Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 6, 1987

УДК 539.3

ДИВЕРГЕНТНАЯ СИСТЕМА НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ

Ни А. Л., Фортов В. Е.

Приводится система дивергентных уравнений нестационарных движений вязкоупругих сред. Показано, что для непрерывных течений она эквивалентна известной системе уравнений [1]. Дивергентные уравнения предпочтительнее, например, с точки зрения их использования в вычислительных алгоритмах. На основании полученных дивергентных форм анализируются соотношения на разрывах.

Введем неподвижную ортонормированную систему координат с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Положение элемента сплошной среды в исходном недеформированном состоянии и в текущей момент времени характеризуется векторами $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где координаты отнесены к выбранному базису.

Связь $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ между текущим и исходным положениями точки, определяемая движением среды, приводит к соотношению для формоизменения элемента сплошной среды

$$d\mathbf{x} = \mathbf{A}\, d\mathbf{X}; \quad \mathbf{A} = \| A_{ik} \|, \quad A_{ik} = (\partial x_i / \partial X_k)\, X_j$$

Поскольку рассмотрение ведется в ортогональных координатах, ниже не делается различия между ковариантными и контрвариантными индексами. Кроме того, в проводимых далее соотношениях по одинаковым индексам подразумевается суммирование.

Введем часто используемые в работе понятия. Мерой деформации сплошной среды служат тензоры деформации Коши и Альманси [2]

$$\varepsilon = (\mathbf{E} - \mathbf{G})/2, \quad \varepsilon_1 = (\mathbf{G}_1 - \mathbf{E})/2, \quad \mathbf{G} = \mathbf{B}^*\mathbf{B}, \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$$

($\mathbf{E}$ — единичная матрица, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{F}^*$ — транспонированная и $\mathbf{F}^{-1}$ — обратная к $\mathbf{F}$ матрицы).

Если $ds_0^2 = (d\mathbf{X}, d\mathbf{X})$ и $ds^2 = (d\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ — квадраты длин недеформированного и деформированного отрезков, соединяющих две близкие точки среды, то $ds_0^2 - ds^2 = -2(\varepsilon d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = -2(\varepsilon_1 d\mathbf{X}, d\mathbf{X})$ (($\mathbf{a}, \mathbf{b}$) — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$), $ds^2 = (d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = (\mathbf{G}_1 d\mathbf{X}, d\mathbf{X})$, $ds_0^2 = (\mathbf{G}\, d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = (d\mathbf{X}, d\mathbf{X})$. По определению, ε и ε_1 характеризуют изменение расстояния между точками сплошной среды; ε, ε_1, $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}_1$ — симметричные тензоры.

Аффинор $\mathbf{A}$ можно представить в виде [3] $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}\mathbf{R}$, где $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_1$ — симметричные и положительно-определенные матрицы и R — ортогональная матрица. При этом, очевидно, $\mathbf{F}_1^2 = \mathbf{G}_1$, $\mathbf{F}^2 = \mathbf{G}$.

Из определения аффинора $\mathbf{A}$ и вектора скорости элемента сплошной среды $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ имеем

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} A_{kj}$$

Из закона сохранения массы следует, что плотность $\rho = \rho_0/\det \mathbf{A}$ (нижним нулевым индексом отмечена плотность среды в исходном состоянии).

Домножая обе части уравнений для **A** на ρ и используя уравнение неразрывности, заключаем, что верны следующие дивергентные уравнения для **A** (непосредственными вычислениями убеждаемся, что $\partial\rho A_{kj}/\partial x_k = 0$):

$$\frac{\partial\rho A_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_k A_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial\rho u_i A_{kj}}{\partial x_k} \tag{1}$$

которые совместно с дивергентными уравнениями, выражающими законы сохранения импульса и энергии

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\rho u_i u_k - \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{2}$$

$$\partial\left(\rho\left(e + \left(\frac{\mathbf{u}, \mathbf{u}}{2}\right)\right)\right) + \operatorname{div}\left(\rho\mathbf{u}\left(e + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{2}\right)\right) - \frac{\partial\sigma_{ik}u_i}{\partial x_k} = 0$$

образуют систему уравнений движения сплошной среды.

