

УДК 532.546 : 532.72

**АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА В НАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ  
С ОБЪЕМНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА**

**Зыонг Нгок Хай, Мусаев Н. Д., Нигматулин Р. И.**

Рассматриваются автомоделные решения системы нестационарных уравнений теплопроводности и фильтрации расплавленного вещества при наличии объемного источника тепла за счет поглощения энергии электромагнитного излучения. Изучена возможность существования автомоделного решения при различных (плоских, цилиндрических и сферических) пространственных симметриях. Показано существование автомоделного решения для осесимметрического случая при определенном законе излучения. Исследовано влияние поверхностного объемного нагрева и конвективного переноса тепла за счет фильтрации. Получено также решение для случая, когда фильтрация расплавленной фазы квазистационарна.

1. Пусть в порах твердого тела (первая компонента) находится вначале очень вязкая (в пределе даже твердая) среда (вторая компонента), которая под действием нагрева за счет теплопроводности и поглощения энергии высокочастотного (частотой  $10^{-1}$ — $10^{-2}$  МГц) электромагнитного излучения (ВЧ ЭМИ) постепенно «разжижается» и стремится расширяться. Эта разжиженная компонента под действием перепада давления может течь относительно неподвижного пористого твердого стекла, например, к скважине. Такой процесс может быть использован при добыче высоковязких (битумных) нефтей [1—4], газовых гидратов, при сушке и очистке пористых тел и т. д.

Термо- и гидродинамика процесса разогрева насыщенной среды рассматривается методом механики сплошных сред с учетом возможного фазового перехода первого ряда типа плавления или затвердевания для насыщающей (второй) компоненты при следующих основных допущениях.

1°. Процесс плавления происходит на геометрической поверхности — фронте плавления нулевой толщины (стефановская концепция о процессе плавления).

2°. Вне фронта плавления (поверхности сильного разрыва) расстояния, на которых параметры среды меняются существенно (например, характерные длины зон поглощения энергии ВЧ ЭМИ средой), много больше характерных размеров пор и расстояний между ними, которые, в свою очередь, гораздо больше молекулярно-кинетических размеров (например, средних длин свободного пробега молекул).

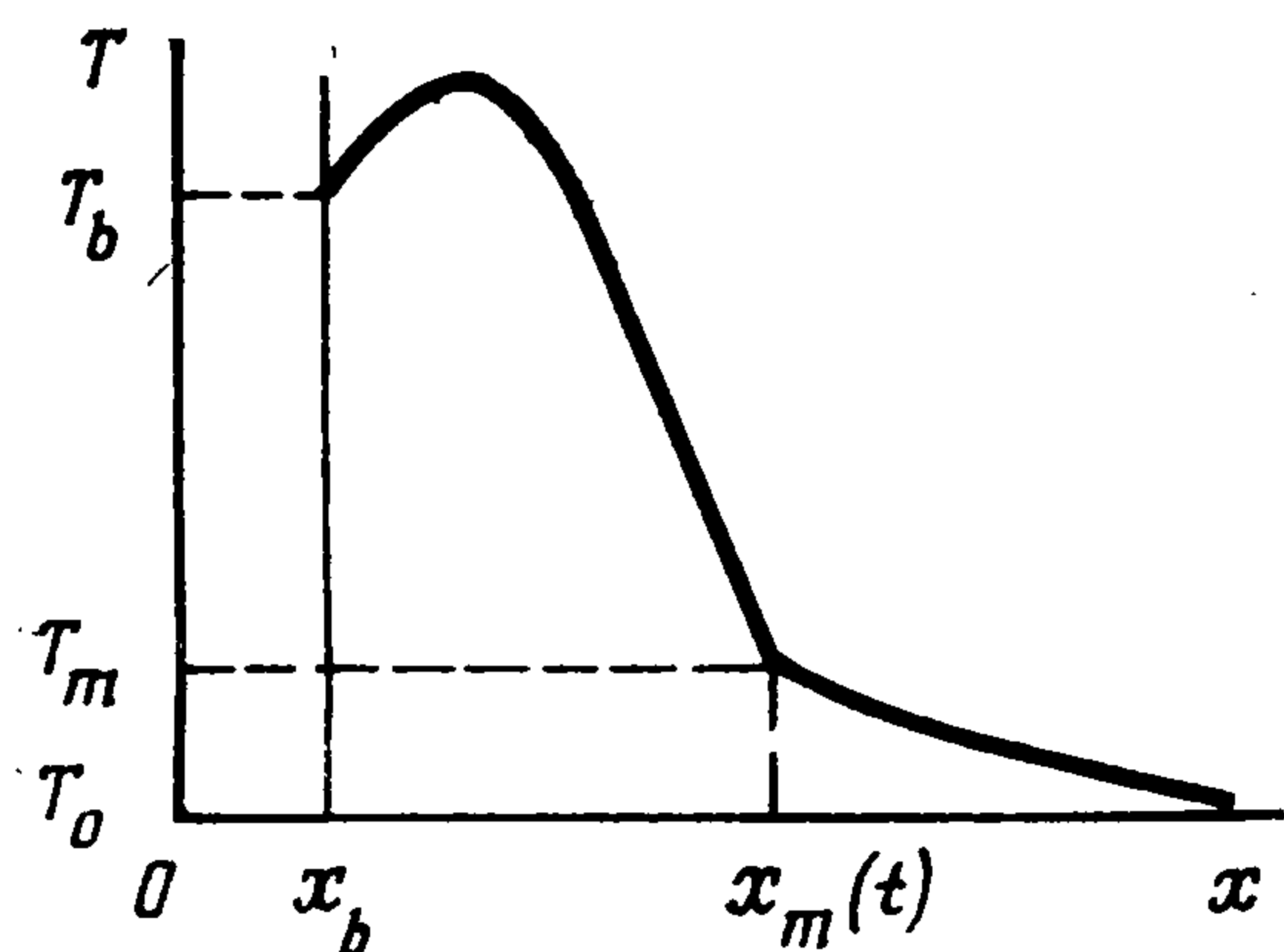
3°. Температуры фаз и компонент в каждом элементарном объеме пористой среды одинаковы.

4°. Движение жидкой (расплавленной) фазы в пористой среде безынерционное и подчиняется закону Дарси.

5°. Отсутствуют изменение объема твердой фазы и деформации скелета пористой среды.

Первое допущение можно принимать, когда размер зоны фазового превращения (плавления) много меньше длины изучаемой волны и ха-

раактерной длины задачи (например, характерной длины зоны поглощения энергии ВЧ ЭМИ средой). При втором допущении динамику системы, состоящей из пористого твердого тела (первой компоненты), заполняемого жидкой (расплавленной) и твердой (нерасплавленной) фазами второй компоненты вне фронта плавления, можно рассматривать в рамках модели взаимопроникающих и взаимодействующих трех сплошных



Фиг. 1

сред: 1) жидкой (расплавленной) фазы второй компоненты, 2) твердой (нерасплавленной) фазы второй компоненты, 3) первой компоненты — скелета породы. Далее параметры, соответствующие этим средам, отмечаются индексами  $i = 1, 2, 3$ ; индексы  $m, b$  характеризуют параметры среды на фронте плавления и на границе скважины;  $\alpha_i$  — объемная доля  $i$ -й фазы,  $T$  — температура,  $m$  — пористость,  $x$  — пространственная координата,  $x_b$  — радиус скважины (размер излучателя ВЧ ЭМИ),  $x_m(t)$  — координата подвижного фронта плавления,  $t$  — время.

