

УДК 539.3:534.1

## МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН

Крылов А. В.

Предлагается метод построения асимптотических приближений широких классов решений слабонелинейных систем, основанный на разработанной в [1—3]<sup>1</sup> схеме усреднения. Метод позволяет получать условия асимптотического распада систем на скалярные уравнения типа Бюргерса, Кортевега — де Фриза и им подобные, а также исследовать задачи, в которых такой распад не происходит. В качестве примера исследуется распространение возмущений в упругой неоднородной трубе. Рассмотрено взаимодействие двух волн и получены условия резонанса.

1. Нелинейные волновые явления изучаются обычно при упрощающих предположениях эвристического характера. Поэтому необходимы теоретическое обоснование и выяснение границ пригодности получаемых решений.

Пусть решение квазилинейной системы

$$(1.1) \quad U_t + A(U) U_x = 0, \quad U = (u_1, \dots, u_n), \quad A(U) = \parallel a_{ij}(u_1, \dots, \dots, u_n) \parallel$$

близко ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) к некоторому состоянию равновесия ( $U_0 \equiv \text{const}$ )

$$(1.2) \quad U = U_0 + \varepsilon U_1(t, x, \varepsilon)$$

Всюду подразумевается независимость постоянных (const) от  $\varepsilon$ ; индексы  $i, j$  принимают значения  $1, 2, \dots, n$ .

Если задача (1.1), (1.2) гиперболична ([4], с. 23), то заменой  $V = RU_1$ ,  $R = \parallel r_{ij} \parallel$ ,  $\det R \neq 0$  она приводится к виду]

$$(1.3) \quad V_t + \Delta V_x = -\varepsilon R A_1 [R^{-1}V] R^{-1} V_x + o(\varepsilon)$$

$$\Delta \equiv \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \} = R A(U_0) R^{-1}$$

$$A_1 [U_1] = \frac{dA(U_0)}{dU} U_1 \equiv \parallel \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial u_k} a_{ij}(U_0) \right] u_{1k} \parallel$$

Начальное условие

$$(1.4) \quad U_1(0, x, \varepsilon) = \Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

задает длинноволновое (длины волн  $O(1/\lambda_j) = \text{const}$  значительно превышают их амплитуды  $O(\varepsilon)$ ) решение задачи. В линеаризованной теории ограничиваются приближением, полученным из (1.3) при  $\varepsilon = 0$ :

$$(1.5) \quad U_1 = R^{-1} \left( \sum_{k=1}^n r_{1k} \varphi_k(x - \lambda_1 t), \dots, \sum_{k=1}^n r_{nk} \varphi_k(x - \lambda_n t) \right)$$

Такое приближение описывает  $n$  невзаимодействующих бегущих со скоростями  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  линейных гиперболических ([5], с. 9) волн.

В случае одного уравнения ( $n = 1$ ) задача имеет вид

$$v_t + \lambda v_x = \varepsilon f v v_x, \quad v(0, x, \varepsilon) = v_0(x), \quad f = \text{const}$$

<sup>1</sup> См. также: Крылов А. В., Штарас А. Л. Внутреннее усреднение многомерных слабонелинейных систем вдоль характеристик. Вильнюс, 1986. 39 с.— Деп. в ЛитНИИТИ 10.11.86; № 1750.

и ее решение представляется как неявная функция

$$(1.6) \quad v(t, x, \varepsilon) = v_0(x - \lambda t + \varepsilon t f v(t, x, \varepsilon))$$

Решение уравнения (1.6) описывает бегущую со скоростью  $\lambda$  нелинейную волну с медленно меняющимся (как функция от  $\varepsilon t$ ) профилем. Приближение (1.5) описывает решение лишь при  $\varepsilon t \ll 1$  или  $t \ll \varepsilon^{-1}$ , хотя гладкое (непрерывно дифференцируемое) решение существует при  $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$  (при  $t > O(\varepsilon^{-1})$  решения, вообще говоря, разрывны и здесь не рассматриваются). Поэтому представляет интерес построение пригодных при  $t \sim \varepsilon^{-1}$  асимптотических решений задач типа (1.3).

