Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 6, 1987

УДК 533.6.011

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ СКОРОСТИ ОТ КООРДИНАТЫ

Бурдэ Г. И.

Исследуется устойчивость нового решения уравнений одномерной газовой динамики, являющегося обобщением решений Л. И. Седова [1, 2] на случай вязкого теплопроводного совершенного газа со степенной зависимостью коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры. Линеаризованные уравнения для малых возмущений (в уравнениях для возмущений эффекты теплопроводности не учитываются), содержащие в коэффициентах функции времени и радиальной координаты, допускают решения с разделяющимися переменными. Из анализа временных частей решений определяются условия возникновения неустойчивости.

Устойчивость решений [1] рассматривалась в [3—5].

1. Будем исследовать устойчивость движений вязкого теплопроводного газа с распределением скорости вида

$$v_i^\circ = \frac{dR}{dt}\frac{x_i}{R} \tag{1.1}$$

(x_i — декартовы координаты, $R\ (t)$ — масштабный фактор).

Уравнения движения после замены переменных $(x_i, t) \to (y_i, t)$, где $y_i = x_i/R\ (t)$ — лагранжевы переменные, представляются в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{R}\left(v_k - \frac{dR}{dt}y_k\right)\frac{\partial\rho}{\partial y_k} + \frac{\rho}{R}\frac{\partial v_k}{\partial y_k} = 0 \\
\rho\left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{R}\left(v_k - \frac{dR}{dt}y_k\right)\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\right] = \\
= -\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial y_i} + \frac{1}{R^2}\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_k}{\partial y_k}\right] + \frac{\partial}{\partial y_k}(2\mu e_{ik})\right\} \\
\rho\left[\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{R}\left(v_k - \frac{dR}{dt}y_k\right)\frac{\partial E}{\partial y_k}\right] = \frac{\gamma}{R^2}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\chi\frac{\partial E}{\partial y_k}\right) - \\
- \frac{p}{R}\frac{\partial v_k}{\partial y_k} + \frac{1}{R^2}\left[\left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_k}\right)^2 + 2\mu e_{ik}e_{ik}\right] \\
p = (\gamma - 1)\rho E, \quad e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right) \\
\lambda = a_1E^n, \quad \mu = a_2E^n, \quad \chi = a_3E^n\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь λ — коэффициент объемной вязкости, μ — коэффициент сдвиговой вязкости, $\chi = \varkappa/c_p$, где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, E — внутренняя энергия единицы массы; остальные обозначения обычные. Индексы i, k пробегают значения $1, \ldots, \nu$, где величина ν указывает вид симметрии задачи ($\nu = 1, 2, 3$).

Решение уравнений (1.2) для движений с распределением скорости (1.1) имеет вид

$$\begin{gathered}\rho^\circ = CR^{-\nu}\xi^{2\eta-2}, \quad E^\circ = U\ (t)\ \xi^2, \quad \xi = (y_ky_k)^{1/2} \\
\frac{dV}{dt} = 2nS, \quad \frac{dU}{dt} = \nu VS + \frac{2\gamma a_3}{C}(2n + \nu)R^{\nu-2}U^{n+1} \\
V = \frac{dR}{dt},\ S = \frac{\nu A}{C}R^{\nu-2}U^nV - (\gamma - 1)\frac{U}{R}\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$A = a_1 - \frac{2a_2}{3} + \frac{2a_2}{\nu} \tag{1.4}$$

Из уравнений для V и U следует, что при сжатии газа ($V < 0$) величины $|V|$ и U монотонно растут, а при расширении газа ($V > 0$) эти величины в зависимости от начальных условий могут как увеличиваться, так и уменьшаться — в последнем случае происходит смена знака V.

Следует заметить, что при некоторых выделенных значениях параметров в системе (1.2) (например, $n = 0$, $n = 1$) можно указать решения, отличные от (1.3). В данной работе исследуется устойчивость только решения (1.3), справедливого при любых значениях параметров.

