nu_n\xi)\, J_0(\nu_n r)$$

$$d_{0n}(t) = \frac{2}{b^2 J_0{}^2(\nu_n b)}\int_0^b (\mu_{10}(r, t) - \alpha_0(0, t))\, J_0(\nu_n r)\, r\, dr$$

Учитывая (2.8), приходим к равенству $d_{00}(t) = 0$, которое позволяет определить краевое значение функции $\alpha_0(z, t)$ при $z = 0$:

$$\alpha_0(0, t) = \frac{2}{b^2}\int_0^b \mu_{10}(r, t)\, r\, dr \equiv \alpha_0{}^0(t)$$

Тем самым функция $Q_0\theta$ полностью определена и имеет, как и $Q_0 v$, $Q_0 w$, экспоненциальную оценку по переменной ξ. Отметим, что сходимость рядов для $Q_0 v$, $Q_0 w$, $Q_0\theta$ и возможность их двукратного почленного дифференцирования следует из требований 1°—3°.

Функции $Q_i v\,(r, \xi, t)$ и $Q_i w\,(r, \xi, t)$ при $i \geqslant 1$ снова ищем в виде

$$Q_i v = \sum_{n=0}^{\infty} q_{in}(t, \xi)\, J_1(\nu_n r), \quad Q_i w = \sum_{n=0}^{\infty} p_{in}(t, \xi)\, J_0(\nu_n r)$$

и для q_{in}, p_{in} получаем задачу, аналогичную (2.10), с ненулевыми правыми частями в уравнениях и неоднородными краевыми условиями при $\xi = 0$. При этом, используя (2.8), находим краевые значения для функций $g_i(z, t)$ при $z = 0$: $g_i(0, t) = g_i{}^0(t)$.

Функции $Q_i\theta\,(r, \xi, t)$ при $i \geqslant 1$ определяются аналогично $Q_0\theta$. При этом находим краевые значения для $\alpha_i(z, t)$: $\alpha_i(0, t) = \alpha_i{}^0(t)$.

ПФ $Q_i{}^* y\,(r, \xi_*, t)$ $(i = 0, 1, \ldots)$ служат для того, чтобы совместно с регулярной частью асимптотики удовлетворить краевому условию при $z = a$. Они строятся аналогично $Q_i y\,(r, \xi, t)$ и имеют экспоненциальную оценку по погранслойной переменной ξ_*. При этом для функций $g_i(z, t)$, $\alpha_i(z, t)$ определяются краевые значения при $z = a$: $g_i(a, t) = g_i{}^a(t)$, $\alpha_i(a, t) = \alpha_i{}^a(t)$.

2.3. Функции $g_i(z, t)$. В п. 2.1 для $g_i(z, t)$ были получены обыкновенные дифференциальные уравнения типа (2.5), а в п. 2.2 при построении Q- и Q^*-функций определены краевые значения $g_i(0, t) = g_i{}^0(t)$, $g_i(a, t) = g_i{}^a(t)$. Таким образом, функции $g_i(z, t)$ однозначно определяются как решения уравнений типа (2.5) с найденными краевыми условиями.

Для функций $\alpha_i(z, t)$ в п. 2.1 были получены параболические уравнения типа (2.7). Поэтому для однозначного определения α_i наряду с найденными в п. 2.2 краевыми значениями требуется еще задать начальное условие. Оно будет найдено при построении П-, P- и P^*-функций.

2.4 Пограничный слой в окрестности начального момента времени. Функция $\Pi y(r, z, \tau, \varepsilon)$ служит для того, чтобы совместно с регулярной частью асимптотики удовлетворить заданному начальному условию. Кроме того, функция $\Pi y(r, z, \tau, \varepsilon)$ должна быть ПФ по переменной τ, т. е.

$$(2.11)\qquad \Pi y(r, z, \tau, \varepsilon) \to 0 \text{ при } \tau \to \infty$$

Для $\Pi_0 v(r, z, \tau)$ и $\Pi_0 w(r, z, \tau)$ получаем задачи, аналогичные рассмотренным в п. 2.1 для $\bar v_0$ и $\bar w_0$. Поэтому $\Pi_0 v = 0$, $\Pi_0 w = \pi_0(z, \tau)$ — произвольная функция переменных z и τ. Аналогично находим $\Pi_1 v = 0$, $\Pi_1 w = \pi_1(z, \tau)$ — произвольная функция z и τ.

