

УДК 533.6.011

ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ, ОБТЕКАЕМЫЕ С МАКСИМАЛЬНЫМ КРИТИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ МАХА

Крайко А. Н.

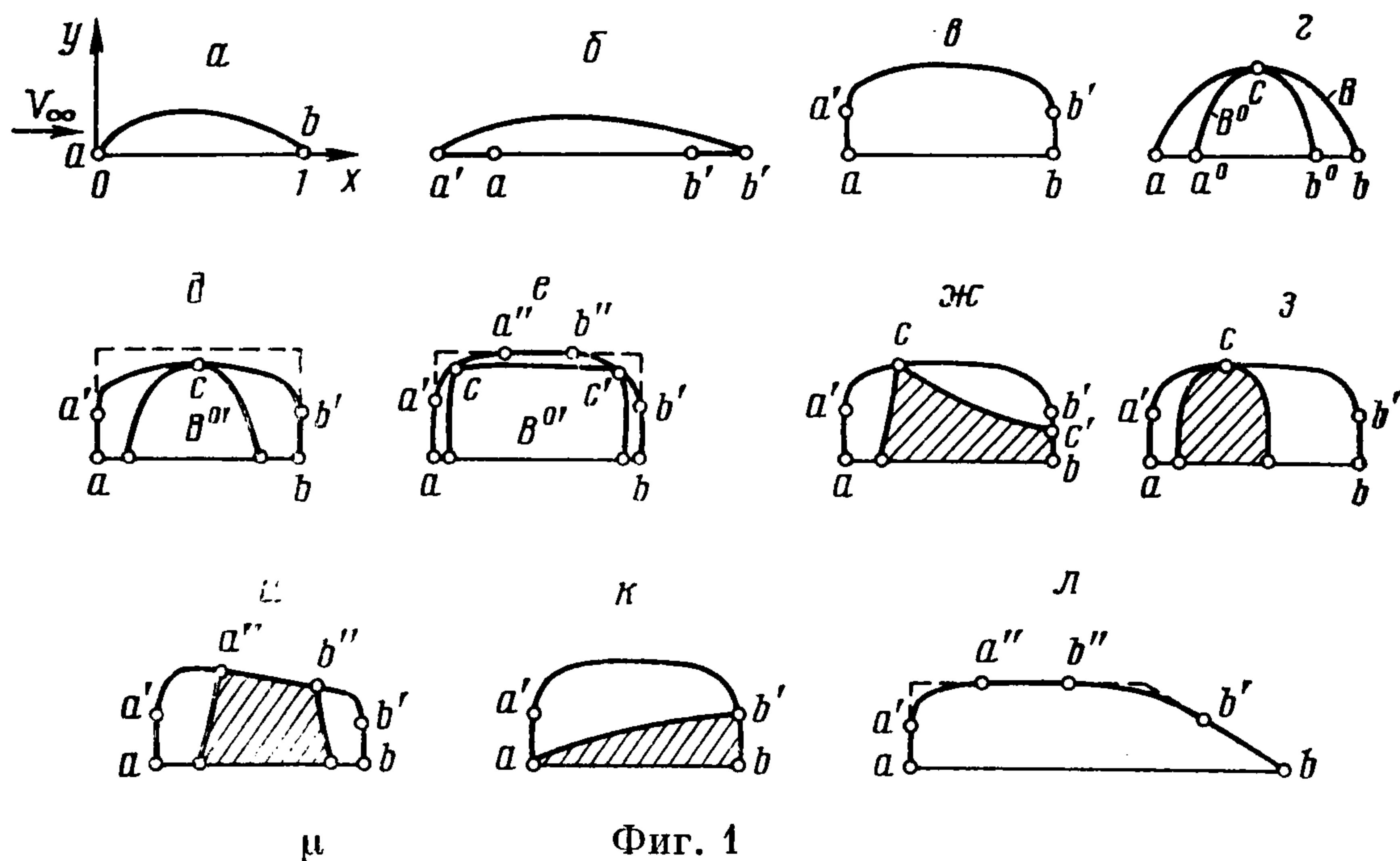
Находится структура плоских и осесимметричных конфигураций, которые, удовлетворяя ряду геометрических ограничений, обтекаются в безграничном пространстве или в цилиндрическом канале идеальным (невязким и нетеплопроводным) газом с максимальным критическим числом Маха M^* . Анализ проводится при помощи «свойства прямолинейности» звуковой линии в «дозвуковых» потоках (ДП), «принципа максимума» для ДП и «теорем сравнения», которые либо берутся из [1], либо служат обобщением соответствующих утверждений из [1]. Вслед за [1] рассматриваются конфигурации, имеющие плоскость или ось симметрии, параллельную скорости V_∞ набегающего потока, а «дозвуковыми» называются течения, в которых (включая границы) число Маха $M \leq 1$. Под M^* , как обычно, понимается такое значение M_∞ , что неравенство $M \leq 1$, выполняющееся во всем потоке при $M_\infty \leq M^*$, нарушается при $M_\infty > M^*$.

Исследуемые конфигурации включают замкнутые тела и головные (кормовые) части полубесконечных пластины или кругового цилиндра в безграничном потоке и в канале, а также решетки симметричных профилей. Как и в [1], где была найдена структура замкнутых плоских и осесимметричных тел, так и в [2], где такие тела были построены численно, образующие всех исследованных конфигураций содержат торцы или заменяющие их отрезки максимально допустимого (по модулю) наклона и «свободные» линии тока с $M \equiv 1$. Теперь, однако, в отличие от [1, 2] к ним в общем случае добавляются отрезки горизонталей. Кроме того, для течений в каналах и в решетках найденные конфигурации могут обтекаться с возникновением конечных областей поступательного звукового потока.

1. Начнем с образующей ab замкнутого тела в безграничном потоке (фиг. 1, a) с точками a и b на оси x декартовых (в плоском случае) или цилиндрических (в осесимметричном случае) координат. Ось x направлена по V_∞ и лежит в плоскости симметрии тела (или совпадает с его осью), а начало координат и линейный масштаб выбраны так, что $x_a = 0$ и $x_b = 1$. Здесь и далее индексы a, b, \dots приписываются параметрам в соответствующих точках.