Для исследования устойчивости наложим на решение (1.1), (1.3) малые возмущения

$$v_i = \frac{dR}{dt} y_i + u_i, \quad \rho = \rho^\circ (1 + \Theta), \quad E = E^\circ (1 + \varepsilon)$$

Пренебрегая в уравнениях для возмущений и в уравнении для U (1.3) эффектами теплопроводности ($a_3 = 0$), получим из (1.2) после линеаризации по возмущениям, свертки уравнения движения с операторами y_i и $\partial / \partial y_i$ и ряда преобразований следующую систему уравнений:

$$(1.5) \qquad R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -(2n - 2) H - G$$

$$R^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -2H - (\gamma - 1) G + \frac{A\nu}{C} V U^{n-1} R^{\nu-1} [\nu V R (n\varepsilon - \Theta - \varepsilon) + 2G]$$

$$(1.6) \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -(\gamma - 1) U \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} + 2n\varepsilon \right) + \frac{1}{C} R^{\nu-2} U^n \left\{ a_1 \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} + 2nG \right) + a_2 \left[\frac{1}{3} \frac{\partial G}{\partial \eta} - \left(\frac{4}{3} n + 2 \right) G + \Delta_\eta H + (4n + 4) \frac{\partial H}{\partial \eta} + (4n + 2\nu) H \right] + A \left[n\nu V R \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} + 2n\varepsilon - 2\Theta \right) \right] \right\}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -(\gamma - 1) U \left[\Delta_\eta \Theta + 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \Delta_\eta \varepsilon + (2n + 2) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} + 2n\nu\varepsilon \right] + \frac{1}{C} R^{\nu-2} U^n \left\{ a_1 \left[\Delta_\eta G + 2(n + 1) \frac{\partial G}{\partial \eta} \right] + a_2 \left[\frac{4}{3} \Delta_\eta G + \frac{2}{3} (n + 1) \frac{\partial G}{\partial \eta} - 4(n + 1) G + 2(n + 1) \left(\Delta_\eta H + 4 \frac{\partial H}{\partial \eta} + 2\nu H \right) \right] + A \cdot 2n\nu G + An\nu V R \left[\Delta_\eta \varepsilon + 2(n + 1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} + 2n\nu\varepsilon - 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} - 2\nu\Theta \right] \right\}$$

$$(1.7) \qquad H = \frac{u_k y_k}{\xi^2} R, \quad G = \frac{\partial u_k}{\partial y_k} R, \quad \eta = \ln \xi$$

$$\Delta_\eta = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + (\nu - 2) \frac{\partial}{\partial \eta} + \Delta_1$$

Здесь Δ_1 означает угловую часть оператора Лапласа.

2. Рассмотрим сначала решения системы (1.5), (1.6) для случая одномерных возмущений: $u = u_r(\xi, t)$, $\Theta = \Theta(\xi, t)$, $\varepsilon = \varepsilon(\xi, t)$. Вследствие соотношений $G = \partial H / \partial \eta + \nu H$ и $\Delta_1 = 0$ два уравнения (1.6) оказываются эквивалентными. Система (1.5), (1.6) сводится к одному уравнению для величины H, допускающему разделение переменных

$$(2.1) \qquad H = \sum_k H^{(k)}(t) f^{(k)}(\xi); \quad \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + 2n \right) \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \nu \right) f^{(k)} = -k^2 f^{(k)}$$

$$f^{(k)} = \xi^{-(n+\nu/2)} \sin (b^{(k)} \ln \xi + \delta^{(k)}), \quad b^{(k)} = \left[k^2 - \left(n - \frac{\nu}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Постоянные $b^{(k)}$, $\delta^{(k)}$ определяются из граничных условий. Например, для газа, ограниченного твердыми поверхностями при $r = R(t)$ и $r = \xi_* R(t)$, из условия $u_r = 0$ при $\xi = 1$ и $\xi = \xi_*$ получим

$$\delta^{(k)} = 0, \quad b^{(k)} = \frac{\pi m}{\ln \xi_*}; \quad k^2 = \left(n - \frac{\nu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{\ln \xi_*}\right)^2$$

Уравнения, определяющие $H^{(k)}(t)$, в целях простоты выкладок рассмотрим для частного случая одноатомного газа и сферической симметрии ($\gamma = {}^5/_3$, $a_1 = 0$, $\nu = 3$). Тогда из (1.4) следует $A = 0$, а выражения для U, V и уравнения для $H^{(k)}$ представляются в виде (Q_1 и Q_2 — постоянные)

$$U = Q_1 R^{-2}, \quad V = \pm\left(\frac{4}{3} n Q_1 R^{-2} + Q_2\right)^{1/2}$$

$$R^2 \frac{d}{dt} R^2 \frac{dH^{(k)}}{dt} + \frac{a_2 Q_1^n}{C}\left(\frac{4}{3}k^2 + 8n\right) R^2 \frac{d}{dt}(R^{3-2n} H^{(k)}) +$$

$$+ Q_1\left(\frac{10}{9}k^2 + \frac{4}{3}n\right) H^{(k)} = 0$$

Далее, преобразуя это уравнение, для определенности будем рассматривать возмущения, развивающиеся на стадии сжатия газа в основном движении ($V < 0$); переход к случаю расширения в конечных формулах не вызывает затруднений.