Для $\Pi_0\theta(r, z, \tau)$ имеем задачу

$$(2.12)\qquad L_0\Pi_0\theta - \varkappa^{-1}\frac{\partial\Pi_0\theta}{\partial\tau} = \eta\frac{\partial^2\pi_0}{\partial z\partial\tau}$$

$$r = b,\ \partial\Pi_0\theta/\partial r = 0;\ \tau = 0,\ \Pi_0\theta = \chi_0(r, z) - \alpha_0(z, 0)$$

В правую часть уравнения входит вторая производная не известной пока функции $\pi_0(z, \tau)$, а в начальное условие входит $\alpha_0(z, 0)$ — неизвестное начальное значение функции $\alpha_0(z, t)$. Методом разделения переменных находим

$$(2.13)\qquad \Pi_0\theta = \sum_{n=0}^{\infty} b_{0n}(z)\exp(-\varkappa\nu_n^2\tau)J_0(\nu_n r) - \eta\varkappa\frac{\partial\pi_0(z, \tau)}{\partial z}$$

$$b_{0n}(z) = \frac{2}{b^2J_0^2(\nu_n b)}\int_0^b \left(\chi_0(r, z) + \eta\varkappa\frac{\partial\pi_0(z, 0)}{\partial z} - \alpha_0(z, 0)\right)J_0(\nu_n r)\,r\,dr$$

где ν_n — корни уравнения (2.9). Учитывая (2.11), приходим к равенству $b_{00}(z) = 0$. Оно дает связь между не известными пока функциями $\alpha_0(z, t)$ и $\partial\pi_0(z, t)/\partial z$ при $t = 0$, $\tau = 0$:

$$(2.14)\qquad \alpha_0(z, 0) - \eta\varkappa\frac{\partial\pi_0(z, 0)}{\partial z} = \frac{2}{b^2}\int_0^b \chi_0(r, z)\,r\,dr \equiv \gamma_0(z)$$

Используя (2.14), полностью определяем $b_{0n}(z)$. Но для окончательного определения $\Pi_0\theta$ нужно найти еще функцию $\pi_0(z, \tau)$.

Для $\Pi_2 v(r, z, \tau)$ получаем задачу

$$(2.15)\qquad (\lambda + 2\mu)(L_0\Pi_2 v - r^{-2}\Pi_2 v) =$$

$$= -\beta\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n b_{0n}(z)\exp(-\varkappa\nu_n^2\tau)J_1(\nu_n r),\quad r = b,\ \Pi_2 v = 0$$

Ее решение

$$\Pi_2 v = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{0n}(z)}{\nu_n}\exp(-\varkappa\nu_n^2\tau)J_1(\nu_n r)$$

Функция $\Pi_2 w(r, z, \tau)$ — решение задачи

$$(2.16)\qquad \mu L_0\Pi_2 w = -(\lambda + 2\mu)\partial^2\pi_0/\partial z^2;\quad r = b,\ \partial\Pi_2 w/\partial r = 0$$

Из условия разрешимости задачи (2.16) получаем уравнение для $\pi_0(z, \tau)$: $\partial^2\pi_0/\partial z^2 = 0$, поэтому $\Pi_2 w = \pi_2(z, \tau)$ — произвольная функция z и τ.

Для $\Pi_i v(r, z, \tau)$ при $i \geqslant 3$ получаем задачу типа (2.15), имеющую единственное решение.