В силу парадокса Даламбера, справедливого для безотрывного ДП, при любом фиксированном $M_\infty < 1$ не представляет труда построить множество тел B с равным нулю коэффициентом волнового сопротивления c_x . В частности, такими будут все достаточно гладкие тонкие тела, толщина которых Y тем меньше, чем ближе M_∞ к единице. С другой стороны, ясно, что при ограничении на минимально допустимый размер миделя $Y \geq \delta$, на объем тела $\Omega \geq \Omega^m$ или на площадь $S \geq S^m$ между образующей ab и осью x (в плоском случае объем Ω единицы ширины тела совпадает с S), где δ, Ω^m и S^m — положительные постоянные, ДП и, как следствие, $c_x = 0$ реализуются не при любом $M_\infty < 1$. Более того, введение внутреннего выпуклого (т. е. с «внешним» углом, превышающим 2π) излома контура ab ведет к возникновению при его обтекании местной сверхзвуковой зоны (МСЗ) и появлению волнового сопротивления при любом сколь угодно малом $M_\infty > 0$.

Следует учесть также, что интенсивно развиваемые в последнее время специальные способы коррекции профилей [3—6], обеспечивающие прак-



Фиг. 1

тически безударное торможение газа в МСЗ, а следовательно, близкую к нулю величину c_x , предполагают фиксированный режим обтекания и не гарантируют $c_x \simeq 0$ даже при M_∞ , меньших расчетного (но больших M^*). Поэтому безусловный интерес представляют конфигурации, которые обтекаются с максимально возможным M^* , ведь при $M_\infty \leq M^*$ по самому определению M^* реализуется ДП с $c_x = 0$.

M^* — функционал от формы тела V , что будем записывать в виде $M^* = M^*(V)$, и следовательно, задача построения образующей ab является вариационной задачей, решение которой зависит от дополнительных ограничений, в частности геометрического характера. В обсуждаемой форме данная задача нестандартна. Несмотря на это, во-первых, сразу можно указать ее тривиальное, но важное для дальнейшего решение: при нулевых δ , Ω^m и S^m максимум $M^* = 1$ реализует отрезок прямой ab , т. е. оптимальное тело V — пластина или игла. Во-вторых, выполнив с привлечением этого результата специальный «мысленный эксперимент», что характерно для вариационных задач газовой динамики (см. [7, 8]), можно выявить важные элементы решения. Пусть, например, кроме ограничения на максимально допустимую длину, взятую за линейный масштаб, в качестве дополнительного условия в задаче фигурирует лишь одно из условий на Y , Ω или S . Забыв на время об ограничении на длину, построим оптимальную образующую ab , которая, соединяя точки a и b с $y_a = y_b = 0$, $x_a = 0$, и $x_b = 1$ и удовлетворяя одному из условий

$$(1.1) \quad Y \geq \delta, \quad \Omega \geq \Omega^m, \quad S \geq S^m$$

реализуем максимум M^* . В подобной формулировке, включив в образующую ab отрезки aa' и bb' оси x , как показано на фиг. 1, б, и устремив $x_{a'} \rightarrow -\infty$, а $x_{b'} \rightarrow \infty$, при любой гладкой выпуклой дуге $a'b'$ можно сколь угодно близко подойти к пластине или игле с максимально возможным $M^* = 1$. Поскольку, однако, при построении такой «оптимальной» образующей не выполнено ограничение на длину, то отсюда заключаем, что действительно оптимальная образующая, удовлетворяющая указанному ограничению, в общем случае будет содержать торцы aa' и bb' , как показано на фиг. 1, в. При задании максимально допустимой длины такой же вывод справедлив и для дополнительных условий, отличных от (1.1), если и для них проходит аналогичное рассуждение с фиг. 1, б. С другой стороны, данный вывод, указывая на принципиальную возможность появления в оптимальной образующей торцов в общем случае, еще не гаранти-

рует их обязательного присутствия при любых значениях определяющих параметров задачи. В этой связи укажем на аналогию с головными частями фиксированной длины, реализующими минимум c_x в рамках закона сопротивления Ньютона. Здесь, как известно [7—9], осесимметричные головные части имеют затупление всегда, в плоские — лишь при $Y > 1$, где Y — отнесенная к длине полутолщина тела. Поэтому рассуждение с фиг. 1, б следует рассматривать лишь как наводящее. Для более же определенных выводов о форме оптимальной образующей ab привлечем аппарат, близкий к развитому в [1].

Начнем со свойства прямолинейности (СП) звуковой линии (ЗЛ) в двумерных ДП. Далее «звуковой» называется такая линия внутри ДП, на которой $M = 1$ при $M < 1$ хотя бы с одной стороны от нее. С другой стороны от ЗЛ $M \leq 1$. Случай $M = 1$ понадобится при анализе обтекания решеток и тел в цилиндрическом канале. Несмотря на последнее уточнение, повторив практически дословно рассуждения [1], найдем, что ЗЛ в двумерном ДП прямолинейна, в каждой своей точке перпендикулярна V и не может заканчиваться внутри потока. Доказываемую тем же способом невозможность изолированных «звуковых точек» внутри ДП при этом можно считать вытекающей из СП как результат отсутствия внутренних конечных точек ЗЛ. Из СП сразу следует, что при дозвуковом обтекании безграничным потоком с $M_\infty < 1$ замкнутых плоских (необязательно симметричных) и осесимметричных тел, а также головных и кормовых частей число Маха может достигать своего предельного значения $M = 1$ только на поверхности тела. Справедливость данного утверждения, именуемого вслед за [1] «принципом максимума» (ПМ) для ДП, доказывается от противного, поскольку, допустив противоположное, получим ЗЛ в виде полупрямой (или прямой), уходящей в бесконечность, где, однако, $M = M_\infty < 1$.