2. В работах [1—3] (см. также сноску на с. 933) дан метод асимптотического интегрирования слабонелинейных гиперболических систем с периодическими начальными условиями. Те же идеи позволяют построить нулевое приближение более широких классов задач.

Рассматривается задача Коши для слабонелинейной системы

$$(2.1) \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon f_j \left( t, x, u_1, \dots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \varepsilon \right)$$

$$(2.2) \quad u_j(0, x, \varepsilon) = u_{0j}(x, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

Функции  $f_j, u_{0j}$  достаточно гладкие, ограничены при всех  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  и непрерывны в точке  $\varepsilon = 0$ .

Задаче (2.1), (2.2) ставится в соответствие усредненная система

$$(2.3) \quad \frac{\partial v_j}{\partial \tau} = M_j[f_j], \quad v_j(0, y_j) = u_{0j}(y_j, 0), \quad \tau = \varepsilon t, \quad y_j = x - \lambda_j t$$

$$M_j[f_j] \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_j(s, y_j + \lambda_j s, v_1(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_1)s), \dots,$$

$$\dots, v_n(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_n)s), \dots, \partial v_k(\tau, y_j + (\lambda_j - \lambda_k)s) / \partial y_k, \dots, 0) ds$$

Если выполнены сделанные выше предположения, то для подходящих классов  $M$  начальных условий (2.2) решение усредненной системы (2.3) асимптотически приближается (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) к точному решению равномерно по  $t \in [0, O(\varepsilon^{-1})]$ :

$$(2.4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_j \sup_{(t,x) \in [0, \tau_0/\varepsilon] \times \mathbb{R}} |u_j(t, x, \varepsilon) - v_j(\varepsilon t, x - \lambda_j t)| = 0,$$

$$\tau_0 = \text{const} > 0$$

Классами  $M$ , в частности, могут быть:  $C_\infty^1(\mathbb{R})$  — множество функций  $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ , обладающих свойством  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = \bar{g} = \text{const}$ ,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} dg(x)/dx = 0$ ;  $C_\Lambda^1(\mathbb{R})$  — множество  $\Lambda$ -периодических функций  $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ ;  $C_{\{v_l\}}^1(\mathbb{R})$  — множество почти периодических функций  $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$  с показателями Фурье  $\{v_l\}$ :

$$g(x) \sim \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l \exp\{i v_l x\}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Для задачи (1.1)—(1.4) усредненная система записывается так:

$$(2.5) \quad \frac{\partial v_j}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n f_{jkm} M_j \left[ v_k \frac{\partial v_m}{\partial y_m} \right], \quad v_j(0, y_j) = u_{0j}(y_j, 0)$$

Из определения оператора  $M_j$  вытекает, что

$$(2.6) \quad \begin{aligned} M_j \left[ v_j \frac{\partial v_j}{\partial y_j} \right] &\equiv v_j \frac{\partial v_j}{\partial y_j} \\ M_j \left[ v_i \frac{\partial v_j}{\partial y_j} \right] &\equiv M_j[v_i] \frac{\partial v_j}{\partial y_j} \\ M_j \left[ v_j \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \right] &\equiv 0, \quad i \neq j \end{aligned}$$

Поэтому для  $u_{0j}(x, 0) \in C_{\infty}^1(\mathbb{R})$  система (2.5) распадается на скалярные уравнения

$$(2.7) \quad \frac{\partial v_j}{\partial \tau} = f_{jj} v_j \frac{\partial v_j}{\partial y_j}, \quad v_j(0, y_j) = u_{0j}(y_j, 0)$$

Здесь предполагается, что

$$(2.8) \quad \langle u_{0j}(x, 0) \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_{0j}(x, 0) dx = 0$$

и, кроме того,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ . Таким образом, решения задачи (1.3) из класса  $C_{\infty}^1$  распадаются на простые волны.