Для $\Pi_i w(r, z, \tau)$ и $\Pi_{i-2}\theta(r, z, \tau)$ при $i \geqslant 3$ имеем задачи, аналогичные (2.16) и (2.12). Функция $\Pi_i w$ определяется с точностью до произвольной функции $\pi_i(z, \tau)$, а в выражение для $\Pi_{i-2}\theta$ войдет неизвестная функция $\partial\pi_{i-2}(z, \tau)/\partial z$. Из условия разрешимости задачи для $\Pi_i w$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для $\pi_{i-2}(z, \tau)$ вида

(2.17) $$\partial^2\pi_{i-2}/\partial z^2 = l_{i-2}(z, \tau)$$

где $l_{i-2}(z, \tau)$ — известная функция, имеющая экспоненциальную оценку по τ, а из условия (2.11) для $\Pi_{i-2}\theta$ находим соотношение типа (2.14) между $\alpha_{i-2}(z, t)$ и $\partial\pi_{i-2}(z, \tau)/\partial z$ при $t = 0$, $\tau = 0$.

Таким образом, однозначное определение П-функций может быть произведено лишь после нахождения функций $\pi_i(z, \tau)$. Пока для них получены дифференциальные уравнения типа (2.17). Полностью $\pi_i(z, \tau)$ будут определены при построении угловых ПФ.

2.5. Угловой пограничный слой. Функции $\pi_i(z, \tau)$. Функции $Pv(r, \xi, \tau, \varepsilon)$ и $Pw(r, \xi, \tau, \varepsilon)$ служат для устранения невязок, вносимых ПФ $\Pi v(r, z, \tau, \varepsilon)$ и $\Pi w(r, z, \tau, \varepsilon)$ в краевые условия при $z = 0$; функция $P\theta(r, \xi, \tau, \varepsilon)$ — для устранения невязок, вносимых ПФ $\Pi\theta(r, z, \tau, \varepsilon)$ в краевое условие при $z = 0$ и ПФ $Q\theta(r, \xi, t, \varepsilon)$ в начальное условие при $t = 0$. Кроме того, P-функции должны быть ПФ по переменным ξ и τ, т. е. угловыми ПФ:

(2.18) $$Py(r, \xi, \tau, \varepsilon) \to 0 \text{ при } \xi + \tau \to \infty$$

Аналогичная система получается для $P^*y(r, \xi_*, \tau, \varepsilon)$.

Для $P_0v(r, \xi, \tau)$, $P_0w(r, \xi, \tau)$ имеем такую же задачу, как в п. 2.2 для Q_0v, Q_0w, нужно лишь заменить последнее краевое условие на $P_0w = -\pi_0(0, \tau)$ и параметр t на τ. Решая эту задачу с учетом (2.18), получаем $\pi_0(0, \tau) = 0$, $P_0v = P_0w = 0$.

Таким же образом находим $\pi_0(a, \tau) = 0$, $P_0{}^*v(r, \xi_*, \tau) = P_0{}^*w(r, \xi_*, \tau) = 0$.

В п. 2.4 для $\pi_0(z, \tau)$ было получено уравнение $\partial^2\pi_0/\partial z^2 = 0$, а теперь, при построении угловых ПФ, определились краевые условия: $\pi_0(0, \tau) = \pi_0(a, \tau) = 0$. Очевидно, что задача для π_0 имеет толоко тривиальное решение: $\pi_0(z, \tau) = 0$.

Тем самым полностью определены функции $\Pi_0 w = 0$ и $\Pi_0\theta$, причем $\Pi_0\theta$ имеет экспоненциальную оценку по τ (см. (2.13)), а из (2.14) находим начальное значение для функции $\alpha_0(z, t)$: $\alpha_0(z, 0) = \gamma_0(z) \equiv \alpha_{00}(z)$.

Аналогично

$$\pi_1(z, \tau) = 0, \quad P_1v = P_1w = P_1{}^*v = P_1{}^*w = 0, \quad \alpha_1(z, 0) = \alpha_{10}(z)$$

Для $P_0\theta(r, \xi, \tau)$ получаем задачу

$$L_0P_0\theta + \frac{\partial^2 P_0\theta}{\partial\xi^2} - \varkappa^{-1}\frac{\partial P_0\theta}{\partial\tau} = 0$$

$$r = b, \quad \frac{\partial P_0\theta}{\partial r} = 0; \quad \xi = 0, \quad P_0\theta = -\sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}(0) \times$$
$$\times \exp(-\varkappa\nu_n{}^2\tau) J_0(\nu_n r)$$

$$\tau = 0, \quad P_0\theta = -\sum_{n=1}^{\infty} d_{0n}(0) \exp(-\nu_n\xi) J_0(\nu_n r)$$

В силу требования 2° $b_{0n}(0) = d_{0n}(0)$, т. е. для функции $P_0\theta$ выполнены условия согласования начального и краевого значений. Решение задачи находится методом разделения переменных и имеет экспоненциальную оценку по переменным ξ и τ.