Следующим этапом к построению тела, обтекаемого с максимальным M^* , служит доказываемая с привлечением ПМ «теорема сравнения» (ТС), суть которой поясняет фиг. 1, г. Именно, пусть тело B° лежит внутри B , касаясь последнего в точке c , отличной от a и b , и пусть $M_\infty \leq M_\infty^\circ < 1$, причем «градус» приписывается параметрам потока, обтекающего B° . Пусть далее и B и B° обтекается ДП без возникновения отрывов (в [1] это подразумевается). Тогда $V_c^\circ > V_c$.

Поскольку доказательство ТС дано в [1], то остановимся лишь на уточняющих это доказательство моментах. Функция тока ψ , отвечающая телу B , удовлетворяет уравнению

$$(1.2) \quad L(\psi) \equiv A_{11}\psi_{xx} - 2A_{12}\psi_{xy} + A_{22}\psi_{yy} + A_1\psi_x + A_2\psi_y = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} A_{11} = 1 - M_u^2, \quad A_{12} = M_u M_v, \quad A_{22} = 1 - M_v^2 \\ yA_1 = vA_{12}, \quad yA_2 = -vA_{22}, \quad M_u = u/a, \quad M_v = v/a \end{array} \right)$$

Здесь u и v — x - и y -компоненты V , a — скорость звука, $v = 0$ и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случаях. Согласно определению ψ

$$(1.3) \quad \rho u y^v = \psi_y, \quad \rho v y^v = -\psi_x$$

а в силу изоэнергетичности и изэнтропичности течения

$$(1.4) \quad 2i + u^2 + v^2 = 2I_\infty, \quad s = s_\infty$$

где ρ — плотность, а i и s — удельные энтальпия и энтропия. Уравнения состояния в данном случае удобно считать заданными в форме

$$(1.5) \quad i = a^2 \alpha(s, a^2), \quad \rho = \rho(s, a^2)$$

Далее предполагается, что все величины, входящие в (1.2)–(1.5), безразмерные с критическими скоростью и плотностью в качестве соответствующих масштабов. Тогда для совершенного газа с постоянными теплоемкостями

$$2I_\infty = (\kappa + 1)/(\kappa - 1), \quad \alpha(s, a^2) = 1/(\kappa - 1)$$

и как следствие этого коэффициенты уравнения (1.2)

$$(1.6) \quad A_{ij} = A_{ij}(\kappa, y^\nu, \psi_x, \psi_y), \quad A_k = A_k(\kappa, y^\nu, \psi_x, \psi_y)$$

где κ — показатель адиабаты. В случае газов с более сложной термодинамикой аргументами функций (1.6) вместо κ выступают безразмерные значения физических констант, входящих в (1.5). Далее при сравнении различных потоков существенно, что A_{ij} и A_k , с одной стороны, и A_{ij}° и A_k° , с другой — одинаковые функции y^ν и ψ_x , ψ_y и ψ_x° , ψ_y° соответственно. Для несовершенного газа это заведомо справедливо при совпадающих размерных критических параметрах сравниваемых потоков. Согласно (1.6), для совершенного газа этого не требуется. Кроме того, поскольку, как известно [10], ρ , a и $V = |V|$ — двузначные функции плотности тока $j \equiv \rho V = \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2} y^{-\nu/2}$, то для дальнейшего важно существование при $M \leq 1$ соответствующих однозначных ветвей, а следовательно, и однозначных связей A_{ij} и A_k с y^ν , ψ_x и ψ_y .

Граничными условиями для определения ψ служат

$$(1.7) \quad \psi_\Gamma = 0, \quad \psi(x, y) \rightarrow y^{1+\nu} j_\infty / (1 + \nu) \text{ при } r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$$

где Γ — линия тока, составленная из двух полулучей ($x < x_a$ и $x > x_b$) оси x и из образующей тела B . Уравнения и условия (1.2) — (1.7) с индексом «градус» у всех символов (кроме x , y , κ и ν) определяют и функцию тока ψ° , отвечающую обтеканию B° . Функция $\omega \equiv \psi^\circ - \psi$ определена вне B и на Γ . При безотрывном обтекании, когда $\psi^\circ > 0$ всюду вне B°

$$(1.8) \quad \omega_\Gamma \geq 0, \quad \omega(x, y) \rightarrow y^\nu (j_\infty^\circ - j_\infty) / (1 + \nu) \geq 0 \text{ при } r \rightarrow \infty$$

причем в первом условии равенство имеет место лишь на общих участках Γ и Γ° , включая их точки касания, а во втором — лишь при $M_\infty^\circ = M_\infty$. При написании второго условия учтено, что если $0 \leq M \leq 1$, то j — монотонно возрастающая функция M . Вне B функция ω удовлетворяет уравнению

$$(1.9) \quad L^\circ(\omega) + (A_{11}^\circ - A_{11})\psi_{xx} - 2(A_{12}^\circ - A_{12})\psi_{xy} + (A_{22}^\circ - A_{22})\psi_{yy} + (A_1^\circ - A_1)\psi_x + (A_2^\circ - A_2)\psi_y = 0$$

в котором коэффициенты оператора L° — функции не ω_x и ω_y , а те же функции ψ_x° и ψ_y° , что и в $L^\circ(\psi^\circ)$. Из (1.9) следует, что ω не может иметь максимумов или минимумов во внутренних точках ДП, отличных от бесконечно удаленной. Действительно, предположив противное, получим, что в таких точках

$$\omega_x \equiv \psi_x^\circ - \psi_x = 0, \quad \omega_y \equiv \psi_y^\circ - \psi_y = 0$$

В силу этих равенств и того, что, согласно сказанному ранее, в ДП коэффициенты A_{ij} , A_k , A_{ij}° и A_k° — однозначные функции ψ_x и ψ_y или ψ_x° и ψ_y° , (1.9) сводится здесь к уравнению

$$(1.10) \quad (1 - M_u^2)\omega_{xx} - 2M_u M_v \omega_{xy} + (1 - M_v^2)\omega_{yy} = 0$$