Таким образом, в соответствии с указанными допущениями и обозначениями фронт плавления  $x_m(t)$  будет границей между зоной пористого твердого тела — скелета (третьей фазы), заполненного расплавленной второй компонентой (первая фаза):  $x_b < x < x_m(t)$ ,  $\alpha_1 = m$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 1 - m$ ,  $T > T_m$ , и зоной пористого твердого тела, заполненного твердой второй компонентой (вторая фаза):  $x > x_m(t)$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = m$ ,  $\alpha_3 = 1 - m$ , т. е. в данной схеме нет зоны смеси расплавленной и твердой второй компоненты (первой и второй фаз):  $\alpha_1 \alpha_2 = 0$ . Характерное распределение температуры при разогреве среды за счет теплопроводности и поглощения энергии ВЧ ЭМИ представлена на фиг. 1 (источник излучения находится в начале координат).

Третье допущение позволяет описывать рассматриваемый процесс в рамках однотемпературной модели. Оно связано с тем, что в большинстве практически важных случаев характерное время выравнивания температур фаз ( $10^{-1}$ — $10$  с) много меньше характерного времени нагревания среды внешним объемным источником тепла и характерного времени гидродинамического процесса ( $10^1$ — $10^5$  с). Последнее допущение можно принимать, когда перемещение фронта плавления за счет теплового расширения твердого вещества перед фронтом мало по сравнению с перемещением этой поверхности за счет фазового превращения. В этом случае задача упрощается, так как поле температур среды перед фронтом плавления можно определять не решая уравнения движения.

При принятых допущениях вне поверхности сильного разрыва (фронта плавления  $x_m(t)$ ) уравнения неразрывности, фильтрации фаз и уравнения притока тепла (теплопроводности) смеси для случая одномерного симметричного (плоского  $\nu = 0$ , цилиндрического  $\nu = 1$  и сферического  $\nu = 2$ ) движения в эйлеровой системе координат  $(x, t)$  могут быть представлены в следующем виде [5—7]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{1}{x^\nu} \frac{\partial}{\partial x} (x^\nu \rho_i v_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$(1.2) \quad \alpha_1 v_1 = -\frac{k}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad v_2 = v_3 = 0$$

$$(1.3) \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha_1 \rho_1 c_1 v_1 \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{x^\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda x^\nu \frac{\partial T}{\partial x} \right) + A + Q$$

$$(1.4) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = m$$

$$(1.5) \quad \alpha_1 \alpha_2 = 0$$

где  $\rho_i$ ,  $p_i$ ,  $v_i$ ,  $c_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\lambda_i$  — соответственно плотность, давление, скорость, вязкость, теплоемкость и коэффициент теплопроводности  $i$ -й фазы;  $k$  — проницаемость,  $A$  — работа внутренних сил;  $Q$  — интенсивность объемного источника тепла. При этом теплоемкость смеси  $c$  и коэффициент теплопроводности смеси  $\lambda$  полагаются аддитивными соответственно по массам фаз и объемам фаз:

$$(1.6) \quad \rho c = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \rho_i c_i, \quad \lambda = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \lambda_i$$

Далее будем рассматривать случай, когда вкладом работы внутренних сил  $A$  в изменение температуры можно пренебречь ( $A \ll Q$ ).

Для замыкания системы дифференциальных уравнений (1.1) — (1.3) используются следующие уравнения состояния фаз:

$$(1.7) \quad \rho_1 = \rho_{10} [1 + \beta_p (p_1 - p_0)], \quad \rho_2 = \text{const}, \quad \rho_3 = \text{const}$$

где  $\beta_p$  — коэффициент сжимаемости жидкой фазы.

В условиях, когда перепады давления  $\Delta p \lesssim 10^2$  МПа и  $\beta_p \sim 10^{-3}$  МПа $^{-1}$ , имеем

$$\frac{v_1 (\partial \rho_1 / \partial x)}{\rho_1 (\partial v_1 / \partial x)} \sim \beta_p \Delta p \ll 1$$

Поэтому конвективной составляющей изменения плотности жидкой фазы можно пренебречь. Тогда из (1.1) с учетом (1.7) получаем следующее линейное уравнение пьезопроводности:

$$(1.8) \quad x_b \leq x < x_m(t) \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\kappa}{x^\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^\nu \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) = 0, \quad \kappa = \frac{k}{m \mu_1 \beta_p}$$

где  $\kappa$  — коэффициент пьезопроводности. Задача о распределении давления перед фронтом плавления ( $x > x_m(t)$ ) в данной постановке ( $\rho_2 = \text{const}$ ,  $\rho_3 = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ) относится к классу статически неопределимых задач, и это распределение не влияет на распределение всех остальных параметров.

Распределение тепловых источников  $Q$ , возникающих за счет поглощения энергии ВЧ ЭМИ, определяется из уравнения Умова—Пойнтинга и закона Бугера—Ламберта для монохроматической волны:

$$(1.9) \quad Q = -\nabla \cdot \mathbf{R}; \quad \nabla \cdot \mathbf{R} = R/L \quad (L > 0)$$

где  $\mathbf{R}$  — вектор интенсивности излучения, а  $L$  — длина поглощения энергии электромагнитной волны (ЭМВ) рассматриваемой среды. Для однородной и изотропной среды в случае распространения одномерной (плоской, цилиндрической и сферической) монохроматической волны уравнение для интенсивности излучения вместе с граничным условием на скважине имеет вид

$$(1.10) \quad \frac{\partial}{\partial x} (x^\nu R) = \frac{x^\nu R}{L}; \quad x = x_b, \quad R = R_b = \frac{N^{(e)}}{S_b} \\ S_b = \chi(\nu) x_b^\nu; \quad \chi(0) = 1, \quad \chi(1) = 2\pi, \quad \chi(2) = 4\pi$$

где  $R_b$  — интенсивность излучения на границе скважины ( $x = x_b$ ), определяемая мощностью  $N^{(e)}$  и площадью поверхности излучателя  $S_b$ .

В общем случае для заданной среды длина поглощения  $L$  определяется частотой ЭМВ  $\omega$  и зависит от давления  $p$  и температуры (большой цикл работ по измерению электрофизических параметров для материалов нефтяной технологии, позволяющих вычислить  $L$ , выполнен Ф. Л. Саяховым с сотрудниками (см. [1, 3]); более ранние пробные измерения этих параметров были выполнены в [4]). Тогда даже при фиксированной частоте  $\omega$  уравнения для термогидродинамических параметров (1.1)—(1.7) и уравнения для  $Q$  и электрофизического параметра  $R$  взаимосвязаны, т. е. должны решаться совместно.

