Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 6, 1987

УДК 532.529

ОБ ОСАЖДЕНИИ СУСПЕНЗИИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В ЦИЛИНДРЕ

Гуськов О. Б., Золотов А. В.

В приближении ползущего течения на основании метода, развитого в [1—3] [1], рассматривается задача об осаждении разбавленной монодисперсной суспензии твердых сферических частиц внутри бесконечно длинной цилиндрической трубы. Частицы имеют статистически однородное распределение в пространстве. Для безразмерной средней по ансамблю скорости частиц на оси цилиндра в предельном случае, когда его стенки удалены в бесконечность, с точностью до членов первого порядка по объемной концентрации c получена следующая формула:

$$v_p = 1 - 4{,}675\ c \tag{0.1}$$

(в качестве характерной принята стоксова скорость осаждения одиночной частицы в безграничной жидкости). Показано, что при формальном отличии полученного выражения от известного результата [4] для средней скорости осаждения безграничной суспензии

$$v_p = 1 - 6{,}55\ c \tag{0.2}$$

они, тем не менее, не противоречат одно другому.

При определении средней скорости (0.2) был использован так называемый метод перенормировки [4], позволяющий обойти известную проблему расходимости интегралов в процедуре усреднения. Однако указанный метод оставляет открытым вопрос о том, какая предельная физическая ситуация, реализуемая экспериментально, соответствует принятому в [4] понятию безграничной суспензии. Этот вопрос непосредственно связан с тем, что в экспериментах, которые, как правило, проводятся в вертикальных цилиндрических трубках, наблюдаемые значения скорости осаждения суспензии не соответствуют результату (0.2). Так, при соблюдении всех необходимых условий (сферичность частиц, монодисперсность, однородность суспензии и стоксовский режим осаждения) в экспериментальной зависимости скорости осаждения [5, 6], сходной с (0.2), коэффициент перед объемной концентрацией частиц лежит в пределах от —4,65 до —4,80.

Один из аспектов такого расхождения теории [4] и эксперимента вскрыт в работах [7, 8], где для вычисления средней скорости частиц суспензии был развит альтернативный подход, связанный с рассмотрением движения коллектива частиц в присутствии физических границ с последующей процедурой усреднения по ансамблю и устремления границ в бесконечность при постоянной объемной концентрации. В рамках такого подхода проблемы расходимости интегралов в процедуре усреднения не возникает. Кроме того, удается показать, что экспериментально наблюдаемые скорости частиц должны существенно зависеть от формы контейнера, в который заключена суспензия, даже в пределе бесконечной удаленности его стенок. В частности, было показано [8], что соотношение (0.2) должно соответствовать наблюдаемым в эксперименте значениям скоростей частиц в том случае, если суспензия осаждается на бесконечно удаленную плоскую стенку. Другая геометрия эксперимента должна давать иную зависимость скорости от концентрации.

Так, в задаче об осаждении суспензии твердых сфер внутри сферического контейнера в пределе, когда его радиус стремится к бесконечности, для средней скорости частиц v_p и жидкости v_f получены следующие формулы [8]: .

$$v_p = 1 - 3{,}55\ c, \quad v_f = 2\ c \tag{0.3}$$

---

[1] См. также: *Струминский В. В., Смирнов Л. П., Кульбицкий Ю. Н.* и др. Законы механики дисперсных сред и двухфазных систем в связи с проблемами повышения эффективности технологических процессов. Ч 1: Препринт № 1. М.: Сектор механики неоднородных сред АН СССР. 1979. 59 с.

Следует подчеркнуть, что результат (0.3) записан в лабораторной системе координат, связанной с неподвижным контейнером, т. е. в той системе, где проводятся непосредственные измерения в эксперименте. Если перейти в систему координат, движущуюся относительно контейнера со средней объемной скоростью

$$v_v = cv_p + (1 - c)\, v_f = 3\, c$$

то оказывается, что разность $v_p - v_v = 1 - 6{,}55\, c$. Такое же равенство имеет место [7] и в случае, когда суспензия осаждается на плоскую поверхность. Таким образом, в системе координат, где суммарный объемный расход частиц и жидкости равен нулю, независимо от геометрии контейнера для скорости частиц должно выполняться соотношение (0.2).