которое, как известно, при $M^2 \equiv M_u^2 + M_v^2 \leq 1$ не может выполняться ни в точках максимума, ни в точках минимума ω . Пусть далее n отсчитывается по нормали к B и к B° в точке c . Тогда с учетом полученного результата и того, что в силу (1.3) $\partial\psi/\partial n \equiv \psi_n = \rho V y^\nu$, будем иметь

$$(\partial\omega/\partial n)_c \equiv y_c^\nu (j^\circ - j)_c \geq 0$$

Так как при $M \leq 1$ плотность тока монотонно растет с V , то отсюда следует, что $V_c^\circ \geq V_c$. На самом деле, однако, во всех точках касания не совпадающих тождественно тел B и $B^\circ \in B$ выполняется строгое неравенство

$$(1.11) \quad V_c^\circ > V_c$$

Завершающий доказательство ТС переход к (1.11), названный в [1] «леммой граничной точки», выполнен там весьма сложным способом и ограничен «регулярными точками» (РТ) B , в которых конечны вторые производные от ψ по x и y . В действительности (1.11) почти сразу следует из (1.9), причем в более общем случае. Именно, предположим, что $V_c^\circ = V_c$. Тогда, как и в точках экстремума ω , здесь $A_{ij}^\circ = A_{ij}$ и $A_k^\circ =$

$= A_k$ и к тому же $\omega_n = \omega_\tau = 0$, где τ отсчитывается вдоль образующей ab , а следовательно, $\omega_x = \omega_y = 0$. Поэтому уравнение (1.9) в малой окрестности c оказывается сколь угодно близким к (1.10), причем не только, если c — РТ, но и для таких нерегулярных точек (а лишь они и встречаются в дальнейшем), при приближении к которым вторые производные от ψ стремятся к бесконечности медленнее, чем коэффициенты в (1.9) перед ними к нулю. В то же время, в силу ПМ для ω , к точке c при $\omega_\tau = \omega_n = 0$ примыкает отсекаемая образующей B «половинка минимума» поверхности $\omega = \omega(x, y)$. Это, однако, невозможно, так как в таком случае левая часть (1.10) отличалась бы при $M \leq 1$ от нуля на конечную величину и, следовательно, в малой окрестности c уравнение (1.9) не могло бы выполняться. Заметим, наконец, что в (1.9) можно одновременно заменить L° и ψ на L и ψ° . При этом сформулированные выше условия на ψ_{xx}, \dots заменятся аналогичными условиями на ψ_{xx}°, \dots .

При помощи ТС построим теперь замкнутое тело фиксированной длины, которое удовлетворяя трем условиям

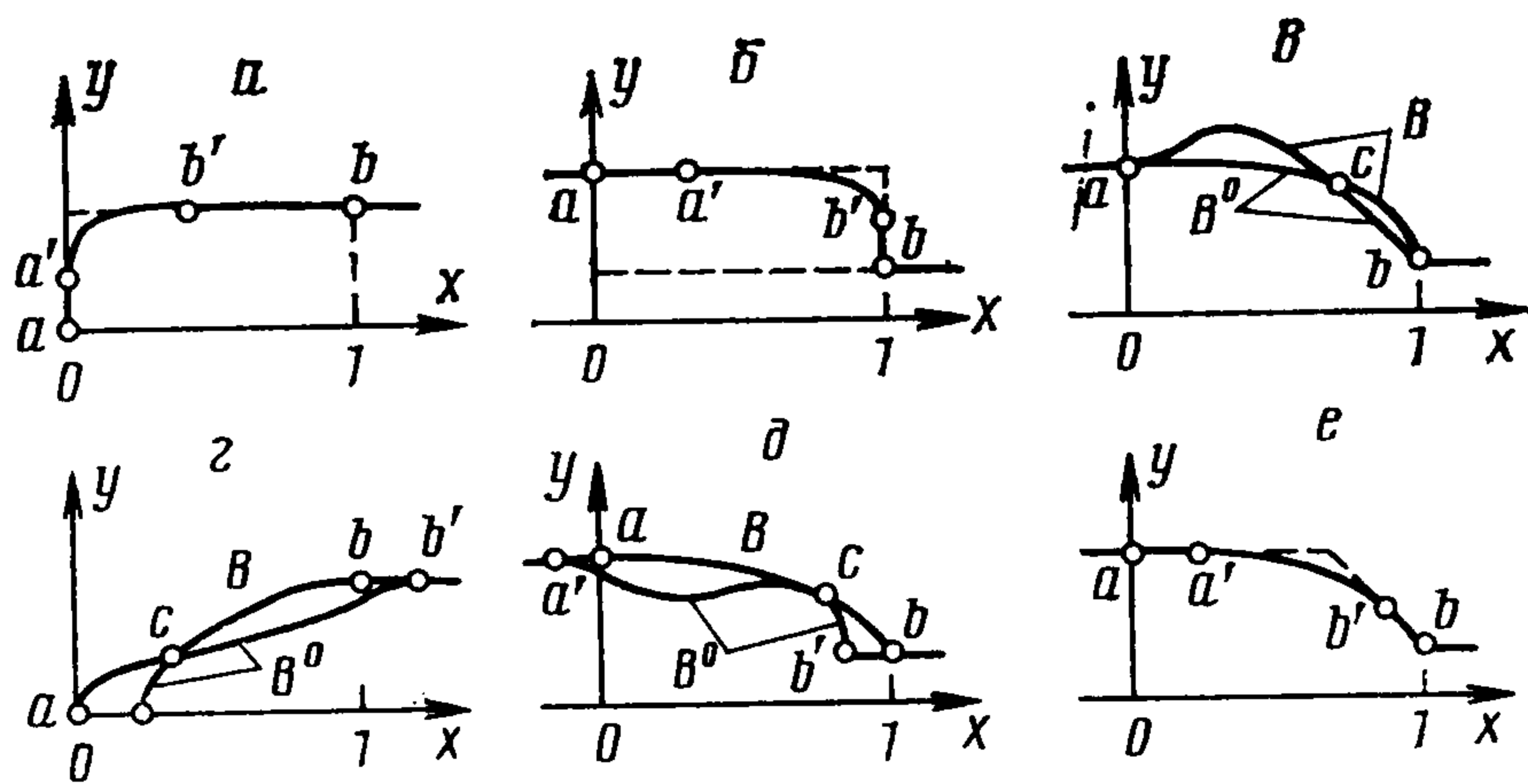
$$(1.12) \quad y \leq \Delta, \quad \Omega \geq \Omega^m, \quad S \geq S^m$$