Часто влиянием давления  $p$  и температуры на длину поглощения  $L$  можно пренебречь. Тогда для фиксированной частоты  $\omega$  величина  $L$  становится заранее известным параметром, который сразу определяет интенсивность излучения  $R$  и интенсивность объемного источника тепла  $Q$  независимо от решения термогидродинамических уравнений:

$$(1.11) \quad Q = \frac{R_b}{L} \left( \frac{x_b}{x} \right)^{\nu} \exp \left( - \frac{x - x_b}{L} \right)$$

Учитывая, что ЭМВ может отражаться от поверхности плавления  $x_m(t)$ , как от поверхности, на которой претерпевают разрыв электромагнитные свойства среды, объемные тепловые источники для смеси в целом можно представить в следующем виде:

$$(1.12) \quad \begin{aligned} & x_b < x < x_m(t) \\ & Q_l = \frac{R_b}{L_l} \left( \frac{x_b}{x} \right)^{\nu} \left[ \exp \left( - \frac{x - x_b}{L_l} \right) + \right. \\ & \quad \left. + H \exp \left( - \frac{x_m - x_b}{L_l} - \frac{x_m - x}{L_s} \right) \right] \\ & x > x_m(t) \\ & Q_s = (1 - H) \frac{R_l}{L_s} \left( \frac{x_b}{x} \right)^{\nu} \exp \left( - \frac{x_m - x_b}{L_l} - \frac{x - x_m}{L_s} \right) \\ & \quad \left( \frac{1}{L_l} = \frac{\alpha_1}{L_1} + \frac{\alpha_3}{L_3}, \frac{1}{L_s} = \frac{\alpha_2}{L_2} + \frac{\alpha_3}{L_3} \right) \end{aligned}$$

Здесь параметр  $H$  ( $0 \leq H \leq 1$ ) характеризует отражение излучаемой волны от межфазной границы и определяется как отношение энергий отраженной и падающей волны ( $H = 0$  соответствует отсутствию отражения,  $H = 1$  — полному отражению); для обозначения параметров смеси (длины поглощения  $L$ ) в областях расплавленной ( $x_b < x < x_m(t)$ ) и нерасплавленной ( $x > x_m(t)$ ) второй компоненты используются нижние индексы  $l$  и  $s$  соответственно. Следует иметь в виду, что всегда  $Q_k \geq 0$  ( $k = l, s$ ).

Система уравнений (1.2)—(1.8) (учитываем (1.12)) замкнута. Она может быть использована для исследования закономерностей нагрева среды за счет теплопроводности (поверхностного источника тепла  $q_b$ ) и поглощения энергии ВЧ ЭМИ (объемного источника тепла  $Q$ ). Соответствующая математическая задача заключается в отыскании решения системы уравнений (1.2)—(1.8) при следующих начальном и граничных условиях:

$$(1.13) \quad t = 0, \quad T = T_0 \leq T_m$$

$$(1.14) \quad x = x_b, \quad T = T_b \text{ или } \lambda_b S_b (\partial T / \partial x) = -q_b$$

$$(1.15) \quad m S_b \rho_{1b} v_{1b} = g_b$$

$$(1.16) \quad x \rightarrow +\infty, \quad T \rightarrow T_0$$

и при следующих условиях на фронте плавления  $x_m(t)$ :

$$(1.17) \quad v_{1m} = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_{1m}}\right) \frac{dx_m}{dt}, \quad \frac{dx_m}{dt} = \frac{j}{m\rho_2}$$

$$(1.18) \quad T = T_m = \text{const}, \quad jl = q_l + q_s$$

$$q_l = -\lambda_l \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_m-0}; \quad q_s = \lambda_s \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_m+0}$$

Здесь  $g_b$  — полный массовый расход жидкой (первой) фазы;  $j, l$  — интенсивность и удельная теплота фазового перехода;  $q_l, q_s$  — потоки тепла, поступающие к межфазной поверхности со стороны подвижной и неподвижной фазы;  $q_b = q(x_b, t)$  — интенсивность полного потока тепла через границу  $x = x_b$  ( $q_b > 0$  соответствует случаю подвода тепла;  $q_b < 0$  — случаю отвода тепла;  $q_b = 0$  означает отсутствие теплопроводности на границе скважины); нижний индекс 0 характеризует параметры начального состояния. Уравнения (1.17), (1.18) получаются из условий баланса массы и в квазистатическом (фильтрационном) приближении баланса энергии на межфазной границе  $x_m(t)$ . При этом удельная теплота фазового перехода  $l$ , представляющая разность энтальпий фаз, расходуется на изменение внутренней энергии вещества и на работу сил давления при фазовом переходе.

Отметим, что в работе [8] в уравнении энергии на межфазной границе имеются лишние слагаемые типа  $\rho_{1m}c_1v_{1m}T_m, m\rho_{1m}c_1T_m(dx_m/dt)$ . Подробное обсуждение уравнений сохранения на межфазных границах дано в гл. 2 книги [7].

В общем случае параметры жидкости первой фазы на фронте плавления должны быть определены из условия равновесия фаз вдоль линии плавления на основании уравнения Клапейрона—Клаузиуса для  $T_m(p)$ . Далее примем (см. [9])  $T_m = \text{const}$ .

2. Обычно радиус скважины много меньше характерных линейных размеров задачи и поэтому он неосуществлен. В этом случае граничные условия, определяющие потоки тепла  $q_b$ , расход жидкой фазы  $g_b$  и приток излучения  $R_b$ , задаются в виде предельных соотношений ( $x_b \rightarrow 0$ ):

$$(2.1) \quad \lim \left[ \lambda_b S_b(x_b) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_b} \right] = -q_b$$

$$(2.2) \quad \lim [m S_b \rho_{1b} v_{1b}] = g_b$$

$$(2.3) \quad \lim [R_b S_b(x_b)] = N^{(e)} \quad (S_b = \chi(v) x_b^v)$$

Для представленной выше системы уравнений рассмотрим возможные автомодельные решения, зависящие от одной переменной  $z = x^2 t^\eta$ . Уравнение теплопроводности в зоне плавления принимает вид

$$(2.4) \quad 0 < z < z_m = (x_m(t))^2 t^\eta$$

$$\lambda_l \frac{d^2 T}{dz^2} + \left[ \frac{\lambda_l(v+1)}{2z} - \frac{\rho c \eta}{4t^{\eta+1}} + V_l(z) \right] \frac{dT}{dz} + \frac{Q_l}{4zt^\eta} = 0$$

$$V_l(z) = \alpha_1 \rho_1 c_1 \frac{k}{\mu_1} \frac{dp_1}{dz}, \quad \frac{Q_l}{4zt^\eta} = \frac{N^{(e)}}{4\chi(v) z^{1+v/2}} \times$$

$$\times \frac{t^v}{L_l} \left[ 1 + H \exp \left( -2 \frac{\sqrt{z_m} - \sqrt{z}}{L_l t^{\eta/2}} \right) \right] \exp \left( -\frac{\sqrt{z}}{L_l t^{\eta/2}} \right)$$

Для существования автомодельного решения необходимо, чтобы все коэффициенты этого уравнения зависели только от  $z$  и не зависели от  $t$ . В частности, из анализа второго слагаемого в квадратных скобках урав-

нения теплопроводности вытекает  $\eta = -1$ . Из анализа последнего слагаемого, связанного с поглощением энергии  $Q$ , следует, что  $\nu = 1$  и

$$(2.5) \quad L_k = \sqrt{h_k t} \quad (h_k = \text{const}), \quad k = l, s$$

Поэтому последующее обсуждение проводится только для осесимметричного случая ( $\nu = 1$ ,  $\chi(\nu) = 2\pi$ ). Указанный закон изменения длины поглощения (2.5) может быть получен изменением во времени частоты  $\omega$  излучаемой волны.

Заметим, что при отсутствии объемных источников тепла, т. е. при отсутствии поглощения энергии ЭМВ средой ( $Q = 0$ ), как это видно из (2.4), автомодельное решение данной задачи с учетом фильтрационного движения жидкой фазы второй компоненты со скоростью  $V_l(z)$  может существовать при любом  $\nu = 0, 1$ , при этом, как и выше,  $\eta = -1$ .

