Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 6, 1987

УДК 533.6.011

ПРИНЦИП МАТЕРИАЛЬНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ОТ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Галкин В. С., Носик В. И.

Рассматривается задача о свободномолекулярном цилиндрическом течении Куэтта во вращающейся системе отсчета при различных температурах и одинаковых угловых скоростях стенок. Доказано, что в линейном по угловым скоростям приближении азимутальной тепловой поток пропорционален угловой скорости стенок в неподвижной системе отсчета. Тем самым построен пример течения газа, не удовлетворяющего принципу материальной независимости от системы отсчета (ПМН) аксиоматической теории механики сплошных сред, который, следовательно, не является универсальным принципом механики.

Согласно ПМН, тензор напряжений $\mathbf{P}$ и вектор теплового потока $\mathbf{q}$ должны быть инвариантными при евклидовых преобразованиях системы отсчета, например при переходе от инерциальной системы Σ к вращающейся относительно нее Σ^*-системе. В частности, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{q}$ в газе не должны явно зависеть от угловой скорости его вращения. ПМН представляет собой постулат о существовании более сильной симметрии, чем симметрия относительно преобразований Галилея, поэтому обоснование ПМН требует дополнительных соображений и предположений.

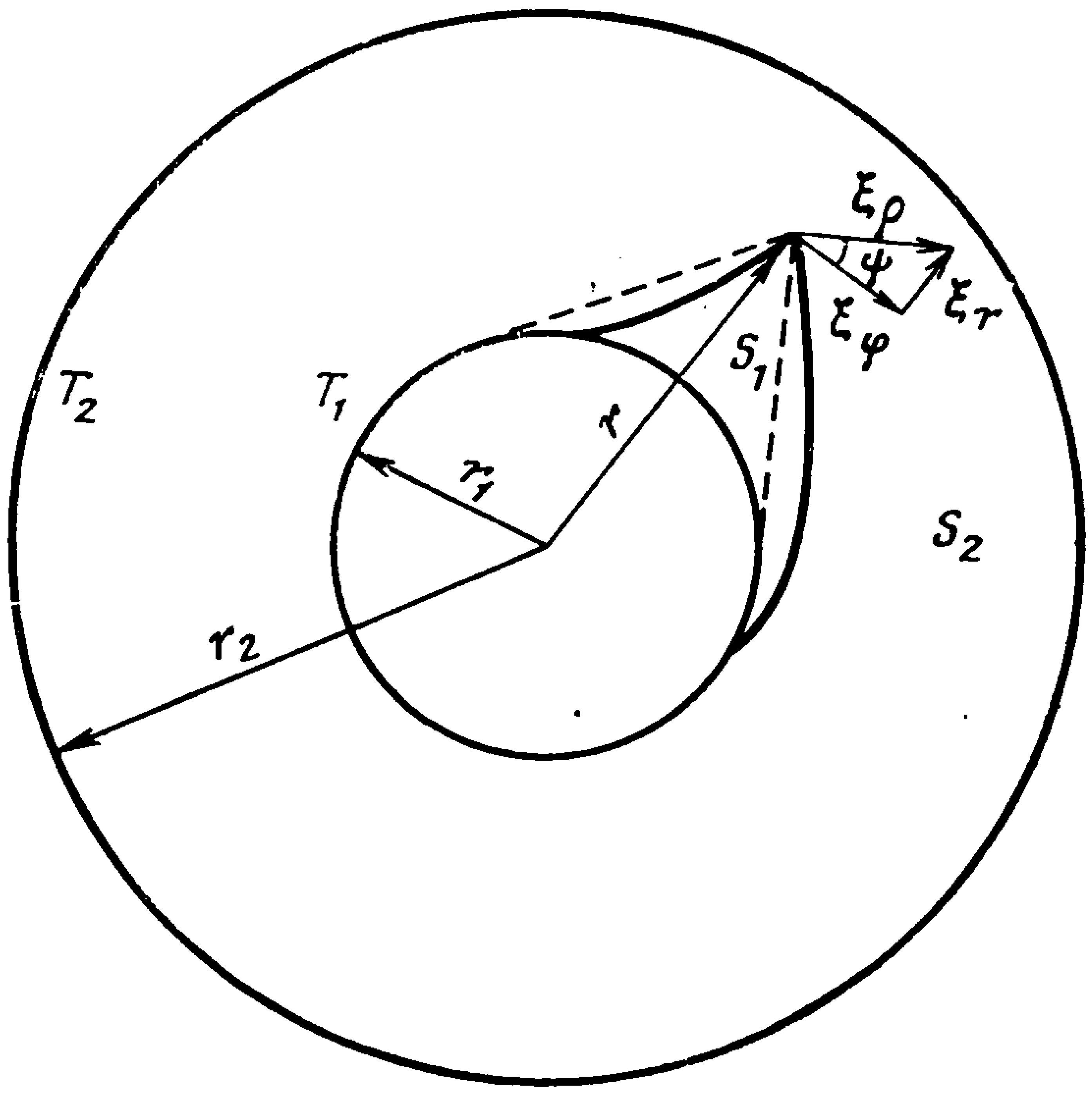
Этому постулату противоречат результаты кинетической теории газа, что вызвало длительную дискуссию в печати, критический обзор которой дан в [1] (см. также [2—4]). Именно, согласно приближению Барнетта, в Σ^*-системе $\mathbf{P}^*$ и $\mathbf{q}^*$ зависят не только от газодинамических переменных и их производных, как это должно быть в силу ПМН, но и от величины $\mathbf{\Omega}^* - \mathbf{W}^*$, равной тензору вращения газа $\mathbf{\Omega}$ в инерциальной системе отсчета. (Здесь [1, 5] $\mathbf{W}^*$ — тензор вращения (спин) системы Σ относительно Σ^*, так что $\mathbf{W}^*\mathbf{u}^* = -\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u}^*$, $\mathbf{u}$ — скорость газа, $\boldsymbol{\omega}_0$ — угловая скорость Σ^*-системы относительно Σ, звездочками сверху вводятся величины в Σ^*-системе, без звездочек — в Σ-системе [1].)