реализует максимум M^* . Главное отличие данной формулировки от того обобщения формулировки вариационной задачи из [1], которому отвечают неравенства (1.1) вместо равенств в [1], состоит не в числе ограничений, а в смысле первого из них. В (1.12) толщина тела при отличных от нуля Ω^m и S^m не должна превышать максимально допустимой величины Δ , а в [1] и в (1.1), наоборот, мидель тела не может быть меньше минимально допустимого значения δ . В силу (1.12) образующая тела не выходит из прямоугольника $B_\Delta: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \Delta$, показанного на фиг. 1, ∂ и e штрихами. Если Ω_Δ и S_Δ — отвечающие ему значения Ω и S , то $\Omega^m \leq \Omega_\Delta$ и $S^m \leq S_\Delta$, причем при $\Omega^m = \Omega_\Delta$ или $S^m = S_\Delta$ образующая ab имеет изломы и $M^* = 0$.

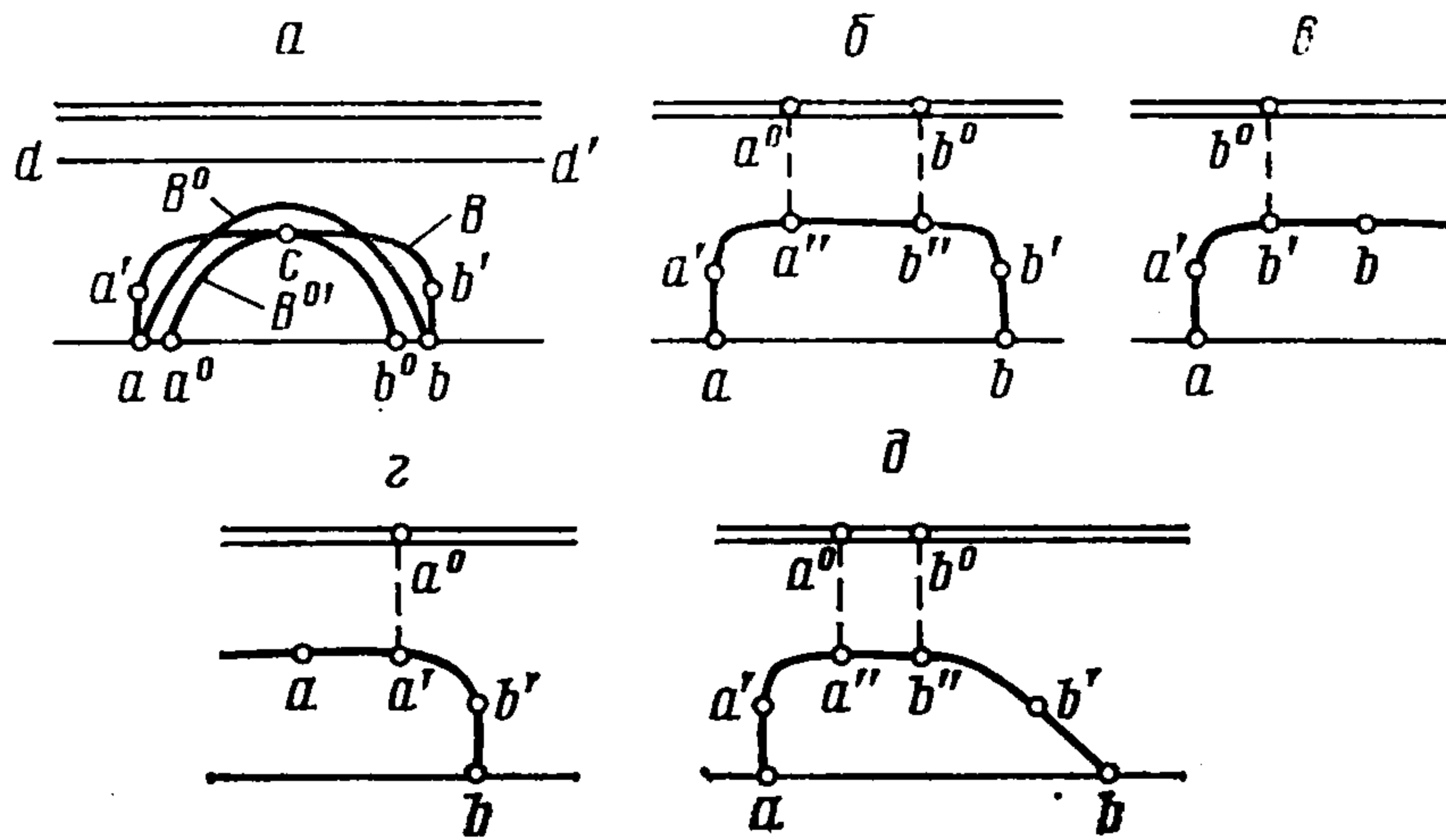
Покажем, что контур замкнутого оптимального тела B фиксированной длины, удовлетворяющего условиям (1.12) и реализующего в безграничном ДП максимум M^* в зависимости от значений Δ, Ω^m и S^m , либо, как и в [1], состоит из торцов $x = 0$ и $x = 1$ и соединяющей их линии тока $M = 1$, либо содержит дополнительный участок горизонтали $y = \Delta$. Обе ситуации изображены на фиг. 1, ∂ и e , где $M = 1$ на $a'b'$ и $a'b''$ и $b''b'$ соответственно.