Заметим, что преобразованием  $\bar{v}_j = v_j - \langle u_{0j} \rangle$  задача сводится к случаю, когда выполнено (2.8), поскольку  $\langle v_j(\tau, x) \rangle = \text{const} = \langle u_{0j} \rangle$ . В дальнейшем считаются выполненными ограничения типа (2.8), которые также не принципиальны.

Асимптотика (2.7) совпадает с получаемой известным асимптотическим методом редукции [6—8]. Обоснование распада решения на простые волны получено в [9, 10] при условии, что  $\Phi(x)$  в (1.4) достаточно быстро (экспоненциально) стремится к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Для начальных условий из классов  $C_{\Lambda}^1$  и  $C_{\{v_l\}}^1$  система (2.5) распадается на скалярные уравнения (2.7) лишь в частных случаях. Условия распада вытекают из свойств функций из  $C_{\Lambda}^1$  и  $C_{\{v_l\}}^1$  и формул (2.5), (2.6) и (2.8). Если  $u_{0j}(x) \in C_{\Lambda_j}^1(\mathbb{R})$ , то достаточно, чтобы

$$(2.9) \quad \forall l_k, l_m \in \mathbb{Z}, |l_k| + |l_m| \neq 0: \\ (\lambda_j - \lambda_k) l_k / \Lambda_k \neq (\lambda_j - \lambda_m) l_m / \Lambda_m, \quad \forall j \neq k \neq m \neq j$$

Если  $u_{0j}(x) \in C_{\{v_{jl}\}}^1(\mathbb{R})$ , то достаточно, чтобы

$$(2.10) \quad \forall l_k, l_m \in \mathbb{Z}, |v_{kl_k}| + |v_{ml_m}| \neq 0: \\ v_{kl_k} (\lambda_j - \lambda_k) \neq v_{ml_m} (\lambda_j - \lambda_m), \quad \forall j \neq k \neq m \neq j$$

Представляя решения задач в виде формальных рядов Фурье, можно убедиться, что условия (2.9), (2.10) означают отсутствие резонанса.

3. Уравнения движения жидкости в упругой неоднородной трубе имеют вид ([11], с. 120)

$$(3.1) \quad \rho(u_t + uu_x) = -p_x, \quad (\rho S)_t + (\rho S u)_x = 0, \quad p = P(\rho)$$

Здесь  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$  — средние по поперечному сечению трубы значения соответственно скорости, плотности и давления жидкости,  $S(p, x)$  — площадь поперечного сечения трубы.

Пусть покоившаяся жидкость в момент времени  $t = 0$  получила слабое возмущение:

$$(3.2) \quad u(0, x) = \varepsilon \bar{u}_1(x), \quad \rho(0, x) = \rho_0 + \varepsilon \bar{\rho}_1(x), \quad \rho_0 = \text{const} > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

Если, кроме того, растяжимость трубы слабо неоднородна, т. е.

$$S(p, x) = \bar{S}_0(p) + \varepsilon \bar{S}_1(p, x) + \varepsilon^2 \bar{S}_2(p, x) + o(\varepsilon^2)$$

или (учитываем (3.1), (3.2))

$$(3.3) \quad S(p, x) = S_0 + \varepsilon (A(x) + k\rho_1) + \varepsilon^2 (C(x) + B(x)\rho_1 + \frac{1}{2}\eta\rho_1^2) + o(\varepsilon^2)$$

где (индексы  $\rho$  и  $p$  означают производные по  $\rho$  и  $p$ , вычисленные при

$$\rho = \rho_0, p = p_0)$$

$$(3.4) \quad S_0 = \bar{S}_0(p_0), A(x) = \bar{S}_1(p_0, x), C(x) = \bar{S}_2(p_0, x), p_0 \equiv P(p_0) \\ B(x) = \bar{S}_{1p}P_\rho, k = \bar{S}_{0p}P_\rho, \eta = 1/2 [\bar{S}_{0pp}P_\rho^2 + \bar{S}_{0p}P_{\rho\rho}]$$