Для сохранения единства изложения сначала рассмотрим нелинейную упругую среду. Для нее уравнения движения замыкаются уравнением состояния $e = e(\mathbf{A}, s)$, задающим удельную внутреннюю энергию как функцию **A** и удельной энергии s, причем справедлив первый закон термодинамики, который выражает связь между приращениями внутренней энергии и энтропии с работой на упругих перемещениях

$$de = \rho^{-1}\boldsymbol{\sigma}\circ d\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} + Tds$$

($\boldsymbol{\sigma} = \| \sigma_{ik} \|$ — тензор напряжений, T — температура, $\mathbf{P} \circ \mathbf{Q} = P_{ik}Q_{ik}$ — свертка двух матриц). Отсюда $\sigma = \rho\,(\partial e/\partial\mathbf{A})_s A^*$. Считая e функцией тензора деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, выражение для σ можно преобразовать к виду $\boldsymbol{\sigma} = \rho\,(\mathbf{E} - 2\boldsymbol{\varepsilon})\,(\partial e/\partial\boldsymbol{\varepsilon})_j$. Последние соотношения — формулы Мурнагана [4].

На поверхности разрыва $S(x, t)$ должны выполняться соотношения

$$-[\rho A_{ij}]\,D + [\rho u_n A_{ij}] - [\rho u_i A_{lj} n_l] = 0$$

$$-[\rho u_i]\,D + [\rho u_i u_n] - [\sigma_{ik} n_k] = 0$$

$$-[\rho\,(e + (u, u)/2)]\,D + [\rho u_n\,(e + (u, u)/2) + \sigma_{ik} u_i n_k] = 0$$

$$D = -\frac{S_t}{|\nabla S|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|}, \quad S_t = \left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{x_j}, \quad S_{x_k} = \left.\frac{\partial S}{\partial x_k}\right|_{t,\,x_j}$$

где D — скорость поверхности разрыва, $\mathbf{n}$ — нормаль к ней, $[f]$ — разность значений величины f с противоположных сторон S. Градиент $\nabla S = (S_{x_1}, S_{x_2}, S_{x_3})$.

Условия на разрыве для импульса и энергии хорошо известны. Полученные же формальным образом из дивергентных уравнений движения связи для **A** совпадают на ударных волнах с кинематическими соотношениями [5], которые выражают непрерывность перемещений. Чтобы убедиться в этом, перепишем их в системе координат, направление одной из осей которой (для определенности пусть это будет ось x_1) совпадает с $\mathbf{n}$

$$[\rho A_{1l}]\,D = 0, \qquad l = 1, 2, 3$$

$$-j\,[A_{ki}] = [u_k]\,\rho^1 A_{1i}{}^1, \qquad k = 2, 3, \qquad i = 1, 2, 3$$

$$j = \rho^1\,(D - u_1{}^1) = \rho^2\,(D - u_1{}^2)$$

(j — поток массы через разрыв). Параметры течения перед и за фронтом будем отмечать верхними индексами 1 и 2.

Пусть в момент времени $t = 0$ элемент среды с лагранжевыми координатами X занимает положение x_0, а поверхность разрыва совпадает с плоскостью $x_1 = 0$. В момент времени t радиус-вектор x рассматриваемого элемента среды определяется уравнением

$$x = x_0 + u_1 t\theta(t_1 - t) + u_1 t_1 \theta(t - t_1) + \\ + u_2(t - t_1)\theta(t - t_1)$$

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ 1, & \xi \geqslant 0, \end{cases} \qquad t_1 = \frac{x_{01}}{D - u_1^1}$$

(t_1 — момент времени достижения разрывом данной точки среды).

Дифференцируя выражение для x по X, получаем соотношения, которые совпадают с соотношениями на разрыве, вытекающими из дивергентных уравнений движения.

В выбранной указанным выше образом системе координат уравнения сохранения импульса и энергии дают связи

$$-j[u_i] = [\sigma_{i1}]$$

$$[e] = (\sigma_{i1}^1 + \sigma_{i1}^2)[A_{i1}]/(2\rho_1^1 A_{11}^1)$$

В отличие от идеальной газовой динамики в случае нелинейной упругой среды заданием одного из параметров за фронтом ударной волны остальные параметры течения не определяются однозначно. Вообще говоря, здесь каждому исходному состоянию отвечают три ударные адиабаты: квазипродольная и две квазипоперечные [5].

С более сложной структурой уравнений связано также следующее обстоятельство.