Для $P_i v(r, \xi, \tau)$, $P_i w(r, \xi, \tau)$ при $i \geqslant 2$ получаем задачу с ненулевыми правыми частями в уравнениях и неоднородными краевыми условиями при $\xi = 0$, $i \geqslant 3$. Эта задача также может быть решена методом разделения переменных. При этом определяется краевое значение для $\pi_i(z, \tau)$ при $z = 0$. Аналогично находим $P_i{}^*v(r, \xi_*, \tau)$, $P_i{}^*w(r, \xi_*, \tau)$ и $\pi_i(a, \tau)$ при $i \geqslant 2$. Затем решаем уравнение для $\pi_i(z, \tau)$ с найденными краевыми условиями и тем самым определяем полностью $\Pi_i w$ и $\Pi_i\theta$, а также находим начальное значение для функции $\alpha_i(z, t)$: $\alpha_i(z, 0) = \alpha_{i0}(z)$. Отметим, что π_i, а следовательно, и $\Pi_i w$, $\Pi_i\theta$ имеют экспоненциальную оценку по погранслойной переменной τ, так как являются решениями уравнения (2.17) с найденными краевыми значениями, имеющими экспоненциальную оценку по τ.

Для $P_i\theta(r, \xi, \tau)$ при $i \geqslant 1$ получаем задачу с ненулевой правой частью в уравнении и неоднородным краевым условием при $r = b$ для $i \geqslant 2$. Краевое и начальное условия — согласованные при $\xi = 0$, $\tau = 0$ в силу требования 2°. Решение задачи может быть найдено методом разделения переменных и имеет экспоненциальную оценку по переменным ξ и τ.

Функции $P_i{}^*\theta(r, \xi_*, \tau)$ $(i = 0, 1, \ldots)$ строятся аналогичным образом.

2.6. *Функции* $\alpha_i(z, t)$. В п. 2.1 были получены уравнения типа (2.7) для функций $\alpha_i(z, t)$, а в п. 2.2 и 2.5 при построении ПФ для них определены начальное и краевые значения. Можно показать, что они являются согласованными в силу требования 2°, т. е. $\alpha_i{}^0(0) = \alpha_{i0}(0)$, $\alpha_i{}^a(0) = \alpha_{i0}(a)$.

Введем еще одно условие.

4°. Пусть уравнение (2.7) с дополнительными условиями

$$\alpha_0(z, 0) = \alpha_{00}(z),\ \alpha_0(0, t) = \alpha_0{}^0(t),\ \alpha_0(a, t) = \alpha_0{}^a(t)$$

имеет решение.

Функции $\alpha_i(z, t)$ при $i \geqslant 1$ определяются далее последовательно как решения линейных уравнений типа (2.7) с найденными выше дополнительными условиями.

Итак, описанный способ позволяет определить члены разложения (2.1) до любого номера n.

3. Основной результат. Основной результат можно сформулировать следующим образом. Обозначим $Y_n(r, z, t, \varepsilon)$ n-ю частичную сумму ряда (2.1).

Теорема 1. При условиях 1° — 4° функция $Y_n(r, z, t, \varepsilon)$ удовлетворяет системе уравнений (1.3) и дополнительным условиям (1.4) с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

Утверждение теоремы непосредственно следует из самого способа построения ряда (2.1).

Отметим два существенных момента, связанных с построенной асимптотикой.

1) Нахождение членов асимптотики (2.1) сводится к решению более простых задач, чем исходная задача (1.3), (1.4). Регулярные члены асимптотики определялись при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений типа (2.3), (2.5), решения которых элементарно находятся в явном виде, и параболических уравнений типа (2.7). Если источники тепла H зависят линейно от температуры, то решение уравнения (2.7)

также находится в явном виде. Для ПФ методом разделения переменных получаются явные представления в виде рядов.