Ниже получен аналог формулы (0.3) для случая осаждения суспензии в вертикальной цилиндрической трубе.

1. Движение конечного числа частиц в цилиндре. Рассмотрим в приближении Стокса задачу о квазиустановившемся движении под действием силы тяжести N одинаковых твердых сфер радиуса a в вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной твердым цилиндрическим контейнером радиуса R^*. Пусть в некоторый момент времени частицы имеют скорости $\mathbf{U}_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, а их центры расположены в точках $\mathbf{r}_i^*$ внутри цилиндра (звездочкой обозначены размерные переменные). Рассмотрим случай свободного вращения частиц, когда на них не действуют моменты сил со стороны жидкости. Задача состоит в том, чтобы определить скорости частиц как функцию их взаимного расположения в пространстве.

Найдем приближенное решение поставленной задачи на основании метода [2]. В рамках данного метода предварительно необходимо определить гидродинамические поля, возникающие в отсутствие сфер под действием N точечных сил $\mathbf{F}_i^*$ и диполей $\mathbf{D}_i^* = {}^1/_6 a^2 \mathbf{F}_i^*$, приложенных к жидкости в точках $\mathbf{r}_i^*$. Поле скорости и давления в этом случае должно удовлетворять неоднородной системе уравнений [2] с граничными условиями (в безразмерном виде)

$$\Delta \mathbf{v} - \nabla p + \sum_{i=1}^{N} \{\mathbf{F}_j \delta(\mathbf{R}_i) - (\mathbf{D}_i \nabla) \nabla \delta(\mathbf{R}_i) + {}^1/_3 \mathbf{D}_i \Delta \delta(\mathbf{R}_i)\} = 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = {}^2/_3 \sum_{i-1}^{N} (\mathbf{D}_i \nabla)\, \delta(\mathbf{R}_i), \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{D}_i = {}^1/_6 \alpha^2 \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{v} \to 0, \quad z \to \pm\infty; \quad \mathbf{v} = 0, \quad \rho = R$$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}^*}{l}, \quad R = \frac{R^*}{l}, \quad p = \frac{p^* l}{\mu U}, \quad \mathbf{F}_i = \frac{\mathbf{F}_i^*}{\mu l U}, \quad \mathbf{D}_i = \frac{\mathbf{D}_i^*}{\mu l^3 U}$$

$$\mathbf{U}_i = \frac{\mathbf{U}_i^*}{U}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^*}{U}, \quad \alpha = \frac{a}{l}$$

Здесь $\delta(\mathbf{R}_i)$ — дельта-функция Дирака, ρ, φ, z — цилиндрические координаты с началом на оси трубы, μ — динамическая вязкость, l — характерное расстояние между частицами, U — стоксова скорость осаждения одиночной частицы в безграничной жидкости.

Общее решение системы (1.1) может быть записано в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i^W), \quad p = \sum_{i=1}^{N} (p_i + p_i^W) \tag{1.2}$$

где функции $\mathbf{u}_i$ и p_i — частное решение системы (1.1), представляющее собой сумму известных гидродинамических полей точечных сил $\mathbf{F}_i$ и диполей $\mathbf{D}_i$

$$(1.3)\qquad \mathbf{u}_i=\frac{1}{8\pi}\left[\frac{\mathbf{F}_i}{R_i}+\frac{(\mathbf{F}_i\mathbf{R}_i)\,\mathbf{R}_i}{R_i^3}\right]+\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{D}_i}{R_i^3}-\frac{3\,(\mathbf{D}_i\mathbf{R}_i)\,\mathbf{R}_i}{R_i^5}\right]$$

$$p_i=\frac{1}{4\pi}\frac{(\mathbf{F}_i\mathbf{R}_i)}{R_i^3},\quad \mathbf{D}_i={}^1/_6\alpha^2\mathbf{F}_i,\quad R_i=|\mathbf{R}_i|$$

Выражения для $\mathbf{u}_i^W$ и p_i^W при заданных граничных условиях (1.1) получены в [9].