Согласно уравнениям движения $\partial p / \partial n = -\rho V^2 \partial \vartheta / \partial \tau$, где ϑ — угол между V и осью x , а p — давление. Отсюда в ДП, в котором на отрезках «звуковых» линий тока, где $\partial p / \partial n \geq 0$, имеем $\partial \vartheta / \partial \tau \leq 0$, и следовательно, эти отрезки, а с ними и оптимальные контуры на фиг. 1, ∂ и e невогнуты. В таком случае любое тело B° , удовлетворяющее перечисленным выше условиям, либо совпадает с B , либо хотя бы частично выходит из него, располагаясь тем не менее, как и B , внутри B_Δ . Допустим, что оптимально не B , а B° , т. е. $M^{*\circ} > M^*$. Тогда после аффинного сжатия, не меняющего обтекания, придем к телу $B^{\circ'}$, которое касается B не менее чем в одной точке (c или c и c') отрезка $M = V = 1$. Но согласно ТС, в таких точках $V^\circ > V = 1$ и, следовательно, вопреки предположению поток, обтекающий B° , не является дозвуковым, а B° , в силу определения, неоптимально.

В рамках ТС легко обобщить результат [1] на тела, удовлетворяющие при одинаковой максимально допустимой длине не одному из условий (1.1), а всем трем сразу. В таком случае оптимально самое толстое из трех тел с одной звуковой линией тока (фиг. 1, ∂), построенных соответственно для $Y = \delta, \Omega = \Omega^m$ и $S = S^m$. Другое обобщение получается, если вместо первого условия из (1.1) выдвинуть более естественное требование размещения внутри B заданного тела G . Примеры оптимальных конфигураций,



Фиг. 2



Фиг. 3

получающихся при этом с помощью ТС в случае фиксации положения G относительно отрезка ab оси x и отсутствия условий на Ω и S , показаны на фиг. 1, ж—к, где тела G заштрихованы и $M = 1$ на $a'cb'$, $a'a''b''b'$ и $a'b'$. Контуры B и G могут иметь при этом как отдельные общие точки (с на фиг. 1, ж и з), так и общие участки ($c'b$ на фиг. 1, ж, $a''b''$ на фиг. 1, и и $b'b$ на фиг. 1, к). Если допускается перемещение тела G , то его положение берется таким, чтобы при любых допустимых смещениях G толщина B в окрестности хотя бы одного из отрезков $M = 1$ увеличивалась. В частности, тела G с вертикальной плоскостью симметрии должны располагаться посреди отрезка ab .

2. Наряду с контурами замкнутых тел представляют интерес «незамкнутые» образующие, которые можно рассматривать в качестве головных или кормовых частей достаточно длинных тел, а в осесимметричном случае — и переходных участков, соединяющих цилиндры разных радиусов. Длинные тела при этом естественно заменить полубесконечной пластиной или круговым цилиндром с образующими, параллельными V_∞ .

Схемы рассматриваемых конфигураций даны на фиг. 2, а и б, поясняющих также выбор осей координат и линейного масштаба. В отличие от фиг. 1 теперь хотя бы одна из концевых точек искомого оптимального контура ab не лежит на оси x . В случае переходных осесимметричных участков (фиг. 2, б) отличны от нуля ординаты обеих концевых точек. Кроме максимально допустимой длины тела, взятой, как и ранее, за линейный масштаб, фиксируются максимально и минимально допустимые значения y на ab , в результате чего искомые образующие должны располагаться в прямоугольниках, ограниченных на фиг. 2, а и б отрезками осей x и y и штриховыми прямыми.

В качестве дополнительных ограничений могут по-прежнему вводиться условия на Ω и S из (1.1), причем здесь под Ω и S понимаются объемы и площади, отсекаемые образующей ab от упомянутых выше прямоуголь-

ячков или тел, получающихся их вращением вокруг оси x . Силы, действующие на головные и кормовые части и на переходные участки, разумеется, отличны от нуля при любых числах Маха. Тем не менее, и в этом случае, если во всем потоке $M \leq 1$, то при безотрывном обтекании, как и для замкнутых тел, равен нулю коэффициент волнового сопротивления. Поэтому и здесь представляют интерес образующие, реализующие максимум M^* .

Построение таких оптимальных образующих, как и для тел с замкнутым контуром, проводится при помощи варианта ТС, формулировка и доказательство которого почти не отличаются от таковых для использованной выше ТС из [1]. Главное отличие состоит в том, что условие для $r \rightarrow \infty$ из (1.7) теперь заменится на

$$\psi(x, y) \rightarrow j_{\infty} \Psi(x/\Delta, y/\Delta, \delta/\Delta, \nu) \text{ при } r/\Delta \rightarrow \infty$$

Здесь Δ и δ — максимально и минимально допустимые значения y на контуре ($\delta = y_a = 0$, $\Delta = y_b$ на фиг. 2, а и $\delta = y_b$, $\Delta = y_a$ на фиг. 2, б), а неотрицательная функция Ψ не зависит от формы головной или кормовой частей или переходного участка, причем $\Psi(-\infty, 1, \dots) = \Psi(\infty, \delta/\Delta, \dots) = 0$. Кроме того, далее будем рассматривать тела с одинаковыми Δ и δ , т. е. различающиеся лишь на конечном интервале оси x (применительно к головным частям и соответствующим переходным участкам — при $0 < x < 2$, а к их кормовым аналогам — при $-1 < x < 1$). С учетом сказанного и фиг. 2, в — д, поясняющих смысл используемой далее ТС, заключаем, что для тел B и $B^{\circ} \in B$ при $1 > M_{\infty}^{\circ} \geq M_{\infty}$ в точках касания и на общих участках контуров B и B° имеет место неравенство $V^{\circ} > V$. Очевидное исключение — бесконечно удаленные точки полупрямых $y = \delta$ и $y = \Delta$, где при $M_{\infty}^{\circ} = M_{\infty}$ скорости сравниваемых потоков совпадают.