3. Для анализа представленных уравнений полезно ввести следующие безразмерные переменные параметры, которые вместе с коэффициентом пористости  $m$  определяют решения рассматриваемой задачи:

$$(3.1) \quad \zeta = \frac{x^2}{a_l t}, \quad \theta = \frac{T}{T_m}, \quad P = \frac{p_1}{p_0}, \quad \delta_i = \frac{\rho_i}{\rho_{10}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$(3.2) \quad \Phi_1 = \frac{\rho_{10} c_1}{(\rho c)_l}, \quad B_p = \beta_p p_0, \quad a_k^* = \frac{a_k}{a_l}, \quad \kappa^* = \frac{\kappa}{a_l}$$

$$h_k^* = \sqrt{\frac{h_i}{a_l}}, \quad K_k = \frac{N^{(e)}}{\chi(\nu) \lambda_i T_m}, \quad G_i = \frac{\Lambda_i}{a_l},$$

$$G_b = \frac{g_b}{m \chi(\nu) \rho_{1b} \kappa B_p}$$

$$\left( a_k = \frac{\lambda_k}{(\rho c)_k}, \quad (\rho c)_k = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \rho_j c_j, \quad \Lambda_k = \frac{\lambda_k T_m}{\rho_2 l}, \quad k = l, s \right)$$

В соответствии с (3.1), (3.2) уравнение (1.8) и граничные условия (2.2), (1.17) имеют вид

$$(3.3) \quad 0 < \zeta < \zeta_m, \quad \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta \frac{dP}{d\zeta} \right) + \frac{1}{4\kappa^*} \frac{dP}{d\zeta} = 0, \quad \zeta = \zeta_m, \quad P = P_m$$

$$\zeta = 0, \quad \zeta \left( \frac{dP}{d\zeta} \right) = -G_b$$

(постоянные  $\zeta_m$  и  $P_m$  должны быть определены). Решение этой задачи определяется следующим выражением через интегральную показательную функцию:

$$(3.4) \quad 0 \leq \zeta \leq \zeta_m, \quad P(\zeta) = P_m - G_b \left[ \text{Ei} \left( -\frac{\zeta}{4\kappa^*} \right) - \text{Ei} \left( -\frac{\zeta_m}{4\kappa^*} \right) \right]$$

$$(3.5) \quad P_m = 1 + \frac{\delta_{1m} - 1}{B_p}, \quad \delta_{1m} = \delta_2 \left[ 1 - \frac{4G_b}{\zeta_m} \exp \left( -\frac{\zeta_m}{4\kappa^*} \right) \right]^{-1}$$

Величина  $\zeta_m$  будет определена ниже.

Как уже указывалось, вследствие того, что  $\beta_p = \Delta p \ll 1$ , для определения полей температур  $\theta(\zeta)$  в уравнении (1.3) можно принять  $\rho_1 = \rho_{10}$ , т. е. пренебречь изменением плотности жидкой (расплавленной) фазы из-за изменения давления. Тогда из (1.3), (1.14), (2.1), (1.16)–(1.18) с учетом (1.2) и (3.4) получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые условия:

$$(3.6) \quad \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta \frac{d\theta}{d\zeta} \right) + \left[ \frac{\zeta}{4a_i^*} + V_k(\zeta) \right] \frac{d\theta}{d\zeta} = -Q_i^*(\zeta) \quad (k = l, s)$$

$$(3.7) \quad \zeta = 0, \quad \theta = \theta_b \quad \text{или} \quad \zeta \frac{d\theta}{d\zeta} = -q_b^*$$

$$(3.8) \quad (q_b^* = q_b / (2\chi(\nu) \lambda_l)) \\ \theta|_{\zeta=\zeta_m-0} = \theta|_{\zeta=\zeta_m+0} = 1$$

$$(3.9) \quad -G_l d\theta/d\zeta|_{\zeta=\zeta_m-0} + G_s d\theta/d\zeta|_{\zeta=\zeta_m+0} = m/4$$

$$(3.10) \quad \zeta \rightarrow +\infty, \theta \rightarrow \theta_0$$

$$(3.11) \quad 0 \leq \zeta \leq \zeta_m, \quad a_k^* = a_l^* = 1, \quad V_i(\zeta) = V_l(\zeta) = \\ = -MG_b \exp\left(-\frac{\zeta}{4\kappa^*}\right), \quad M = mB_p = \Phi_1 \kappa^*$$

$$Q_i^*(\zeta) = Q_l^*(\zeta) = \frac{K_l \zeta^{-1/2}}{4h_l^*} \exp\left(-\frac{\sqrt{\zeta}}{h_l^*}\right) \times \\ \times \left\{1 + H \exp\left[-\frac{2}{h_l^*}(\sqrt{\zeta_m} - \sqrt{\zeta})\right]\right\} \\ (3.12) \quad \zeta > \zeta_m, \quad a_k^* = a_s^*, \quad V_k(\zeta) = V_s(\zeta) = 0 \\ Q_i^*(\zeta) = Q_s^*(\zeta) = (1 - H) \frac{K_s \zeta^{-1/2}}{4h_s^*} \exp\left(-\frac{\sqrt{\zeta_m}}{h_l^*} + \frac{\sqrt{\zeta_m} - \sqrt{\zeta}}{h_s^*}\right)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$(3.13) \quad 0 \leq \zeta \leq \zeta_m, \quad \theta(\zeta) = I_l(\zeta) + C_l J_l(\zeta) + D_l \\ \left(I_l(\zeta) = -\int_{\zeta}^{\zeta_m} F_l(u) X_l(u) du, \quad J_l(\zeta) = \int_{\zeta}^{\zeta_m} X_l(u) du\right. \\ \left.F_l(u) = \int_u^{\zeta_m} \frac{Q_l^*(\xi)}{X_l(\xi)} d\xi, \quad X_l(u) = \frac{1}{u} \exp\left[MG_b \operatorname{Ei}\left(-\frac{u}{4\kappa^*}\right) - \frac{u}{4}\right]\right)$$

$$(3.14) \quad \zeta > \zeta_m, \quad \theta(\zeta) = I_s(\zeta) + C_s J_s(\zeta) + D_s \\ \left(I_s(\zeta) = -\int_{\zeta_m}^{\zeta} F_s(u) X_s(u) du, \quad J_s(\zeta) = \int_{\zeta_m}^{\zeta} X_s(u) du\right. \\ \left.F_s(u) = \int_{\zeta_m}^u \frac{Q_s^*(\xi)}{X_s(\xi)} d\xi, \quad X_s(u) = \frac{1}{u} \exp\left(-\frac{u}{4a_s^*}\right)\right)$$

где  $C_l, D_l, C_s$  и  $D_s$  — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями при  $\zeta = 0, \zeta = \zeta_m$  и  $\zeta \rightarrow +\infty$ , указанными в (3.7), (3.8), (3.10). Отсюда видно, что для рассматриваемой задачи безразмерными критериями подобия являются параметры (3.2), характеризующие соответственно отношение тепловыделения к теплопроводности ( $K_l$  и  $K_s$ ), влияние теплофизического свойства фаз ( $M$  и  $a_s^*$ ), отношение пьезопроводности к теплопроводности ( $\kappa^*$ ), влияние массопереноса ( $G_b$ ), влияние электрофизических свойств среды ( $h_l^*, h_s^*$  и  $H$ ), влияние плавления ( $G_l$  и  $G_s$ ; см. ниже (4.9)), а также параметры  $\theta_b$  или  $q_b^*$ ,  $\theta_0$  и  $m$ , входящие в граничные условия. Всего 14 параметров определяют множество рассматриваемых автомодельных решений.