то подстановка выражений  $u = \varepsilon u_1$ ,  $\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1$  и (3.3) в (3.1) с точностью  $o(\varepsilon)$  дает

$$(3.5) \quad \rho_{1t} + \rho_0 \gamma u_{1x} = \varepsilon f, u_{1t} + P_\rho \rho_0^{-1} \rho_{1x} = \varepsilon g$$

$$(3.6) \quad f = \gamma S_0^{-1} \{ \rho_0 \gamma u_{1x} [\rho_0 (B + 2\eta \rho_1) + A + 2k\rho_1] - \\ - S_0 (u_1 \rho_1)_x - \rho_0 [u_1 (A + k\rho_1)]_x \} \\ g = -\{ u_1 u_{1x} + \rho_1 \rho_{1x} \delta \} \\ \gamma = \frac{S_0}{S_0 + k\rho_0}, \quad \delta = \frac{1}{\rho_0} \left[ P_{\rho\rho} - \frac{P_\rho}{\rho_0} \right]$$

Преобразованием переменных

$$(3.7) \quad u_1 = \alpha v + w, \rho_1 = v - \alpha^{-1} w, \alpha = c_1 / (\gamma \rho_0), c_1 = \sqrt{P_\rho \gamma}$$

система (3.5), (3.6) и начальные условия (3.2) приводятся к виду

$$(3.8) \quad v_t + c_1 v_x = 1/2 \varepsilon (\alpha^{-1} g + f) \equiv \varepsilon F_1 \\ w_t - c_1 w_x = 1/2 \varepsilon (g - \alpha f) \equiv \varepsilon F_2 \\ v(0, x, \varepsilon) = v_0(x) \equiv 1/2 [\alpha^{-1} \bar{u}_1(x) + \bar{\rho}_1(x)] \\ w(0, x, \varepsilon) = w_0(x) \equiv 1/2 [\bar{u}_1(x) - \alpha \bar{\rho}_1(x)]$$

Функции

$$F_\kappa = G_{10}^\kappa(x) v + G_{20}^\kappa(x) v_x + G_{01}^\kappa(x) w + G_{02}^\kappa(x) w_x + D_{11}^\kappa v v_x + \\ + D_{12}^\kappa v_x w + D_{21}^\kappa v w_x + D_{22}^\kappa w w_x \\ \kappa = 1, 2$$

находятся элементарными преобразованиями из (3.6), (3.7). В частности:

$$D_{22}^2 = -1/2 [2 + \gamma - \gamma K \rho_0 S_0^{-1} + \alpha^{-2} \delta], D_{11}^1 = \alpha D_{22}^2 \\ G_{01}^1 = -1/2 A_x \rho_0 \gamma S_0^{-1}, G_{02}^1 = 1/2 E \rho_0 \gamma S_0^{-1} \\ G_{10}^2 = 1/2 A_x P_\rho (\rho_0 S_0)^{-1}, G_{20}^2 = -1/2 P_\rho E S_0^{-1} \\ K = 2\gamma \rho_0 \eta + (2\gamma - 1) k, E = E(x) = \gamma \rho_0 B(x) + (\gamma - 1) A(x)$$

Если выполнены ограничения типа (2.8)

$$\langle v_0(x) \rangle = \langle w_0(x) \rangle = \langle A(x) \rangle = \langle B(x) \rangle = 0$$

то усредненная для задачи (3.8) система такова:

$$(3.9) \quad \bar{v}_\tau = D_{11}^1 \bar{v} \bar{v}_y + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{ G_{01}^1(y + c_1 s) \bar{w}(\tau, y + 2c_1 s) + \\ + G_{02}^1(y + c_1 s) \bar{w}_z(\tau, y + 2c_1 s) \} ds \\ \bar{w}_\tau = D_{22}^2 \bar{w} \bar{w}_z + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{ G_{10}^2(z - c_1 s) \bar{v}(\tau, z - 2c_1 s) + \\ + G_{20}^2(z - c_1 s) \bar{v}_y(\tau, z - 2c_1 s) \} ds \\ y = x - c_1 t, \quad z = x + c_1 t$$

Таким образом, звуковые волны в упругой неоднородной трубе в нулевом приближении описываются выражениями

$$u = \varepsilon [\alpha \bar{v}(\varepsilon t, x - c_1 t) + \bar{w}(\varepsilon t, x + c_1 t)] \\ \rho = \rho_0 + \varepsilon [\bar{v}(\varepsilon t, x - c_1 t) - \alpha^{-1} \bar{w}(\varepsilon t, x + c_1 t)]$$

где нелинейные волны  $\bar{v}$  и  $\bar{w}$  находятся из системы (3.9).