Рассматриваемое свойство $\mathbf{P}$, $\mathbf{q}$ справедливо для всех приближений метода Чепмена — Энскога, за исключением навье-стоксова приближения [1]. Величина $\mathbf{\Omega}^* - \mathbf{W}^*$ инвариантна относительно евклидовых преобразований, так как она равна $\mathbf{\Omega}$, поэтому с целью расширения области применимости ПМН и, вообще, термодинамики необратимых процессов предложено [6, 4] ввести в качестве одного из определяющих параметров тензор $\mathbf{W}^*$.

Однако изложенные результаты вызвали критику, в конечном итоге обусловленную недоверием к высшим (начиная с барнеттова) приближениям метода Чепмена — Энскога решения кинетического уравнения Больцмана (УБ) для числа Кнудсена $\mathrm{Kn} \to 0$. По мнению некоторых авторов [7, 8], для разрешения дискуссии необходимо получить решение краевой задачи для УБ в Σ^*-системе при $\mathrm{Kn} \neq 0$. Очевидно, что это трудная задача. Упрощение проблемы, однако, существует и следует из того, что эффекты неинвариантности обусловлены конвективными слагаемыми УБ, интеграл столкновений в УБ инвариантен к евклидовым преобразованиям. Поэтому действие этих эффектов должно иметь место и в свободномолекулярном режиме, т. е. в течениях газа при $\mathrm{Kn} \gg 1$, когда влиянием межмолекулярных столкновений и, следовательно, интегралом столкновений можно пренебречь. Результаты свободномолекулярной теории всесторонне подтверждены расчетами и экспериментом и качественно справедливы в широком интервале значений Kn [9, 10].

Ниже в качестве простейшего примера дается решение задачи о свободномолекулярном цилиндрическом течении Куэтта с различными температурами стенок. Выбор задачи обусловлен тем, что согласно приближению Барнетта в таком течении при $\mathrm{Kn} \ll 1$ существует азимутальный тепловой поток q_φ, величина которого определяется $\mathbf{\Omega}$. Вопрос существования такого q_φ был одним из основных в упомянутой выше дискуссии (см. [1, 5]). Доказывается, что q_φ существует при $\mathrm{Kn} \gg 1$ с теми же свойствами при евклидовых преобразованиях, что и в приближении Барнетта.

1. Рассмотрим плоское движение газа между двумя бесконечными круговыми соосными цилиндрическими поверхностями (фигура), вращающимися вокруг общей оси симметрии z с одинаковыми угловыми скоростями. Пусть r_1, r_2 — радиусы внутренней и внешней поверхностей, T_1, T_2 — их температуры. В неподвижной Σ-системе отсчета стенки вращаются с угловой скоростью ω, в неинерциальной Σ^*-системе — с угловой скоростью ω^*, так что



(1.1) $$\omega = \omega^* + \omega_0$$

где ω_0 — угловая скорость вращения Σ^*-системы относительно Σ.