4. Можно показать, что имеют место следующие асимптотики при  $\zeta \rightarrow +0$ :

$$(4.1) \quad X_l(\zeta) \sim \zeta^{-1+\alpha}, \quad F_l(\zeta) \sim \int_{\zeta} u^{-1/2-\alpha} du \\ x \frac{\partial T}{\partial x} \sim \zeta \frac{d\theta}{d\zeta} \sim \zeta^\alpha, \quad \alpha = MG_b$$

При  $\zeta \rightarrow +\infty$  интегралы в выражениях (3.14) сходятся. Существование и само решение рассматриваемой задачи зависят от знака  $G_b$  и типа граничных условий.

а) Для  $G_b > 0$ , когда расплавленное вещество движется от скважины ( $v_1 > 0$ ), и при задании граничного условия первого рода на скважине

$$(4.2) \quad \zeta = 0, \quad \theta = \theta_b = \text{const} > 1$$

автомодельное решение рассматриваемой задачи существует и имеет вид

$$(4.3) \quad 0 \leq \zeta \leq \zeta_m, \quad \theta(\zeta) = 1 + I_l(\zeta) + [\theta_b - 1 - I_l(0)] \frac{J_l(\zeta)}{J_l(0)}$$

$$\zeta > \zeta_m, \quad \theta(\zeta) = 1 + I_s(\zeta) + [\theta_0 - 1 - I_s(+\infty)] - J_s(\zeta)/J_s(+\infty)$$

При этом поле давления в расплавленной (первой) фазе определяется при помощи соотношения (3.4). Из (4.3) следует, что

$$q_b^* = -\zeta (d\theta/d\zeta)_{\zeta=0} = 0$$

При задании граничного условия второго рода (с конечным ненулевым потоком тепла) при  $\zeta = 0$  автомодельное решение рассматриваемой задачи не существует.

б) Для  $G_b = 0$ , когда нет движения расплавленной фазы второй компоненты ( $v_1 = 0$ ), при задании конечного граничного условия первого рода (конечной температуры) на скважине автомодельное решение рассматриваемой задачи не существует. При задании граничного условия второго рода на скважине

$$(4.4) \quad \zeta = 0, \quad \zeta (d\theta/d\zeta) = -q_b^*$$

получается обобщение автомодельного решения классической задачи Стефана (без конвективного переноса тепла), учитывающее объемный источник тепла

$$(4.5) \quad 0 \leq \zeta \leq \zeta_m, \quad \theta(\zeta) = 1 + I_l(\zeta) + [q_b^* + F_l(0)] J_l(\zeta)$$

$$\zeta > \zeta_m, \quad \theta(\zeta) = 1 + I_s(\zeta) + [\theta_0 - 1 - I_s(+\infty)] J_s(\zeta)/J_s(+\infty)$$

В этом случае поле температуры  $\theta(\zeta)$  при  $\zeta \rightarrow +0$  стремится к бесконечности как  $\ln(1/\zeta)$ .

в) Для  $G_b < 0$ , когда расплавленное вещество движется к скважине ( $v_1 < 0$ ), при задании конечной температуры или конечного теплового потока при  $\zeta = 0$  автомодельное решение задачи не существует. Однако в этом случае на основании (3.13), (3.14) можно искать решение при задании обобщенного граничного условия

$$(4.6) \quad \zeta \rightarrow +0, \quad \zeta (d\theta/d\zeta) \sim -q_b^* \zeta^\alpha, \quad \alpha = MG_b$$

где  $q_b^*$  — заданная постоянная, определяемая асимптотическим поведением подвода тепла теплопроводностью на скважине. Тогда поля температур имеют вид

$$(4.7) \quad 0 \leq \zeta \leq \zeta_m, \quad \theta(\zeta) = 1 + I_l(\zeta) + [q_b^* \exp(-MG_b B) + F_l(0)] J_l(\zeta)$$

$$(B = \lim_{u \rightarrow +0} [Ei(-u) - \ln(u)])$$

$$\zeta > \zeta_m, \quad \theta(\zeta) = 1 + I_s(\zeta) + [\theta_0 - 1 - I_s(+\infty)] J_s(\zeta)/J_s(+\infty)$$

Решение (4.7) является обобщением (4.5) для случая  $G_b < 0$ . Формально (4.5) следует из решения (4.7) при  $G_b \rightarrow 0$ . В этом случае при  $\zeta \rightarrow +0$  и температура и тепловой поток стремятся к бесконечности.

Для определения параметра  $\zeta_m$ , дающего закон движения фронта плавления в виде

$$x_m(t) = \sqrt{\zeta_m a_1 t}$$

из уравнения баланса энергии на межфазной границе  $x_m(t)$  (3.9) с учетом (3.13), (3.14) получаем уравнение

$$G_l C_l(\zeta_m) X_l(\zeta_m) + G_s C_s(\zeta_m) X_s(\zeta_m) = m/4$$

Для пористых сред, как правило,  $\kappa \gg a_l$ . Поэтому, учитывая, что  $\kappa^* \rightarrow +\infty$ , при определении распределения температуры (см. (3.13)) соотношение  $X_l(u)$  можно упростить:

$$X_l(u) = u^{-1+\alpha} \exp(-u/4)$$

Это приближенное распределение температуры среды соответствует решению уравнения теплопроводности (3.6) со следующим полем скорости расплавленного вещества:  $V_l(\zeta) = -MG_b/\zeta$ , которое соответствует решению уравнения пьезопроводности (1.8) в квазистационарном приближении ( $\partial p_1/\partial t = 0$ ), когда поле давления представляется в виде  $P(\zeta) = P_m - G_b \ln(\zeta/\zeta_m)$ .

Проанализируем решения (4.3), (4.5), (4.7). После дифференцирования из (4.3), т. е. когда  $G_b > 0$  и  $v_1 > 0$ , имеем

$$0 \leq \zeta \leq \zeta_m, \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = X_l(\zeta) \left[ F_l(\zeta) - \frac{\theta_b - 1 - I_l(0)}{J_l(0)} \right]$$