После нахождения всех функций в (1.2) скорости частиц $\mathbf{U}_i$ определяются следующими равенствами [2]:

$$(1.4)\qquad 6\pi\alpha\mathbf{U}_i=\mathbf{F}_i+6\pi\alpha\,[\mathbf{U}_0]+\pi\alpha^3\,[\Delta\mathbf{U}_0]$$

$$\mathbf{U}_0=\sum_{j\neq i}^{N}\mathbf{u}_j+\sum_{j=1}^{N}\mathbf{u}_j^W$$

где вектор $\mathbf{F}_i$ совпадает с результирующей сил тяжести и Архимеда, действующих на частицу. Квадратные скобки в (1.4) означают, что соответствующие функции должны быть формально вычислены в центре i-й сферы.

Следует отметить, что метод [2] дает приближенное решение задачи. В рамках данного метода моделирование возмущений, вносимых частицами в поток, осуществляется при помощи гидродинамических полей только точечных сил и диполей. Для точного решения задачи необходим учет всех мультиполей более высокого порядка. Если, однако, иметь в виду результаты работы [4], то для дальнейших вычислений нет необходимости знать конкретный вид функций, описывающих гидродинамические поля мультиполей. В дальнейшем для их записи будем использовать условные обозначения.

Используя решение [9] для $\mathbf{u}_i^W$ и p_i^W, формулы (1.3), а также очевидное равенство $|\mathbf{F}_i|=F_{iz}=6\pi\alpha$, можно определить конкретный вид выражений для скоростей частиц $\mathbf{U}_i$ и жидкости $\mathbf{v}\,(\mathbf{r})$. В частном случае, когда соответственно $\mathbf{r}_i=0$ и $\mathbf{r}=0$, вертикальные компоненты скоростей будут иметь вид

$$(1.5)\qquad U_{iz}=1+\alpha\left[\sum_{j\neq i}^{N}u_j^F+\sum_{j=1}^{N}u_j^{WF}\right]+$$

$$+\alpha^3\left[2\sum_{j\neq i}^{N}u_j^D+\sum_{j=1}^{N}u_j^{WF}+\sum_{j=1}^{N}u_j^{WP}\right]+\Delta_i+\Delta_i^W$$

$$v_z\,(\mathbf{r}=0)=\alpha\left[\sum_{j\neq i}^{N}u_j^F+\sum_{j=1}^{N}u_j^{WF}\right]+\alpha^3\left[\sum_{j\neq i}^{N}u_j^D+\sum_{j=1}^{N}u_j^{WD}\right]+$$

$$+\Delta_f+\Delta_f^W$$

$$u_j^F={}^3/_4\left(\frac{1}{r_j}+\frac{z_j^2}{r_j^3}\right),\quad u_j^D={}^1/_4\left(\frac{1}{r_j^3}-\frac{3z_j^2}{r_j^5}\right)$$

$$u_j^{WF}=\frac{3}{2\pi R}\int_0^\infty Z_j^{(1)}\cos\left(\frac{\lambda z_j}{R}\right)d\lambda,\quad u_j^{WD}=\frac{1}{2\pi R^3}\int_0^\infty Z_j^{(2)}\cos\left(\frac{\lambda z_j}{R}\right)d\lambda$$

$$u_j^{WP}=\frac{1}{2\pi R^3}\int_0^\infty \lambda\Pi_j\cos\left(\frac{\lambda z_j}{R}\right)d\lambda,\quad Z_j^{(k)}=(\xi_j^{(k)}I_1-\nu_j^{(k)}I_2)/Q$$

$$\Pi_j=(\nu_j^{(1)}I_1-\xi_j^{(1)}I_0)/Q,\quad Q=I_1^2-I_0I_2,\quad I_n=I_n\,(\lambda)$$

$$\xi_j^{(1)}=\beta_jS_1K_1-\lambda S_0K_0,\quad \nu_j^{(1)}=\lambda S_0K_1-\beta_jS_1K_0-2S_0K_0$$

$$\xi_j^{(2)} = \lambda^2 S_0 K_1, \quad \nu_j^{(2)} = -\lambda^2 S_0 K_0, \quad \beta_j = \lambda\rho_j/R$$
$$S_n = I_n(\beta_j), \quad K_n = K_n(\lambda)$$

где $I_n(x)$ и $K_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя n-го порядка первого и второго рода; Δ_i и Δ_i^W — вклады собственных полей мультиполей и соответствующих им откликов от стенок в скорости частиц; Δ_f и Δ_f^W — соответствующие вклады в скорость жидкости.