При помощи ТС теперь можно установить, что в рассматриваемых случаях оптимальные образующие состоят из торцов ($x = 0$ для головных и $x = 1$ для кормовых частей и соответствующих переходных участков), линии тока $M = 1$ и отрезков горизонталей $y = \Delta$, как видно из фиг. 2, а и б, причем отрезки горизонталей появляются только при наличии ограничений на Ω и S . По мере уменьшения Ω^m и S^m , что соответствует «смягчению» ограничений, M^* растет, достигая при фиксированных Δ и δ (в плоском случае $\delta = 0$) максимума для образующей ab без горизонтального участка. Эта же образующая оптимальна при отсутствии всех условий (1.12), т. е. и среди конфигураций с $y > \Delta$.

Справедливость всего сказанного доказывается от противного. При этом, как правило, вместо аффинного сжатия, использованного в п. 1, достаточно сдвигать сравниваемое тело B° вправо (для головных частей) или влево (для кормовых) до тех пор, пока с неизбежностью не возникнет одна из изображенных на фиг. 2, в — г ситуаций, ведущая к противоречию. Аффинное сжатие привлекается только при сравнении оптимального тела с более толстыми телами ($y > \Delta$). Заметим, наконец, что в силу сказанного оптимальными (по M^*) не могут быть заостренные головные части, построенные в [11].

3. Пусть теперь тело B с невогнутой образующей обтекается дозвуковым потоком с $M \equiv M_{\infty} \leq 1$ при $|x| \rightarrow \infty$, но не в безграничном пространстве, а в цилиндрическом канале (фиг. 3, а, где двойная линия — образующая стенки канала). Пусть там же обтекается ДП с $M_{\infty}^{\circ} \geq M_{\infty}$ другое тело B° той же длины и пусть образующие B и B° пересекаются. Мысленно сжав B° вместе с трубой аффинно с центром на оси x внутри B° и, следовательно, не изменив течения, придем к телу $B^{\circ'} \in B$, такому, что образующие B и $B^{\circ'}$ будут либо касаться одна другой, либо иметь об-

щие участки. Тогда $V^{\circ'} > V$ в отличных от a и b общих точках B и $B^{\circ'}$, что и составляет еще один вариант ТС.

При его доказательстве в дополнение к сказанному ранее учтем, что линии тока ДП, обтекающего B , сначала монотонно удаляются от оси канала, а затем опять же монотонно приближаются к ней (если тело B имеет нормальную к оси x плоскость симметрии, то это сразу следует из принципа максимума для v). Поэтому на прямой dd' , в которую при аффинном сжатии преобразуется стенка трубы, $\psi \leq \psi(-\infty, y_d)$. Следовательно, функция $\omega(x, y) \equiv \psi^{\circ'}(x, y) - \psi(x, y)$, которая определена в полосе, ограниченной осью канала, образующей ab и прямой dd' , неотрицательна на всей указанной границе. Дальнейший ход доказательства ТС не отличается от приведенного в [1] с уточнениями п. 1.

В дополнение к ТС вспомним уже привлекавшееся в п. 1 свойство прямолинейности ЗЛ в ДП. Теперь, однако, этому свойству не противоречит появление в ДП прямых ЗЛ с $M < 1$, с одной стороны, и с $M \equiv 1$ — с другой. Такие ЗЛ ограничивают «звуковые области» (30) — области равномерного звукового потока.

Сформулированный вариант ТС и еще одна близкая ее версия для тел с незамкнутым контуром вместе со сказанным выше о ЗЛ и ЗО в ДП позволяют найти структуру замкнутых и незамкнутых образующих таких тел фиксированной максимально допустимой длины, которые при дополнительных ограничениях (1.1), (1.12) или части из них (например, без условий на Y и y) реализует максимум M^* . При этом наряду с конфигурациями той же структуры, что и для неограниченного потока (они заведомо реализуются для малой «загрузки» канала, когда $k_{\Omega} \equiv \Omega^m/R^{2+v} \ll 1$ и $k_S \equiv S^m/R^2 \ll 1$, где R — полувысота или радиус канала), даже при отсутствии условия на y из (1.12) у оптимальных образующих, начиная с некоторых значений k_{Ω} и k_S , появляются горизонтальные участки. Над такими участками располагаются ЗО, ограниченные с двух или с одной стороны прямолинейными ЗЛ, которые нормальны стенкам канала.

Сказанное демонстрирует фиг. 3, б—г, причем на фиг. 3, б $M = 1$ на $a'b'$ и в прямоугольнике $a''a^{\circ}b^{\circ}b''$, на фиг. 3, в — на $a'b'$ и всюду правее $b'b^{\circ}$ и на фиг. 3, г — на $a'b'$ и всюду левее $a'a^{\circ}$. Последний пример интересен и в том отношении, что для него $M^* = M_{\infty} = 1$. В безграничном потоке это имело место только в тривиальных примерах обтекания пластины или иглы нулевой толщины. Заметим, кстати, что, несмотря на отсутствие скачков и связанного с ними роста энтропии, в случаях фиг. 3, в и г c_x , определенный обычным образом, отличен от нуля (более того, в случае фиг. 3, г $c_x < 0$). Естественно, что поскольку реализация течений, изображенных на фиг. 3, б—г требует поддержания специальных граничных условий при $|x| \rightarrow \infty$, то они представляют только теоретический интерес.

Из конфигураций, реализующих максимум M^* при обтекании в плоском канале, можно строить решетки симметричных профилей с фронтами, нормальными V_{∞} . Хотя такие решетки неинтересны для приложений, присущие им особенности могут оказаться характерными и для решеток из «нагруженных» профилей, по крайней мере, при малом уровне соответствующих сил и моментов.

В заключение сделаем несколько замечаний общего характера.