Во вращающейся системе отсчета для свободномолекулярного режима УБ в цилиндрических координатах принимает вид [1, 9, 10]

(1.2) $$r\xi_r^* \frac{\partial f^*}{\partial r} + (\xi_\varphi^{*2} + 2\omega_0 r\xi_r^* + r^2\omega_0^2) \frac{\partial f^*}{\partial \xi_r^*} - \xi_\varphi^*(\xi_r^* + 2\omega_0 r) \frac{\partial f^*}{\partial \xi_\varphi^*} = 0$$

В (1.2) учтено, что в рассматриваемой задаче функция распределения f^* зависит от компонентов скоростей молекул ξ_r^*, ξ_φ^*, ξ_z^* и радиуса $r \in [r_1, r_2]$ и не зависит от z и полярного угла φ. Слагаемые, пропорциональные ω_0, обусловлены кориолисовым, ω_0^2 — осестремительным ускорениями.

При постановке граничных условий ограничимся рассмотрением обычно используемого диффузного закона отражения молекул от стенок, когда их скорости в системе отсчета, связанной с данным элементом поверхности, распределены по максвелловскому закону. Тогда на внутренней и внешней поверхностях функции распределения отраженных молекул

(1.3) $$f_{1,2}^{w} = n_{1,2}(h_{1,2}/\pi)^{3/2} \exp\{-h_{1,2}[\xi_z^{*2} + \xi_r^{*2} + (\xi_\varphi^* - \omega^* r_{1,2})^2]\}$$
$$h_{1,2} = m/(2kT_{1,2})$$

Здесь m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана; множители n_1, n_2 определяются из решения задачи.

Соотношение (1.2) является линейным уравнением в частных производных первого порядка. Решение уравнений его характеристик имеет вид

(1.4) $$\xi_\varphi^* r + \omega_0 r^2 = C_1, \quad \xi_p^{*2} - \omega_0^2 r^2 = C_2 \quad (\xi_p^* = \xi_r^* + \xi_\varphi^*)$$

В силу (1.4) общим решением уравнения (1.2) будет $f^* = f(\xi_z^*, C_1, C_2)$. Частное решение ищем в виде

$$f^* = f(\xi_z^{*2} + \xi_p^{*2} - \omega_0^2 r^2 - 2\omega_0 C_1 + C_3)$$

где C_3 — произвольная постоянная. Удовлетворяя граничным условиям (1.3), окончательно получаем решение задачи в виде «двустороннего» максвеллиана с областями влияния S_1, $S_2 = 2\pi - S_1$:

(1.5) $$f^* = f_1 \quad (\xi_p^* \in S_1), \quad f^* = f_2 \quad (\xi_p^* \in S_2)$$

(1.6) $$f_{1,2} = A_{1,2} \exp\{-h_{1,2}[\xi_z^{*2} + \xi_r^{*2} + (\xi_\varphi^* - \omega^* r)^2]\}$$
$$A_{1,2} = n_{1,2}(h_{1,2}/\pi)^{3/2} \exp[h_{1,2}\omega^2(r^2 - r_{1,2}^2)]$$

Выражения для A_1, A_2 записаны с учетом (1.1). В точку r молекулы со скоростями $\xi_p^* \in S_1$ попадают с поверхности внутреннего цилиндра, со скоростями $\xi_p^* \in S_2$ — внешнего.

Подчеркнем различие с решением задачи в неподвижной системе отсчета. В этом случае молекулы движутся по прямым линиям ($\xi_\varphi r = C_1$) с постоянной энергией, области влияния ограничены, естественно, также прямыми (штриховые линии на фигуре). Во вращающейся системе отсчета траектории молекул искривлены кориолисовой силой, кинетическая энергия $E^* \sim \xi^{*2}$ не сохраняется из-за действия поля центробежных сил [11]. Границы областей влияния находятся из задачи пересечения проходящих через точку r криволинейных траекторий с кругом $r = r_1$.

Решение (1.5), (1.6) описывает, в частности, вращение газа как твердого тела при постоянной температуре $T = T_1$. При этом функция распределения

$$(1.7) \qquad f^* = A_1 \exp(-h_1 c^{*2}), \quad \mathbf{c}^* = \boldsymbol{\xi}^* - \mathbf{i}_\varphi \omega^* r$$

является точным локально-максвелловским решением нелинейного УБ: на нем интеграл столкновений равен нулю, f^* удовлетворяет уравнению (1.2) [9]. Множитель A_1 определяется из нормировки задачи. Например, в системе отсчета, вращающейся вместе с цилиндрическим столбом газа конечных размеров ($\omega^* = 0$), A_1 выражается через геометрические параметры столба и среднюю плотность газа в нем [11].