2. Вычисление средней скорости осаждения. Рассмотрим задачу об осаждении коллектива твердых сфер в жидкости вдоль оси вертикальной трубки. Предположим, что частицы статистически равномерно распределены в жидкости внутри цилиндрического слоя высотой H, т. е. в объеме, границы которого определяются равенствами $\rho = R$, $z = \pm H/2$. В линейном приближении по объемной концентрации определим среднюю скорость частиц и жидкости в пределе, когда при постоянном значении c последовательно высота слоя, а затем радиус цилиндра стремятся к бесконечности. Как и в работах [7, 8], для определения указанных скоростей используем процедуру усреднения по различным конфигурациям частиц, причем средние значения скоростей будем вычислять в центре слоя

(2.1) $$v_p = \lim \langle U_{iz} \mid \mathbf{r}_i = 0\rangle$$

(2.2) $$v_f = \lim \langle v_z(\mathbf{r} = 0) \mid r_j > \alpha\rangle$$

Здесь $\lim$ означает описанный выше предельный переход, $\langle \ldots \mid \mathbf{r}_i = 0\rangle$ — среднее по тем возможным конфигурациям, для которых $\mathbf{r}_i = 0$. Аналогично, $\langle \ldots \mid r_j > \alpha\rangle$ — среднее по тем конфигурациям, для которых ни одна частица не покрывает начало координат. Если в задаче заранее ограничиться линейным приближением по объемной концентрации, то при условии однородности суспензии весовой функцией в процедуре усреднения (2.1), (2.2) будет числовая концентрация, равная единице при выбранных масштабах.

Подставляя (1.5) в (2.1), получим

(2.3) $$v_p = 1 + \lim\Big[\int_0^{2\pi} d\varphi_j \int_0^{\infty} \rho_j\,d\rho_j \int_{-\infty}^{\infty} dz_j \theta(R - \alpha - \rho_j) \times$$
$$\times\, \theta(H^2/4 - z_j^2)\,\theta(r_j - 2\alpha)\,\{\alpha(u_j^F + u_j^{WF}) +$$
$$+\, \alpha^3(2u_j^D + u_j^{WD} + u_j^{WP})\} + \langle \Delta_i \mid \mathbf{r}_i = 0\rangle + \langle \Delta_i^W \mid \mathbf{r}_i = 0\rangle\Big]$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция, равная единице при $x \geqslant 0$ и нулю при $x < 0$. В линейном приближении по концентрации при вычислении средних величин $\langle \Delta_i \mid \mathbf{r}_i = 0\rangle$ и $\langle \Delta_i^W \mid \mathbf{r}_i = 0\rangle$ в функциях Δ_i и Δ_i^W необходимо учесть лишь те члены, которые описывают парное взаимодействие частиц. Члены, описывающие взаимодействия более высокого порядка, будут вносить вклад только в коэффициенты при последующих степенях концентрации.

Величина $\lim \langle \Delta_i \mid \mathbf{r}_i = 0\rangle$ в приближении парности взаимодействия частиц вычислена в работе [4] и равна $-1{,}55\,c$. В том же приближении функции, входящие в Δ_i^W, имеют порядок $(\rho_i/R)^n/R^m$, где $n + m \geqslant 4$. Поэтому после усреднения Δ_i^W в пределе при $R \to \infty$ получится нуль. Проводя непосредственное вычисление оставшихся интегралов и пределов в (2.3) (при учете влияния стенок проблемы расходимости в процедуре усреднения (2.3) не возникает) и учитывая очевидное равенство $4\pi\alpha^3 = 3c$, можно получить окончательное выражение для средней скорости частиц (0.1).