Во-первых, в вязком газе обтекание всех рассмотренных тел, кроме головных частей, будет сопровождаться возникновением развитых отрывных зон около задних торцов, что изменит всю картину течения. Поэтому уже при постановке задачи целесообразно ввести ограничения, обеспечивающие более широкую применимость результа-

тов, получающихся в рамках идеального газа. Вслед за [1] наиболее просто сделать это, потребовав, чтобы угол наклона образующей тела $\vartheta_w(x)$ к оси x удовлетворял неравенству

$$(3.1) \quad \vartheta_w(x) \geq \vartheta_0 > -\pi/2$$

с заданной постоянной ϑ_0 . Введение условия (3.1) ведет к замене задних торцов отрезками прямых $\vartheta_w(x) \equiv \vartheta_0$, как показано на фиг. 1, *а*, 2, *е* и 3, *д*. Конечно, и при $|\vartheta_0| < \pi/2$ в окрестности точки торможения b возникает отрыв, однако для больших чисел Рейнольдса при переходе от торца к заострению отрывная зона, а вместе с нею и влияние вязкости на течение в целом быстро уменьшаются. Еще один отрыв может располагаться в окрестности точки b' , справа от которой $(p_\tau)_{b'} \equiv (\partial p / \partial \tau)_{b'} = \infty$ вне зависимости от величины ϑ_0 . Для его ликвидации в дополнение к (3.1) следует ввести ограничение на p_τ в форме $p_\tau \leq \xi$ с заданной положительной постоянной (или функцией) ξ , а точнее — на некоторую безразмерную комбинацию («критерий отрыва»), пропорциональную p_τ . При этом в окрестности b' у оптимального контура появится участок: $p_\tau \equiv \xi$.

Во-вторых, в рассмотренных примерах ТС позволили найти контуры, реализующие глобальный максимум M^* , причем оказалось, что все построенные решения состоят лишь из участков краевого экстремума либо по управлениям (торцы, отрезки прямых $y = \Delta$ и $\vartheta_w = \vartheta_0$), либо по фазовой координате (линии тока $M = 1$). С другой стороны, в рамках традиционных подходов теории оптимального управления или вариационного исчисления в газовой динамике в лучшем случае удается удовлетворить только необходимым условиям локального оптимума, а вопрос о построении всех возможных оптимальных решений и выборе из них лучшего, т. е. о «синтезе оптимального управления», обычно остается открытым.

К сожалению, такое преимущество ТС компенсируется узкостью круга задач, где они могут быть применены. Так, отсутствие соответствующей ТС исключает столь же эффективное решение задачи, аналогичной рассмотренным, например, для несущего профиля. Поскольку решенные задачи можно использовать для отработки других более общих подходов, то возникает потребность в их переформулировке к традиционной форме вариационных задач газовой динамики. Новая формулировка сводит рассмотрение задачи к построению контуров тел фиксированной максимально допустимой длины, реализующих максимум S или Ω при дозвуковом ($M \leq 1$) обтекании с заданным M_∞ . Не вдаваясь в проблемы, связанные с применением прямых и непрямых подходов к решению таких задач, обратим внимание лишь на один момент, возникающий при работе с методом множителей Лагранжа (ММЛ), который широко используется в сверхзвуковой газовой динамике [7]. При $|\vartheta_0| < \pi/2$ в задней точке торможения (фиг. 1, *а*, 2, *е* и 3, *е*) некоторые производные от параметров потока бесконечны. Поэтому, если при варьировании контура точка b смещается, то может нарушиться используемое в ММЛ предположение о малости всех вариаций.

Простейший способ избежать подобной неприятности состоит в совмещении начала координат не с начальным, а с концевым сечением тела. При этом уменьшение длины тела производится за счет варьирования x_a при фиксированном $x_b \equiv 0$. Кстати, отсутствие у найденных контуров участков двустороннего экстремума указывает на сильную зависимость M^* от их формы, так как деформация δy ординаты контура на интервале Δx уменьшает M^* на $O(\delta y \cdot \Delta x)$. Деформация же участка двустороннего экстремума изменяла бы M^* лишь на $O[(\delta y)^2 \Delta x]$.

Наконец, последнее. Нельзя не видеть ряд сходных моментов в рассмотренных и в решавшихся ранее задачах гидро- и газодинамики. Кроме торцов, характерных, как уже упоминалось, для головных частей минимального сопротивления при сверх- и гиперзвуковых скоростях, это, прежде всего, — свободные линии тока, где $V = \text{const}$. Интересно, что конфигурации, образованные такими линиями (и опять же торцами), обеспечивают минимальное сопротивление при кавитационном обтекании несжимаемой жидкостью [12], причем и там анализ основывался на привлечении соответствующих ТС. Что касается прямых ЗЛ и примыкающих к ним ЗО, то эти элементы типичны для ДП в областях с $M = 1$ на одной из границ потока [13].

Автор благодарит В. А. Вострецову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gilbarg D., Shiffman M.* On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I // *J. Ration. Mech. and Analysis*, 1954. V. 3. No. 2. P. 209—230.
2. *Брутян М. А., Ляпунов С. В.* Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1981. Т. 12. № 5. С. 10—22.
3. *Sobieczky H., Yu N. J., Fuhs K.-Y., Seebass A. R.* A new method for designing shock-free transonic configurations // *AIAA Journal*. 1979. V. 17. No. 7. P. 722—729.
4. *Nakamura M.* A method for obtaining shockless transonic flows past two-dimensional airfoils whose profiles are partially modified from a given arbitrary profile // *Trans. Japan Soc. Aeronaut. and Space Sci.* 1981. V. 23, No. 62. P. 195—213.
5. *Dulikravich D. S., Sobieczky H.* Shockless design and analysis of transonic cascade shapes // *AIAA Journal*. 1982. V. 20. No. 11. P. 1572—1578.
6. *Beauchamp P., Seebass A. R.* Shock-free turbomachinery blade design // *AIAA Journal*. 1985. V. 23. No. 2. P. 249—253.
7. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука. 1979. 447 с.
8. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики, постановки, методы решения, соотношение точных и приближенных подходов // *Проблемы современной механики*. М.: Изд-во МГУ. 1983. Ч. 1. С. 90—100.
9. *Крайко А. Н.* Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана // *ПММ*. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 484—495.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
11. *Аульченко С. М., Латыпов А. Ф., Яненко Н. Н.* Применение проекционного метода для построения контура тела минимального сопротивления // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1985. № 2. С. 108—113.
12. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М.: Мир. 1964. 466 с.
13. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука. 1981. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.XII.1986