Решение УБ в Σ-системе показывает, что здесь функция распределения молекул газа, вращающегося как твердое тело, дается той же формулой (1.7) с заменой c^* на c. Это объясняется объективностью скаляра f и инвариантностью собственных скоростей молекул $\mathbf{c}^* = \mathbf{c} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}$. Последнее свойство просто следует из преобразований скоростей:

$$\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{i}_\varphi \omega_0 r, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{i}_\varphi \omega_0 r$$

Таким образом, рассматриваемое локально-максвелловское решение УБ, записанное через собственные скорости, имеет одинаковый вид в Σ- и Σ^*-системах [3, 5]. При этом A_1 определяется величиной ω и не зависит отдельно от ω_0 или ω^*.

2. Для получения простых явных выражений для макропараметров в течении Куэтта при $T_1 \neq T_2$ ограничимся приближением малых угловых скоростей, пренебрегая величинами $O(h_1^{-1/2} r_1 \omega)$ по сравнению с единицей, в частности действием центробежных сил. Предполагается, что $\omega_0 = O(\omega)$, $r_2 - r_1 = O(r_1)$, $T_2 - T_1 = O(T_1)$. Линеаризуя (1.6), запишем результат в виде

$$(2.1) \qquad f_{1,2} = F_{1,2}(1 + \varepsilon_{1,2})$$

$$F_{1,2} = n_{1,2}(h_{1,2}/\pi)^{3/2} \exp(-h_{1,2}\xi^{*2}), \quad \varepsilon_{1,2} = 2h_{1,2}\xi_\varphi^* \omega^* r$$

Для того чтобы вычислить макропараметры в точке r, нужно знать границы областей влияния. Введем угол ψ^* соотношением $\xi_\varphi^* = \xi_p^* \cos\psi^*$. Так как вдоль трактории величина ξ_p^* сохраняется, достаточно установить пределы интегрирования по $\psi^* \in [\psi_1^*, \psi_2^*]$ для $\xi_p^* \in S_1$ и $\psi^* \in [\psi_2^*, \psi_3^*]$ для $\xi_p^* \in S_2$ в точке r. Обозначим ψ_ρ текущее (вдоль траектории) значение этого угла. Из (1.4) следует

$$(2.2) \qquad \cos\psi_\rho = (r/r_1)\cos\psi^* + (\omega_0/\xi_p^*)(r^2 - r_1^2), \quad \xi_p^* = \text{const}$$

Формула (2.2) описывает изменение ψ_ρ под действием кориолисовой силы вдоль траектории, проходящей через точку r и пересекающей круг

$r = r_1$. Решение задачи пересечения существует при $|\cos\psi_\rho| \leqslant 1$. Рассматривая отдельно случаи положительных и отрицательных значений $\cos\psi_\rho$, из (2.2) находим

$$\psi_1^* = \alpha + \beta, \quad \psi_2^* = \pi - \alpha + \beta, \quad \psi_3^* = 2\pi + \alpha + \beta \tag{2.3}$$
$$\alpha = \arccos(r_1/r), \quad \beta = \omega_0 \sqrt{r^2 - r_1^2}/\xi_p^*$$

При получении (2.3) применена линеаризация по ω_0 соответствующих общих выражений относительно значений

$$\psi_i = \psi_i^*|_{\omega_0=0}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.4}$$

справедливых для неподвижной системы отсчета [10].

Перейдем теперь к вычислению азимутального (тангенциального) теплового потока q_φ. В силу объективности f и инвариантности $\mathbf{c}$ в Σ^*-системе он дается формулой того же вида, что и в Σ-системе [1, 5]

$$q_\varphi^* = \frac{m}{2} \int\limits_{S_1+S_2} c_\varphi^* c^{*2} f^* \, d\xi^* \tag{2.5}$$

В силу (2.5) нужно сначала вычислить среднюю скорость газа u_φ^*, через которую определяется c_φ^* ($u_r^* \equiv 0$). С учетом (2.1), (2.3), (2.4) имеем

$$nu_\varphi^* = \int\limits_{S_1+S_2} \xi_\varphi^* f^* d\xi^* \approx \tag{2.6}$$
$$\approx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \left(\int\limits_{\psi_1^*}^{\psi_2^*} F_1 + \int\limits_{\psi_2^*}^{\psi_3^*} F_2 + \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} \varepsilon_1 F_1 + \int\limits_{\psi_2}^{\psi_3} \varepsilon_2 F_2 \right) \xi_p^{*2} \cos\psi^* \, d\psi^* \, d\xi_p^* \, d\xi_z^*$$