Рассмотрим разрыв, неподвижный относительно вещества. В этом случае $j = 0$ и из приведенных выше соотношений на разрыве следует, что при переходе через него непрерывны скорости и напряжения. Плотность, энтропия и компоненты **A**, вообще говоря, разрывны. Наряду с рассмотренным типом контактного разрыва возможна ситуация другого рода, когда при переходе через разрыв непрерывны нормальные компоненты скорости и напряжения, а тангенциальные составляющие скорости претерпевают разрыв. Что же касается касательных составляющих напряжения, то они должны быть заданы при помощи дополнительной модели, описывающей трение поверхностей одна о другую. Этот случай имеет место на границе раздела сред с различными свойствами. В частности, если такого трения нет, касательные напряжения равны нулю. В любом случае на контактном разрыве должны выполняться шесть условий, обеспечивая его эволюционность.

Переходя к рассмотрению нелинейной вязкоупругой среды, примем, что справедливо представление $\mathbf{A} = \mathbf{A}_e\mathbf{A}_p$, где $\mathbf{A}_e$ и $\mathbf{A}_p$ — соответственно упругая и пластическая части аффинора **A**, причем внутренняя энергия — функция энтропии и упругой части $\mathbf{A}_e$: $e = e(\mathbf{A}_e, s)$. Такое предположение означает, что деформация элемента сплошной среды может быть разложена на два последовательных процесса: сначала пластической деформации, а затем из полученного нового состояния — упругой деформации. В рассматриваемой модели, как видно из дальнейшего, под пластической деформацией подразумевается остаточная деформация элемента сплошной среды после адиабатического снятия с него напряжений.

Запишем первый закон термодинамики

$$de = \boldsymbol{\sigma} : d\mathbf{A}_e\mathbf{A}_e^{-1} + Tds$$

Будем считать, что при движении элемента сплошной среды скорость изменения $\mathbf{A}_p$ — функция текущих параметров состояния

(3) $$\mathbf{A}_p^{\bullet} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{A}_p, \mathbf{A}_e, s)$$

Здесь и далее точкой обозначается лагранжевая производная ($\dot{f} = \partial f/\partial t + (\mathbf{u}, \nabla) f$). Комбинируя уравнения (2) с (3) и первым законом термодинамики, получаем выражение для производства энтропии

$$\rho T s^{\cdot} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{A}_e \boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}^{-1}$$

Отсюда заключаем, что адиабатический процесс, совершающийся при замороженной пластической деформации, является одновременно изэнтропическим. Уравнения (1)—(3) совместно с уравнением состояния и заданием кинетики пластической деформации — функции $\boldsymbol{\Phi}$ образуют полную систему уравнений движения вязкоупругой среды. Если обе части (3) домножить на ρ и воспользоваться уравнением неразрывности, то получаем дивергентное уравнение

$$\partial (\rho \mathbf{A}_p)/\partial t + \nabla (u \rho \mathbf{A}_p) = \rho \boldsymbol{\Phi} \qquad (4)$$

Из него следует, что на ударной волне функция $\mathbf{A}_p$ непрерывна (на контактном разрыве $\mathbf{A}_p$ может претерпевать разрыв).

По аналогии с ранее введенными тензорами $\mathbf{G}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ введем тензоры

$$\mathbf{G}_e = \mathbf{B}_e^* \mathbf{B}_e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_e = (\mathbf{E} - \mathbf{G})/2, \quad \mathbf{P}_e = \mathbf{A}_e^{-1}$$

Поскольку $\mathbf{B}_e^{\cdot} \mathbf{A}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e^{\cdot} = 0$, имеем цепочку равенств

$$\mathbf{G}_e^{\cdot} = \mathbf{B}_e^{\cdot *} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e^* \mathbf{B}_e^{\cdot} = - \mathbf{B}_e^* (\mathbf{B}_p^* \mathbf{A}^{\cdot *} + \boldsymbol{\Phi}_1^*) \mathbf{G}_e -$$
$$- \mathbf{G}_e (\mathbf{A}^{\cdot} \mathbf{B}_p + \boldsymbol{\Phi}_1) \mathbf{B}_e = - \mathbf{A}^{*-1} \mathbf{A}^{\cdot *} \mathbf{G}_e - \mathbf{G}_e \mathbf{A}^{\cdot} \mathbf{A}^{-1} - \boldsymbol{\Phi}_2^* - \boldsymbol{\Phi}_2$$
$$\boldsymbol{\Phi}_1 = - \mathbf{A}_e \boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}_p^{-1}, \quad \mathbf{B}_p = \mathbf{A}_p^{-1}, \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = \mathbf{G}_e \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{B}_e$$