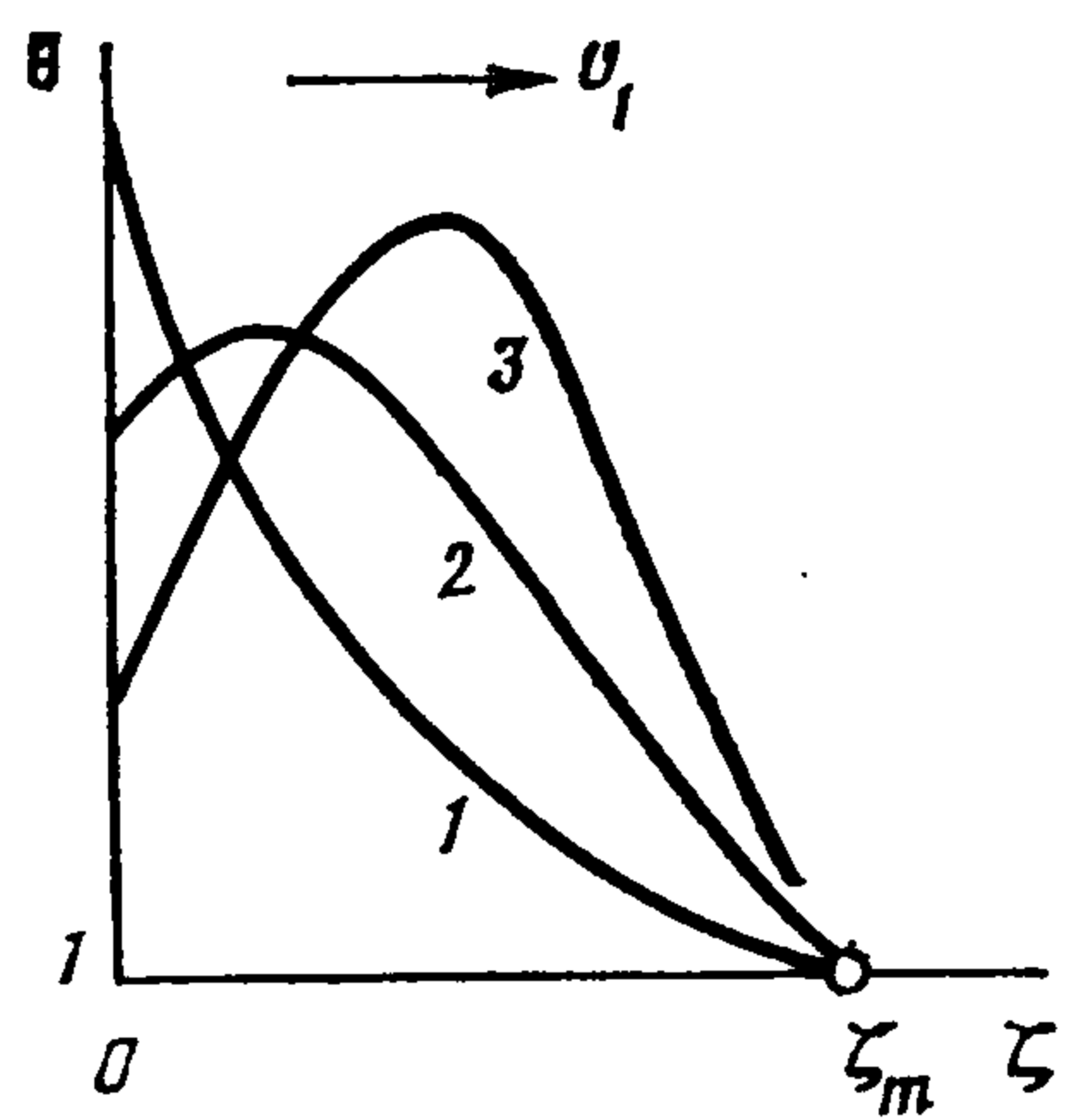
Отсюда имеем, что при отсутствии поглощения энергии ЭМВ средой ( $Q = 0$ ) в области расплавленной фазы второй компоненты ( $0 \leq \zeta \leq \zeta_m$ ) функция  $\theta(\zeta)$  вогнута и монотонно убывает от  $\theta_b$  до 1. При наличии объемного источника тепла ( $Q > 0$ ) функция  $\theta(\zeta)$  может стать выпуклой и немонотонной. При этом  $\theta(\zeta)$  может иметь не более одного максимума.

На фиг. 2 представлены характерные профили температуры среды  $\theta(\zeta)$  в области расплавленного вещества ( $0 \leq \zeta \leq \zeta_m$ ), для  $G_b > 0$  при различных интенсивностях объемного источника тепла  $Q$ . Кривая 1 соответствует случаю  $Q = 0$ . С увеличением  $Q$ , например, в результате увеличения  $N^{(e)}$ , в распределении  $\theta(\zeta)$  появляется максимум и выпуклость  $\theta(\zeta)$  становится более выраженной (кривая 3). Кривые 2, 3 на фиг. 2 соответствуют случаю  $Q > 0$ . Во всех случаях фронт плавления соответствует точке  $\zeta_m = x_m^2/a_1 t$ .

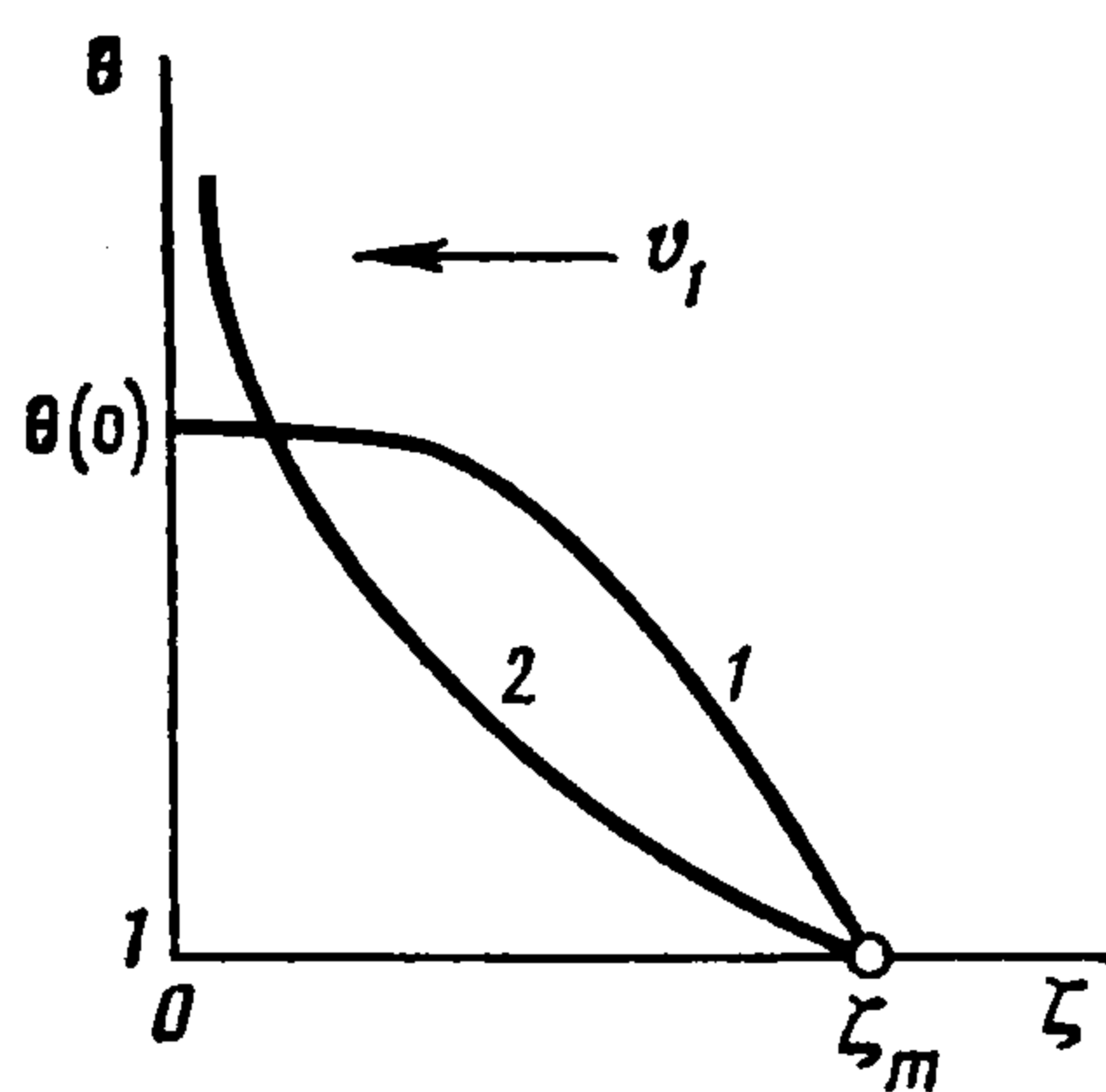
Можно показать, что решения (4.5), (4.7) имеют физический смысл, только когда  $q_b \geq 0$ , так как в противном случае из (4.5) и (4.7) следует, что при  $\zeta \rightarrow +0$  температура  $\theta(\zeta)$  отрицательная и стремится к бесконечности как  $\ln \zeta$  и  $-\zeta^\alpha$  ( $\alpha = MG_b$ ) соответственно. Однако в этом и в подобных случаях можно рассматривать решения данной задачи в двухфронтовых постановках [9].