Используя новую независимую переменную τ, монотонно растущую со временем в любом режиме сжатия, получим

$$\frac{d^2 H^{(k)}}{d\tau^2} + Bg(\tau)\frac{dH^{(k)}}{d\tau} + [\omega^2 + Bg'(\tau)] H^{(k)} = 0 \tag{2.2}$$

$$\omega^2 = \frac{5k^2}{6n} + 1, \quad B = \begin{cases} a_2 Q_1 |Q_2|^{n-3/2}/C, & Q_2 \neq 0 \\ a_2 Q_1^{n-1/2}/(C R_0^{2n-3}), & Q_2 = 0 \end{cases}$$

$$g(\tau) = \left(\frac{4}{3}n\right)^{2-n}\left(\frac{k^2}{n} + 6\right) b^{2n-3}(\tau)$$

$$Q_2 > 0, \quad \tau = \operatorname{arch}(\sqrt{{}^4/_3 n Q_1/Q_2} R^{-1}), \quad b(\tau) = \operatorname{sh}\tau$$

$$Q_2 < 0, \quad \tau = \operatorname{arch}(\sqrt{{}^4/_3 n Q_1/|Q_2|} R^{-1}), \quad b(\tau) = \operatorname{ch}\tau$$

$$Q_2 = 0, \quad \tau = \ln(\sqrt{{}^4/_3 n} R_0 R^{-1}), \quad b(\tau) = e^\tau$$

(R_0 — постоянная, равная значению R в момент $t = 0$).

В случае $n = 0$ уравнение (2.2) имеет тот же вид, а остальные формулы заменяются на следующие:

$$\omega^2 = {}^5/_6 k^2, \quad B = a_2 Q_1 Q_2^{-3/2}/C$$

$$g(\tau) = ({}^4/_3)^2 k^2 b^{-3}(\tau), \quad \tau = \sqrt{{}^4/_3 Q_1/Q_2} R^{-1}, \; b(\tau) = \tau$$

Исследуем характер решений уравнения (2.2). Для адиабатических движений ($B = 0$) решение имеет вид $H^{(k)} = \sin(\omega\tau + \varphi_0)$. Поскольку радиальная компонента возмущения скорости связана с величиной H соотношением $u_r = \xi H R^{-1}$ (см. (1.7)), для временной части возмущения скорости $u^{(k)}$ получаем

$$u^{(k)} = R^{-1} H^{(k)} = M \sin\varphi; \quad M = M_0 b(\tau), \; \varphi = \omega\tau + \varphi_0$$

Из этого выражения следует, что при адиабатическом сжатии газа возмущения скорости колебательно нарастают со временем.

Характер решений уравнения (2.2) при $B \neq 0$ можно представить рассматривая возмущения с большими k и малые значения параметра $B \sim 1/k^2$, так что $\omega \gg 1$, $Bg \sim 1$. Применяя метод усреднения [6] до второго приближения, получим, что амплитуда и фаза основной гармоники определяются выражениями

$$
(2.3) \qquad M = M_0 b(\tau) \exp\left(-\frac{B}{2}\int_{\tau_0}^{\tau} g(\tau)\, d\tau\right)
$$

$$
\varphi = \omega\left\{\tau + \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{B}{2} g(\tau) - \frac{B^2}{8}\int_{\tau_0}^{\tau} g^2(\tau)\, d\tau\right]\right\} + \varphi_0
$$

Решение (2.3) соответствует колебаниям, нарастающим при условии $dM/dt > 0$. Это соотношение с учетом определения τ в (2.2) представляется в виде

$$
(2.4) \qquad \left(\frac{4}{3} nQ_1 + Q_2R^2\right)^{1/2} - \frac{2}{3} k^2 \frac{a_2 Q_1^n}{C} R^{-(2n-3)} > 0
$$

Отсюда видно, что в начальный момент возможность нарастания возмущений определяется соотношением между волновым числом возмущения k, вязкостью газа a_2 и постоянными C, Q_1, Q_2, R_0, задающими величины плотности, энергии и режим сжатия. Изменение свойств устойчивости при дальнейшем сжатии зависит, в первую очередь, от величины показателя n в законе изменения вязкости с температурой.