4. Если интегральные члены в (3.9) равны нулю, то решение распадается на простые волны, описываемые уравнениями вида (2.7). Это происходит в случае  $v_0, w_0 \in C_\infty^1$ . Для начальных данных из  $C_\Delta^1$  или  $C_{(v_l)}^1$  условия распада аналогичны (2.9), (2.10). Распад, кроме того, происходит при любых начальных данных в случае однородной трубы ( $S = S(p)$ ). Это видно из (3.4) и (3.9).

Пусть  $v_0(x), w_0(x) \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$  и функции  $A, B$  представимы в виде рядов Фурье

$$(4.1) \quad \begin{aligned} A(x) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} A_l \exp\{i\alpha_l x\} \\ B(x) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} B_l \exp\{i\beta_l x\} \end{aligned}$$

Если среди показателей Фурье  $\alpha_l, \beta_l$  в (4.1) имеются четные числа, то условия распада типа (2.9), (2.10) не выполнены и задача резонансна. Тем не менее распад может происходить и в этом случае.

Интегрирование по частям в (3.9) приводит к достаточному условию распада

$$G_{01}^1 = 1/2 G_{02x}^1, \quad G_{10}^2 = 1/2 G_{20x}^2$$

что равносильно

$$(4.2) \quad A_x(\gamma + 1) + B_x \gamma \rho_0 = 0$$

Для анализа выражения (4.2) необходимо знать явный вид коэффициентов (3.4) в (3.3). В случае круглой трубы с тонкими стенками площадь  $F$  ее поперечного сечения выражается формулой ([12], с. 105)

$$(4.3) \quad \frac{F - F_0}{F_0} = \frac{d}{\delta} \frac{p - p_0}{E} + \frac{1}{4} \left( \frac{d}{\delta} \frac{p - p_0}{E} \right)^2, \quad F_0 = \frac{\pi d^2}{4}$$

где  $d$  — внутренний диаметр,  $\delta$  — толщина стенок,  $E$  — модуль упругости материала стенок трубы,  $F_0$  — площадь поперечного сечения трубы при  $p = p_0$ . Изложенная выше теория позволяет изучить поведение звуковых волн в слабо неоднородной трубе:

$$(4.4) \quad d = d_0 + \varepsilon d_1(x), \quad \delta = \delta_0 + \varepsilon \delta_1(x), \quad E = E_0 + \varepsilon E_1(x)$$

Из (4.3) и (4.4) после элементарных преобразований получаем

$$A(x) = \frac{\pi}{2} d_0 d_1(x), \quad B(x) = \frac{\pi P_0}{4} \frac{d_0^3}{\delta_0 E_0} \left( \frac{3 d_1(x)}{d_0} - \frac{E_1(x)}{E_0} - \frac{\delta_1(x)}{\delta_0} \right)$$

и из (4.2) вытекает условие распада

$$\frac{d_{1x}}{d_0} \left[ 5 + 4 \left( \frac{d_0}{\delta_0 E_0} P_0 \rho_0 \right)^{-1} \right] = \frac{E_{1x}}{E_0} + \frac{\delta_{1x}}{\delta_0}$$

5. Если распад на простые волны не происходит, то задача (3.9) представляет самостоятельный интерес.