На фиг. 3 представлены характерные профили полей температур среды  $\theta(\zeta)$  в области расплавленного вещества ( $0 \leq \zeta \leq \zeta_m$ ) для случаев  $G_b = 0$  и  $G_b < 0$  (первые соотношения решений (4.5), (4.7)). При  $q_b = 0$  ( $Q > 0$ ) в обоих случаях температура среды в центре  $\theta(0)$  конечна (кривая 1). При  $q_b > 0$  ( $Q \geq 0$ ) она стремится к  $+\infty$  (кривая 2 на фиг. 3).

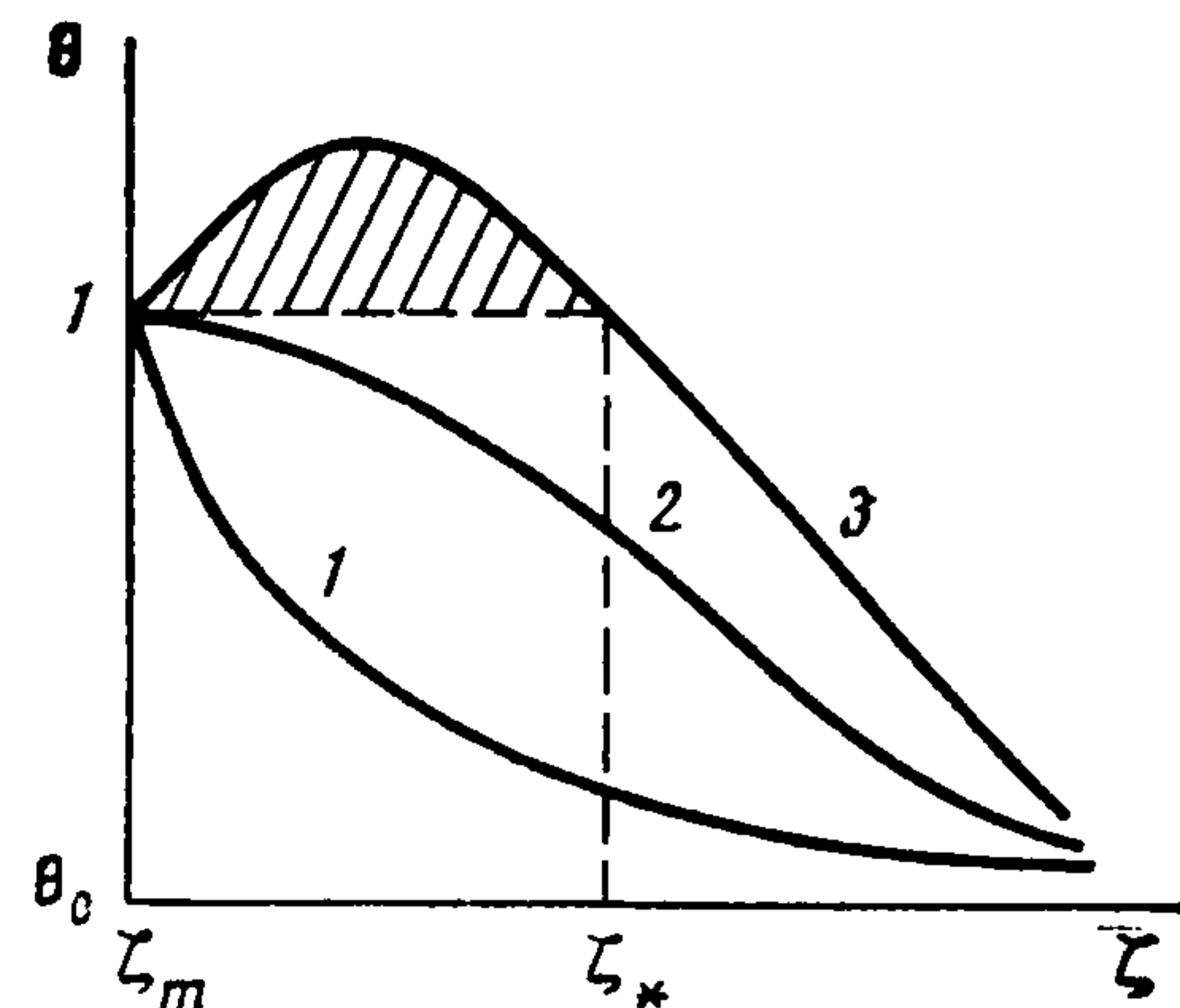
5. В рамках принятой модели скачка, разделяющего твердую (нерасплавленную) и жидкую (расплавленную) фазы второй компоненты, термогидродинамические процессы в области жидкой фазы ( $0 \leq \zeta \leq \zeta_m$ ) влияют на тепловой процесс в области твердой фазы ( $\zeta > \zeta_m$ ) только через динамику фронта плавления  $x_m(t)$ , а именно через параметр  $\zeta_m$ . Из решений (4.3), (4.5), (4.7), видно, что распределения температуры среды в области твердой второй компоненты ( $\zeta > \zeta_m$ ) для всех трех случаев ( $G_b > 0$ ,  $G_b = 0$  и  $G_b < 0$ ) имеют одинаковый вид. Из этих реше



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ний следует также, что в области  $\zeta > \zeta_m$

$$(5.1) \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = X_s(\zeta) \left[ -F_s(\zeta) + \frac{\theta_0 - 1 - I_s(+\infty)}{J_s(+\infty)} \right]$$

Отсюда можно получить условие отсутствия зоны перегретой твердой (нерасплавленной) фазы второй компоненты (условие невозрастания по  $\zeta$  поля температуры среды  $\theta(\zeta)$  при  $\zeta \geq \zeta_m$ )

$$(5.2) \quad I_s(+\infty) + 1 - \theta_0 \geq 0 \quad (I_s(+\infty) \leq 0)$$

При отсутствии поглощения энергии ЭМВ средой ( $Q = 0$ ) имеем  $I_s(+\infty) = 0$ . Поэтому в силу  $\theta_0 \leq 1$  условие (5.2) выполняется всегда. При наличии объемного источника тепла ( $Q > 0$ ) имеем  $I_s(+\infty) < 0$ . С увеличением  $Q$  величина  $I_s(+\infty)$  уменьшается, это может привести к нарушению условия (5.2) и, следовательно, к немонотонности поля температуры среды в области  $\zeta \geq \zeta_m$ , т. е. к появлению зоны перегретой твердой второй компоненты ( $\zeta_m < \zeta < \zeta_*$ ,  $\theta(\zeta) > 1$ , где  $\theta(\zeta_*) = 1$ ).