Проведя выкладки, убеждаемся, что последнее выражение порядка угловой скорости ω. Поэтому, опуская внепорядковые члены, подставим в (2.6) формулу для числовой плотности n, описывающую распределение последней в задаче о теплообмене между неподвижными стенками, когда

$$n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \left(\int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} F_1 + \int\limits_{\psi_2}^{\psi_3} F_2 \right) d\psi \xi_p^* \, d\xi_p^* \, d\xi_z^* \tag{2.7}$$

По этой же причине можно использовать здесь и ниже связь $n_1/n_2 = \theta$, $\theta = (T_1/T_2)^{1/2}$ — следствие условия непротекания на неподвижном внутреннем цилиндре. Из (2.7) имеем

$$n = n_1/(2\pi\gamma), \quad \gamma^{-1} = \pi - 2\alpha + (\pi + 2\alpha)\theta \tag{2.8}$$

Здесь n_1 выражается через θ, r_1/r_2 и среднюю по области, занятой газом, плотность [10]. После этого с учетом (1.1) получаем

$$u_\varphi^* = u_\varphi - r\omega_0, \quad u_\varphi = r\omega\,[1 + \gamma(\theta - 1)\sin 2\alpha] \tag{2.9}$$

Газ вращается как твердое тело тогда, когда температуры стенок одинаковы ($\theta = 1$).

Аналогично (2.6) вычисляется q_φ^* с тем отличием, что в подынтегральные выражения (2.5) вместо линеаризованных $f_{1,2}$ нужно подставить линеаризованные относительно $\xi_\varphi^* \xi^{*2} F_{1,2}$ произведения $c_\varphi^* c^{*2} f_{1,2}$. В итоге будем иметь

$$q_\varphi^* = \omega r n k (T_1 T_2)^{1/2} \gamma^2 (1 - \theta) B \sin 2\alpha \tag{2.10}$$
$$B = 4\pi(1 + \theta) + (1 - \theta)(2\alpha + \sin 2\alpha), \quad \theta = (T_1/T_2)^{1/2}$$

Здесь n, γ, α определяются формулами (2.8), (2.3). Аналогичные выкладки для неподвижной системы отсчета дают тот же результат.

3. Таким образом, в цилиндрическом течении Куэтта при $T_1 \neq T_2$ имеет место азимутальный тепловой поток (2.10), пропорциональный угловой скорости ω стенок относительно неподвижной системы отсчета как во вращающейся, так и в инерциальной системах отсчета.

Вопреки ПМН, во всех системах отсчета q_φ определяется угловой скоростью ω вращения стенок относительно неподвижной системы отсчета и не зависит отдельно от их угловой скорости ω^* относительно вращающейся системы отсчета. Иначе говоря, $q_\varphi{}^*$ определяется инвариантным выражением $\omega^* + \omega_0 = \omega$, или компонентами тензора $\mathbf{\Omega}^* - \mathbf{W}^* = \mathbf{\Omega}$, очевидным образом зависящими от ω^*, $-\omega_0$, ω соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галкин В. С., Носик В. И.* Кинетическая теория и принцип материальной независимости от системы отсчета в механике сплошных сред // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 563—571.
2. *Woods L. C.* Frame-indifferent kinetic theory // J. Fluid Mech. 1983. V. 136. P. 423—433.
3. *Band W.* Effects of rotation on radial heat flow in a gas // Phys. Rev. A: Gen. Phys. 1984. V. 29. No. 4. P. 2139—2144.
4. *Heckl M., Müller I.* Frame dependence, entropy, entropy flux, and wave speeds in mixtures of gases // Acta Mech. 1983. V. 50. No. 1—2. P. 71—95.
5. *Müller I.* On the frame dependence of stress and heat flux. // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1972. V. 45. No. 4. P. 241—250.
6. *Murdoch A. I.* On material frame-indifference, intrinsic spin, and certain constitutive relations motivated by the kinetic theory of gases // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1983. V. 83. No. 2. P. 185—194.
7. *Truesdell C.* Correction of two errors in the kinetic theory of gases which have been used to cast unfounded doubt upon the principle of material frame-indifference // Meccanica. 1976. V. 11. No. 4. P. 196—199.
8. *Wang C. C.* On the concept of frame-indifference in continuum mechanics and in the kinetic theory of dases // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1975. V. 58. No. 4. P. 381—393.
9. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука. 1967. 440 с.
10. *Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А.* Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение. 1977. 184 с.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука. 1976. 584 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.IV.1986