Пусть  $v_0(x), w_0(x) \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ , функции  $A(x), B(x)$  представимы в виде (4.1) и среди показателей Фурье  $\alpha_l, \beta_l$  имеются четные числа. Тогда в системе (3.9) слагаемые, вычисляемые предельным переходом при  $T \rightarrow \infty$ , принимают вид

$$\begin{aligned} & - \frac{\gamma \rho_0}{4S_0} \sum \frac{\Phi_{lk}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{im(2y + p)\} \bar{w}(\tau, y + p) dp \\ & \frac{P_0}{4\rho_0 S_0} \sum \frac{\Phi_{lk}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{im(2z - p)\} \bar{v}(\tau, z - p) dp \end{aligned}$$

где  $\varphi_{lk} = A_l (\gamma + l) + B_k \gamma \rho_0$ ; суммирование ведется по  $l, k$ :  $\alpha_l = \beta_k = 2m \neq 0$ .

Пусть для простоты в (4.1) оставлены только по три гармоники:

$$\begin{aligned} |A(x) - \sum_{j=1}^3 (a_j^s \sin(jx) + a_j^c \cos(jx))| &\ll 1 \\ |B(x) - \sum_{j=1}^3 (b_j^s \sin(jx) + b_j^c \cos(jx))| &\ll 1 \end{aligned}$$

Тогда заменой переменных

$$\bar{v}(\tau, y) = -\alpha^{-1} u^+(\tau, y), \quad \bar{w} = u^-$$

задача (3.9) приводится к виду

$$(5.1) \quad u_{\tau}^{\pm} \pm e u^{\pm} u_x^{\pm} = \frac{d}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2x - \varphi - s) u^{\mp}(\tau, x - s) ds$$

$$u^{\pm}(0, x) = u_0^{\pm}(x) \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$$

$$u_0^+(x) = -1/2 (\bar{u}_1(x) + \alpha \bar{\rho}_1(x)), \quad u_0^-(x) = w_0(x)$$

$$e = -D_{22}^2, \quad d = 1/4 c_1 S_0^{-1} (A_2^2 + B_2^2)$$

$$A_2 = a_2^c (\gamma + 1) + b_2^c \gamma \rho_0, \quad B_2 = a_2^s (\gamma + 1) + b_2^s \gamma \rho_0$$

$$\varphi = \arccos [A_2 / (A_2^2 + B_2^2)]$$

Для уравнений системы (5.1), близких по своему виду к известному в теории нелинейных волн уравнению Уизема ([5], с. 459) в периодическом случае, могут исследоваться вопросы, связанные с опрокидыванием волн [13, 14]. Система (5.1) учитывает кроме проявляющихся в упомянутом опрокидывании нелинейных эффектов, еще и изменения амплитуд волн, связанные с их резонансным взаимодействием. Построенное приближение  $(u^+, u^-)$  аппроксимирует точное решение задачи (3.8) или (3.1) — (3.3) в области  $(\tau, x) \in \Omega = [0, \tau_0] \times [0, 2\pi]$ ,  $\tau_0 = \text{const} > 0$  существования гладких решений (оценка (2.4) не обоснованна при  $\tau > \tau_0$ ).

Поскольку в (5.1)  $\varepsilon$  явно не входит и  $\text{mes } \Omega = O(1)$ , задача может решаться известными численными методами ([4], гл. III).

При  $0 \ll \tau \ll \tau_0$  опрокидывание волны еще не наступает, но уже существенно изменяются начальные профили и амплитуды волн.

На фиг. 1—4 приведены графики решений задачи (5.1) при  $e = 1$ ,  $u_0^+(x) \equiv \sin x$ ,  $\varphi = 0$  (фиг. 1—3),  $\varphi = \pi/3$  (фиг. 4); значения пар  $(d, u_0^-(x))$  для фиг. 1—4 соответственно таковы:  $(4, 0)$ ,  $(1/2, \sin x)$ ,  $(3, -1/2 \sin 2x)$ ,  $(4, \sin x)$ . Профили волн  $u^+(\tau_i, x)$  при  $\tau_1 = 0,4$  и  $\tau_2 = 0,8$  представлены сплошными кривыми 1 и 2, профили волн  $u^-(\tau_i, x)$  — штриховыми кривыми 1 и 2 соответственно.