На фиг. 4 представлены характерные профили полей температуры среды  $\theta(\zeta)$  в области  $\zeta > \zeta_m$  для различных интенсивностей объемного источника тепла  $Q$ . Кривая 1 соответствует случаю  $Q = 0$ , кривая 2 — случаю отсутствия зоны перегретой твердой второй компоненты (второй фазы):  $\theta(\zeta) \leq 1$ , а кривая 3 — случаю наличия зоны перегретой второй фазы:  $\zeta_m < \zeta < \zeta_*$ ,  $\theta(\zeta) > 1$  ( $I_s(+\infty) + 1 - \theta_0 < 0$ ) (в последних двух случаях  $Q > 0$ ). В координатах  $(x, t)$  размер зоны перегретой второй фазы со временем увеличивается по закону  $(\sqrt{\zeta_*} - \sqrt{\zeta_m}) \sqrt{a_1 t}$ . При  $\theta_0 = 1$  из (3.13) и (5.2) видно, что для любого  $Q > 0$  зона перегретой второй фазы имеет бесконечный размер, так как в этом случае для любого  $\zeta > \zeta_m$ ,  $\theta(\zeta) > 1$ .

Следует отметить, что наличие зоны перегретой второй фазы (нерасплавленной второй компоненты) свидетельствует о неприемлемости модели скачка (схемы Стефана), разделяющего твердую (нерасплавленную) и жидкую (расплавленную) фазы второй компоненты для описания данного явления. В этом случае для математического моделирования процесса необходимо вместо поверхности плавления вводить двухфазную зону плавления ненулевой толщины. В этой зоне одновременно существуют жидкая и твердая фазы второй компоненты ( $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$ ), а температура равна температуре плавления ( $\theta = 1$ ).

6. Автомодельные решения более частной системы дифференциальных уравнений теплопроводности и фильтрации расплавленного вещества при отсутствии объемного подогрева ( $Q = 0$ ) рассматривались для плоского [8] и осесимметричного случаев [10]. Автомодельное решение этой задачи исследовалось с учетом конвективного переноса тепла, возникающего, как в пп. 2—5, за счет разности плотностей твердой и расплавленной фаз второй компоненты. Автомодельное решение задачи без фильтрации ( $v_1 = 0$ ) и без конвективного переноса тепла в уравнении теплопроводности имеется в [11, 12].

Однако ошибочное уравнение баланса энергии на межфазной границе, использованное в [8] (см. обсуждение уравнения (1.19)), привело к неверному значению  $\zeta_m$  и, тем самым, к неправильному определению закона движения фронта плавления  $x_m(t) = \sqrt{\zeta_m a_1 t}$ . Ошибочно и приведенное [10] решение уравнения теплопроводности в зоне расплавленной фазы второй компоненты (см. (3.6), (3.11)) для случая  $G_b < 0$  при  $Q_l^* = 0$ . Более того, решения этой задачи в указанном режиме, когда происходит течение расплавленного вещества к скважине, при задании конечных граничных условий любого рода (конечной температуры или конечного теплового потока) при  $\zeta = 0$  не существует. Анализ существования и само решение рассматриваемой задачи, когда  $Q = 0$ , для случаев  $G_b < 0$ ,  $G_b = 0$  и  $G_b > 0$  следует из пп. 2—5 данной работы при  $Q_l^*(\zeta) = Q_s^*(\zeta) = 0$  ( $I_l(\zeta) = I_s(\zeta) = 0$ ).

7. Можно выделить два предельных случая. Первый, когда вторая компонента везде находится в жидкой фазе ( $\alpha_1 = m > 0$ ,  $\alpha_2(x, t) = 0$ ). Тогда в рассмотренных решениях следует положить  $\zeta_m = +\infty$ . При этом

$$F_l(u) = \int_u^1 X_l^{-1}(\xi) Q_l^*(\xi) d\xi$$

При задании конечного давления на бесконечности решение рассматриваемой задачи в квазистационарном приближении ( $\partial p_1 / \partial t = 0$ ) для  $G_b \neq 0$  ( $v_1 \neq 0$ ) не существует. При  $G_b = 0$  ( $v_1 = 0$ ) имеем тривиальное стационарное поле давления  $P(\zeta) = P_m = P_0 = 1$  ( $P_0 = P(\zeta \rightarrow \infty)$ ).

Если учитывать зависимость вязкости жидкой фазы второй компоненты от температуры, то температурное и фильтрационное уравнения будут взаимосвязанными, а уравнение пьезопроводности (1.8) становится нелинейным.

Второй предельный случай, когда отсутствует жидкая фаза второй компоненты и нет плавления:  $\alpha_1(x, t) = 0$ ,  $\alpha_2 = m$ ,  $v_1 = 0$ ,  $G_b = 0$ ,  $\zeta_m = 0$ , а распределение температуры получается из (3.14). При этом

$$F_s(u) = \int_1^u X_s^{-1}(\xi) Q_s^*(\xi) d\xi$$

Автомодельные решения полученной системы дифференциальных уравнений могут быть использованы для анализа характерных особенностей рассматриваемого явления, для оценки разогрева среды, скорости движения фронта плавления и т. п., а также в качестве тестов для проверки правильности различных приближенных и численных решений полной системы уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Саяхов Ф. Л., Фатыхов М. А., Кузнецов О. Л. Исследование электромагнитно-акустического воздействия на распределение температуры в нефтенасыщенной горной породе // Изв. вузов. Нефть и газ. 1981. № 3. С. 36—40.
2. Bridges J., Stresty G., Taflove A., Show R. Radio-frequency heating to recovery oil from Utan tar-sands // The future of heavy crude oils and tar-sands. N. Y.: McGraw-Hill Inc. 1980. P. 396—409.
3. Вахитов Г. Г., Симкин Э. М. Использование физических полей для извлечения нефти из пластов. М.: Недра. 1985. 230 с.
4. Айрапетян М. А., Слотин Н. И. Некоторые результаты по изучению  $\epsilon$  и  $\operatorname{tg} \delta$  для песков различной пористости при различной увлажненности и нефтенасыщенности // Тр. ин-та нефти АН КазССР. 1959. Т. 3. С. 125—132.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука. 1977. 664 с.
6. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра. 1984. 208 с.
7. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука. 1978. 336 с.
8. Веригин Н. Н., Хабибуллин И. Л., Халиков Г. А. Автомодельные решения некоторых задач тепло- и массопереноса в насыщенной пористой среде // Инж.-физ. журн. 1979. Т. 37. № 3. С. 497—502.
9. Зыонг Нгок Хай, Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И. К теории фильтрации жидкости в пористой среде при объемном нагреве высокочастотным электромагнитным полем // ПММ. 1987. Вып. 1. Т. 51. С. 29—46.
10. Веригин Н. Н., Хабибуллин И. Л., Халиков Г. А. Осесимметричная задача тепло- и массопереноса в насыщенной пористой среде // Инж.-физ. журн. 1980. Т. 38. № 5. С. 913—918.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.
12. Рубинштейн Л. И. Проблемы Стефана. Рига: Звайгзне. 1967. 457 с.

Москва

Поступила в редакцию  
12.II.1986