Вычисление средней скорости жидкости в центре слоя (при $\mathbf{r} = 0$) проводится аналогичным образом. Подстановка (1.5) в (2.2) дает

$$(2.4)\qquad v_f = \lim\Big[\int_0^{2\pi} d\varphi_j \int_0^{\infty} \rho_j\, d\rho_j \int_{-\infty}^{\infty} dz_j \theta(R-\alpha-\rho_j) \times \times \theta(H^2/4 - z_j^2)\,\theta(r_j-\alpha)\,\{\alpha(u_j^F + u_j^{WF}) + \alpha^3(u_j^D + u_j^{WD})\} + + \langle\Delta_f(\mathbf{r}=0)\,|\,r_j > \alpha\rangle + \langle\Delta_f^W(\mathbf{r}=0)\,|\,r_j > \alpha\rangle\Big]$$

Для функции $\Delta_f{}^W$ справедливы те же оценки, что и для $\Delta_i{}^W$. Поэтому $\lim \langle\Delta_f{}^W(\mathbf{r} = 0) \mid r_j > \alpha\rangle = 0$. Нулевой вклад в скорость жидкости в линейном приближении по концентрации дает также функция Δ_f. Данное утверждение непосредственно следует из того факта, что функция, описывающая поле скорости при движении одиночной частицы в безграничной жидкости, не содержит членов порядка r_j^{-n} при $n \geqslant 4$ (двухчастичные взаимодействия дают вклад в скорость жидкости только в коэффициенты перед c^k при $k \geqslant 2$). Проводя непосредственные вычисления в (2.4), получим

$$(2.5)\qquad v_f = {}^7/_8\, c$$

Таким образом, для средних по ансамблю скоростей частиц и жидкости на оси цилиндра в предельном случае бесконечной удаленности его стенок справедливы формулы (0.1) и (2.5) соответственно.

Формально результат (0.1) совпадает с экспериментальными данными [5, 6]. Однако указанный факт не вносит полной ясности в проблему объяснения таких экспериментов. В опытах по осаждению суспензий в цилиндрических трубках обычно в течение длительного времени следят за движением границы раздела между суспензией и чистой жидкостью, причем характерной особенностью является устойчивость этой границы. Поэтому следующим этапом в объяснении подобных экспериментов может быть теоретическое исследование вопросов эволюции границы раздела и ее стабилизации.

Выражения (0.1) и (2.5) для скоростей частиц и жидкости получены в системе координат, связанной с неподвижными стенками цилиндра. Перейдем в систему координат, движущуюся относительно цилиндра со средней объемной скоростью $v_v = cv_p + (1 - c)\, v_f = {}^{15}/_8\, c$.

В этой системе выражение для скорости частиц, как и следовало ожидать, совпадает с результатом (0.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Струминский В. В., Гуськов О. Б., Кульбицкий Ю. Н.* Гидродинамика дисперсных и газожидкостных потоков // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1984. Т. 278. № 1. С. 65—68.
2. *Гуськов О. Б., Струминский В. В.* Динамика дисперсных потоков в присутствии границ // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1985. Т. 285. № 4. С. 832—835.
3. *Гуськов О. Б.* Теория гидродинамического взаимодействия жидких сферических капель в вязком потоке // Современные проблемы теплофизики. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР. 1984. С. 62—66.
4. *Batchelor G. K.* Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. No. 2. P. 245—268.
5. *Richardson J. F., Zaki W. N.* The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow // Chem. Eng. Sci. 1954. V. 3. No. 2. P. 65—73.
6. *Chong Y. S., Ratcowsky D. A., Epstein N.* Effect of particle shape on hindered settling in creeping flow // Powder Technol. 1979. V. 23. No. 1. P. 55—66.
7. *Beenakker C. W. J., Masur P.* On the Smoluchowski paradox in a sedimenting suspension // Phys. Fluids. 1985. V. 28. No. 3. P. 767—769.
8. *Beenakker C. W. J., Masur P.* Is sedimentation container-shape dependent? // Phys. Fluids. 1985. V. 28. No. 11. P. 3203—3206.
9. *Гуськов О. Б.* О взаимодействии частиц в вязкой жидкости в присутствии границ // Гидродинамические проблемы технологических процессов. М.: Наука. 1988. С. 74—80.

Москва

Поступила в редакцию
2.XII.1986