2) В практических расчетах исходную систему уравнений заменяют более простой, укороченной системой. Какие же члены уравнений можно отбросить? На первый взгляд может показаться, что для тонкого стержня при слабом теплообмене на его боковой поверхности в уравнениях для осевого перемещения w и температуры θ можно пренебречь производными по ρ и рассматривать укороченные уравнения (одномерная модель)

$$(3.1)\qquad (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+f=0,\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}-\varkappa^{-1}\theta^{\cdot}-\eta\frac{\partial w^{\cdot}}{\partial z}=-\varkappa^{-1}H$$

Однако асимптотический анализ показывает, что это не так. Уравнения для главных членов асимптотики $\overline{w}_0=g_0(z,t)$ и $\overline{\theta}_0=\alpha_0(z,t)$ имеют вид (2.5) и (2.7), т. е. отличаются от (3.1) дополнительными слагаемыми, показывающими необходимость учета уже в нулевом приближении слабого теплообмена (член $-2b^{-1}A\varkappa\alpha_0$ в уравнении (2.7)) и малых радиальных перемещений на боковой поверхности (члены $-2b^{-1}(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}\partial\varphi_0/\partial z$ в уравнении (2.5) и $-2b^{-1}\eta\varkappa\varphi_0^{\cdot}$ в уравнении (2.7)). Таким образом, асимптотический анализ дает возможность точно ответить на вопрос, какая одномерная модель правильна.

4. Теорема существования. Положим

$$\begin{aligned}
&v^-=v-V_{n+2}(r,z,t,\varepsilon)-(\varepsilon\varphi(z,t,\varepsilon)-V_{n+2}(b,z,t,\varepsilon))\\
&w^-=w-W_{n+2}(r,z,t,\varepsilon)-((\psi_1(r,t,\varepsilon)-W_{n+2}(r,0,t,\varepsilon))\times\\
&\times(a-z)/a+(\psi_2(r,t,\varepsilon)-W_{n+2}(r,a,t,\varepsilon))\,z/a)\\
&\theta^-=\theta-\Theta_{n+2}(r,z,t,\varepsilon)
\end{aligned}$$

где V_{n+2}, W_{n+2}, Θ_{n+2} — частичные суммы ряда (2.1) для v, w, θ соответственно. Для v^-, w^- и θ^- получим задачу

$$(4.1)\qquad \begin{aligned}&L_1y^-=\varepsilon^2\beta\partial\theta^-/\partial r+m_1(r,z,t,\varepsilon)\\ &L_2y^-=\varepsilon^3\beta\partial\theta^-/\partial z+m_2(r,z,t,\varepsilon)\end{aligned}$$

$$(4.2)\qquad L_3y^-=h(\theta^-,r,z,t,\varepsilon),\ (r,z,t)\in G$$

$$(4.3)\qquad \begin{aligned}&r=b,\ v^-=0,\ \partial w^-/\partial r=0\\ &z=0,\ \partial w^-/\partial r+\varepsilon\partial v^-/\partial z=0,\ w^-=0\\ &z=a,\ \partial w^-/\partial r+\varepsilon\partial v^-/\partial z=0,\ w^-=0\end{aligned}$$

$$(4.4)\qquad \begin{aligned}&r=b,\ \partial\theta^-/\partial r+A\varepsilon^2\theta=O(\varepsilon^{n+3})\\ &z=0,\ \theta^-=O(\varepsilon^{n+3});\ z=a,\ \theta^-=O(\varepsilon^{n+3})\\ &t=0,\ \theta^-=O(\varepsilon^{n+3})\\ &(h(\theta^-,r,z,t,\varepsilon)=-\varepsilon^2\varkappa^{-1}H(\Theta_{n+2}+\theta^-,r,z,t)-L_3(y-y^-))\end{aligned}$$

где m_i $(i=1,2)$ — известные функции, причем $m_i=O(\varepsilon^{n+3})$ в G.

Отметим, что введение функций v^-, w^-, θ^- именно таким образом, как это было сделано, позволило получить для v^-, w^- однородные краевые условия.