При $n \geqslant {}^3/_2$ движение, устойчивое в начальный момент времен (при $t = 0$ левая часть (2.4) отрицательна для любых k), остается устойчивым и в дальнейшем.

При $n < {}^3/_2$ сжатие газа приводит к возникновению неустойчивости независимо от начальных условий, поскольку левая часть (2.4) становится положительной при любых k.

Для рассмотрения поведения возмущений на стадиях, соответствующих расширению газа в основном движении ($V > 0$), следует учесть, что в этом случае при переходе к уравнению (2.2) $R^2 d/dt = -\sqrt{{}^4/_3 Q_1}\, d/d\tau$, т. е. знак перед B меняется на противоположный. Соответственно, изменяя знак перед B в (2.3) и учитывая при переходе к (2.4), что $d\tau/dt < 0$, можно сделать вывод о затухании возмущений скорости на фоне расширения газа при любых k и любых значениях параметров задачи.

Следует заметить, что сделанные выводы остаются в силе, пока изменение возмущений со временем происходит, как и в адиабатическом случае, колебательным образом. Отрицательная добавка, присутствующая в выражении для частоты $d\varphi/dt$, указывает на то, что в начальный момент зависимость возмущений от времени имеет характер колебаний лишь при не слишком больших B. При $n < {}^3/_2$ величина добавки уменьшается со временем, т. е. при достаточном сжатии зависимость $u^{(k)}(t)$ в этом случае колебательная. При $n > {}^3/_2$ добавка растет, т. е. при больших степенях сжатия зависимость возмущений от времени будет монотонной. При $n = {}^3/_2$ величина добавки постоянна.

Справедливость выводов, сделанных на основе приближенных выражений (2.3), может быть подтверждена точными решениями уравнений для $H^{(k)}$, существующими при отдельных значениях параметров.

При $n = {}^3/_2$ (2.2) превращается в уравнение с постоянными коэффициентами, и его решение дает выражение для амплитуды колебаний, совпадающее с (2.3). Выражение для частоты после разложения в ряд по $1/\omega^2$ также совпадает с величиной $d\varphi/dt$, определенной из (2.3). Из того же выражения видно, что колебательный характер временной зависимости сохраняется, если $Bg < 2\omega$.

Для $Bg > 2\omega$, вычисляя величину $u^{(k)} = R^{-1}H^{(k)}$ при достаточно больших τ, когда $R^{-1} \sim e^{\tau}$ (см. (2.2)), можно видеть, что возмущения скорости монотонно нарастают при условии $1 - Bg/2 + \sqrt{(Bg)^2/4 - \omega^2} > 0$, или $Bg > \omega^2 + 1$. Таким образом, при $n = {}^3/_2$ увеличение вязкости является стабилизирующим фактором в области $Bg < 2\omega$ (колебательные моды) и дестабилизирующим в области $Bg > 2\omega$, когда колебательные моды превращаются в монотонные.

При $Q_2 = 0$ (2.2) преобразуется в вырожденное гипергеометрическое уравнение, решение которого имеет вид [7]

$$w = c_1\Phi(\sigma, 2\sigma + 1, z) + c_2\Psi(\sigma, 2\sigma + 1, z), \quad n > {}^3/_2$$

$$w = e^z[c_1\Phi(\sigma + 1, 2\sigma + 1, -z) + c_2\Psi(\sigma + 1, 2\sigma + 1, -z)],$$

$$n < {}^3/_2$$

$$w(z) = z^{-\sigma}e^zH^{(k)}, \quad z = \frac{Bg(\tau)}{2n - 3}, \quad \sigma = i\frac{\omega}{2n - 3}$$

Используем асимптотические представления для Φ и Ψ [8], соответствующие большим степеням сжатия: $z \to \infty$ $(n > {}^3/_2)$, $\Phi(\alpha, \beta, z) \sim e^z z^{\alpha-\beta}$, $\Psi(\alpha, \beta, z) \sim z^{-\alpha}$; $z \to 0$ $(n < {}^3/_2)$, $\Phi(\alpha, \beta, z) \to 1$, $\Psi(\alpha, \beta, z) \sim z^{1-\beta}$.