Тензор ε_e подчиняется уравнениям

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e^{\cdot} = {}^1/_2 \mathbf{A}^{*-1} \mathbf{A}^{\cdot *} (\mathbf{E} - 2\boldsymbol{\varepsilon}_e) + {}^1/_2 (\mathbf{E} - 2\boldsymbol{\varepsilon}_e) \mathbf{A}^{\cdot} \mathbf{A}^{-1} + \boldsymbol{\varphi} \qquad (5)$$
$$\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\Phi}_2^* - \boldsymbol{\Phi}_2)/2$$

которые совпадают с уравнениями, описывающими изменение тензора деформации [1], где они были получены из других соображений. Данный здесь способ получения (5) приводит к тем же результатам, но делает более прозрачным смысл введенного в [1] тензора деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, построенного на базе упругой части аффинора $\mathbf{A}_e$. Уравнения (4) эквивалентны соотношениям [1] в области гладкости решения, но имеют в отличие от них дивергентную форму.

Матрица $\boldsymbol{\Phi}_2$, а следовательно, и $\boldsymbol{\Phi}$ определяются неоднозначно: $\boldsymbol{\Phi}_2 = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}_A$, где $\boldsymbol{\varphi}_A$ — любая антисимметричная матрица.

Природа неоднозначности видна из следующего рассмотрения:

$$\mathbf{A}_p^{\cdot} = - \mathbf{A}_e^* (\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\varphi}_A) \mathbf{A}_e \mathbf{A}_p$$

Если $\mathbf{A}_p = \mathbf{A}_p^{\circ}$, $\mathbf{A}_e = \mathbf{A}_e^{\circ}$ в момент времени t_0, то с точностью до величин высшего порядка малости в момент времени $t_0 + \Delta t$

$$\mathbf{A}_p = - (\mathbf{E} + \mathbf{A}_e^* \boldsymbol{\varphi}_A \mathbf{A}_e \Delta t) (\mathbf{E} + \mathbf{A}_e^* \boldsymbol{\varphi} \mathbf{A}_e \Delta t) \mathbf{A}_p^{\circ}$$

Матрица $\mathbf{E} + \mathbf{A}_e^* \boldsymbol{\varphi}_A \mathbf{A}_e \Delta t$ отвечает вращению элемента сплошной среды как целого. Отсюда в силу определения $\mathbf{A}_e$ и $\mathbf{A}_p$ убеждаемся, что эта неоднозначность не оказывает влияния на движение среды и, в частности, на производство энтропии. Соответствующее выражение совпадает с приведенным в [1]. Если считать, что вращение элемента среды как жесткого тела целиком отнесено к $\mathbf{A}_e$, то $\mathbf{A}_p$ — симметричная матрица.

Убедимся, что процесс пластической деформации совершается без изменения объема, или $\Delta_p = \det \mathbf{A}_p = 1$.

В самом деле, по определению

$$\Delta_p^{\cdot} = \dot{A}_{pij} \Delta_{pij} = \Delta_p \dot{A}_{pij} A_{pji}^{-1} = \Delta_p \mathbf{A}_e \mathbf{A}_e^* : \boldsymbol{\varphi} = - \Delta_p \mathbf{G}_e^{-1} : \boldsymbol{\varphi}$$

Условие $\Delta_p{}^{\cdot} = 0$, как видно отсюда, эквивалентно требованию выполнения уравнения неразрывности [1].

Теперь, когда эквивалентность полученных уравнений системе уравнений [1] установлена, для их замыкания можно воспользоваться результатами [6, 7], где приведены полуэмпирические уравнения состояния и интерполяционные формулы кинетики пластической деформации для ряда металлов.

Авторы благодарят Г. И. Канеля, привлекшего их внимание к данному вопросу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К., Роменский Е. И.* Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // ПМТФ. 1972. № 6. С. 124—144.
2. *Гольденблатт И. И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука. 1969. 336 с.
3. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука. 1971. 271 с.
4. *Murnaghan F. D.* Finite deformations of an elastic solid // Amer. J. Math. 1937. V. 59. No. 2. P. 235—260.
5. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир. 1972. 183 с.
6. *Годунов С. К., Козин Н. С., Роменский Е. И.* Уравнение состояния упругой энергии металлов при нешаровом тензоре деформаций // ПМТФ. 1974. № 2. С. 123—128.
7. *Годунов С. К., Демчук А. Ф., Козин Н. С., Мали В. И.* Интерполяционные формулы зависимости максвелловской вязкости некоторых металлов от интенсивности касательных напряжений и температур // ПМТФ. 1974. № 4. С. 114—118.

Черноголовка

Поступила в редакцию 6.XII.1985