Для доказательства существования решения задачи (4.1)—(4.4) понадобится еще одно условие.

5°. Пусть $m_1(0,z,t,\varepsilon)=0$.

Достаточным условием для 5° является выполнение следующих равенств: $\varphi_{i+2}(z,t)=0$, $F_{i+1}(0,z,t)=0$ при $i>n$.

Рассмотрим уравнение, которое получается из (4.2), если заменить члены

$$\left\{-\varepsilon\eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{dr}(rv^{\cdot -})-\varepsilon^2\eta\frac{\partial w^{\cdot -}}{\partial z}\right\}\ \text{на}\ \left\{-\frac{\varepsilon^3\beta\eta}{\lambda+2\mu}\theta^{\cdot -}+M(r,z,t,\varepsilon)\right\}$$

где M — некоторая известная функция. Для этого уравнения с дополнительными условиями (4.4) можно доказать существование и единственность решения (см. [6]). Разложим это решение в ряд

$$\theta^-=\Sigma\theta_{nk}J_0(\nu_n r)\cos\pi ka^{-1}z$$

Здесь и ниже суммирование ведется по n и k от нуля до бесконечности; величины с индексом nk — функции t, ε; ν_n — корни уравнения (2.9). Подставим этот ряд в уравнения (4.1). Решение задачи (4.1), (4.3) ищем методом разделения переменных

$$(4.5) \qquad v^- = \Sigma v_{nk} J_1 (\nu_n r) \cos \pi k a^{-1} z$$
$$w^- = \Sigma w_{nk} J_0 (\nu_n r) \sin \pi k a^{-1} z$$

Функции m_1, m_2 также раскладываем в ряды

$$m_1 = \Sigma m_{1nk} J_1 (\nu_n r) \cos \pi k a^{-1} z, \quad m_2 = \Sigma m_{2nk} J_0 (\nu_n r) \sin \pi k a^{-1} z$$

Отметим, что ряд для m_1 сходится равномерно в G в силу требования 5°.

Подставляя эти представления в (4.1), для каждой пары коэффициентов v_{nk}, w_{nk} получаем систему двух алгебраических уравнений, решая которую, выражем v_{nk}, w_{nk} через θ_{nk}, m_{1nk}, m_{2nk}. Тем самым найдено решение (4.5). Теперь можно убедиться, что

$$-\varepsilon\eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\dot{v}^-) - \varepsilon^2\eta \frac{\partial \dot{w}^-}{\partial z} = -\frac{\varepsilon^3\beta\eta}{\lambda + 2\mu} \dot{\theta}^- + M (r, z, t, \varepsilon)$$

$$M = \Sigma \frac{\nu_n \dot{m}_{1nk} + \varepsilon\pi k a^{-1} \dot{m}_{2nk}}{(\lambda + 2\mu)(\nu_n^2 + (\varepsilon\pi k a^{-1})^2)} = O(\varepsilon^{n+3})$$

Поэтому, как и [6], для θ^- получается оценка

$$\max_{\bar{G}} |\theta^-| = O(\varepsilon^{n+1})$$

Аналогичные оценки элементарно следуют для v^-, w^-.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Если выполнены условия 1°—5°, то при достаточно малых ε задача (1.3), (1.4) имеет решение $y(r, z, t, \varepsilon)$, для которого ряд (2.1) — асимптотический в области $\bar{G}$, т. е.

$$\max_{\bar{G}} |y - Y_n| = O(\varepsilon^{n+1})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир. 1970. 256 с.
2. *Зино И. Е.*, *Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ. 1978. 224 с.
3. *Васильева А. Б.*, *Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука. 1973. 272 с.
4. *Бутузов В. Ф.* Асимптотика решений некоторых модельных задач химической кинетики с учетом диффузии // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1978. Т. 242. № 2. С. 268—271.
5. *Васильева А. Б.*, *Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ. 1978. 106 с.
6. *Бутузов В. Ф.*, *Уразгильдина Т. А.* Асимптотическое решение задачи о распространении тепла в тонких телах // Укр. мат. журн. 1987. Т. 39. № 1. С. 13—21.

Москва

Поступила в редакцию 5.II.1987