С учетом определений переменных w и z и соотношения $u^{(k)} = R^{-1}H^{(k)}$ получим для временной части возмущения скорости

$$u^{(k)} = c_1'\zeta^{4-2n} + c_2'\zeta \exp\left[-B\frac{\sqrt{{}^4/_3 n}}{2n - 3}\left(\frac{k^2}{n} + 6\right)\zeta^{2n-3}\right], \quad n > \frac{3}{2}$$

$$u^{(k)} = M_0\zeta\sin(\omega\ln\zeta + \varphi_0), \quad n < \frac{3}{2}; \quad \zeta = \frac{R_0}{R}$$

(c_1' и c_2' — постоянные).

Из первого выражения видно, что в случае $n > {}^3/_2$ колебательный характер временной зависимости возмущений сменяется монотонным при достаточном сжатии газа. Из второго выражения следует, что в случае $n < {}^3/_2$ сжатие приводит к колебательному нарастанию возмущений скорости с любыми k при любых значениях параметров. Таким образом, справедливость выводов, сделанных на основе приближенных выражений (2.3), не ограничивается областью больших k и малых B.

Приведенный выше анализ временных частей возмущений относился к случаю одноатомного газа и сферической симметрии. В других случаях пороговое значение n отлично от ${}^3/_2$.

Рассмотрим кратко изменения в характере зависимости $u^{(k)}(t)$, обусловленные неодномерностью возмущений. Ограничиваясь случаем одноатомного газа и сферической симметрии и рассматривая для простоты только значение $n = {}^3/_2$, сведем систему (1.5), (1.6) к одному уравнению для величины H. Это уравнение допускает решения с разделяющимися переменными

$$H = \sum_k H^{(k)}(t) f^{(k)}(\xi) Y_l(\vartheta, \varphi)$$

где $Y_l(\vartheta, \varphi)$ — сферические гармоники, а функции $f^{(k)}(\xi)$ определены в (2.1).

Уравнения для $H^{(k)}$ имеют вид

$$\frac{d^4H^{(k)}}{d\tau^4} + \frac{B}{\sqrt{2}}(q_1 + q_2)\frac{d^3H^{(k)}}{d\tau^3} +$$

$$+ \left\{\frac{q_3}{3} + \frac{B^2}{2}\left[q_1q_2 - \frac{70}{3}l(l + 1)\right]\right\}\frac{d^2H^{(k)}}{d\tau^2} +$$

$$+ \frac{B}{3\sqrt{2}}\left[q_3q_2 - \frac{62}{3}l(l + 1)\right]\frac{dH^{(k)}}{d\tau} - \frac{4}{9}l(l + 1)H^{(k)} = 0$$

$$q_1 = {}^4/_3 h^2 + 12, \quad q_2 = h^2 + 7, \quad q_3 = {}^5/_3 h^2 + 3; \quad h^2 = k^2 + l(l+1)$$

где τ и B определены в (2.2).

Из анализа характеристического уравнения видно, прежде всего, что для неодномерных возмущений появляется пара вещественных корней, соответствующих при достаточно малых B монотонным модам неустойчивости.

Влияние неодномерности возмущений на колебательные моды заключается в изменении частоты колебаний и величины декремента в множителе, описывающем вязкое затухание. Для наиболее опасных нижних уровней спектра возмущений (небольших k) меньшие значения декремента соответствуют одномерным возмущениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Об интегрировании уравнений одномерного движения газа // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1953. Т. 90. № 5. С. 735.
2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. 1981. 447 с.
3. *Сибгатуллин Н. Р.* Об устойчивости однородных нелинейных пульсаций гравитирующих газовых шаров // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 4. С. 14—20.
4. *Book D. L.* Convective instability of self-similar spherical expansion into a vacuum // J. Fluid Mech. 1979. V. 95. Pt 4. P. 779—786.
5. *Бурдэ Г. И.* Устойчивость некоторых одномерных неустановившихся движений газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 120—127.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 503 с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука. 1973. 294 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука. 1979. 830 с.

Пермь

Поступила в редакцию
2.II.1987