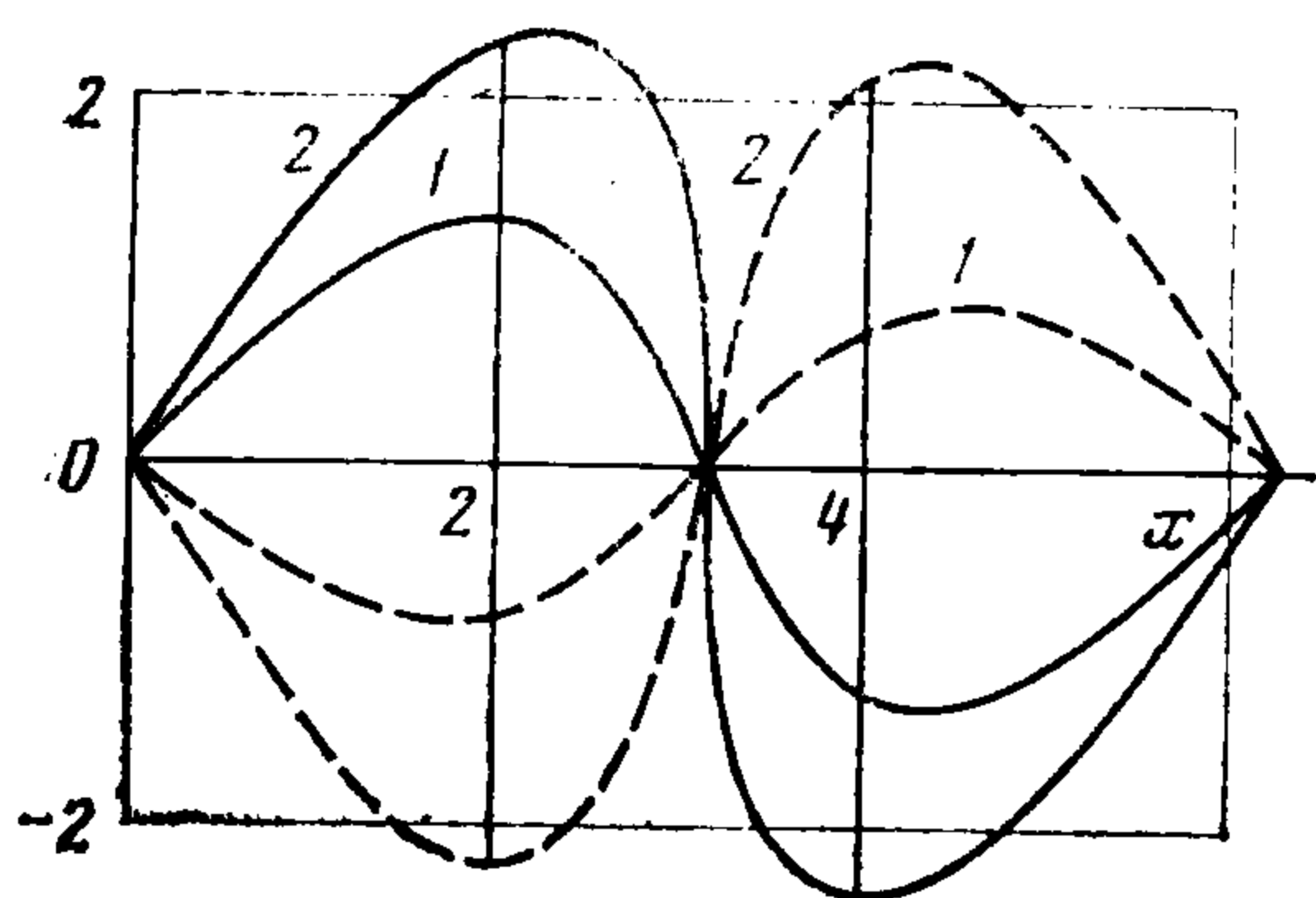
Графики показывают, насколько многообразнее и сложнее поведение решений задачи (5.1) по сравнению с простыми волнами вида (2.7).

6. При исследовании реальных волновых процессов нередко приходится учитывать эффекты вязкости, теплопроводности, трения, что выражается наличием в уравнениях вторых и более высоких производных. Схема построения усредненной системы (2.3) может применяться и к таким задачам.

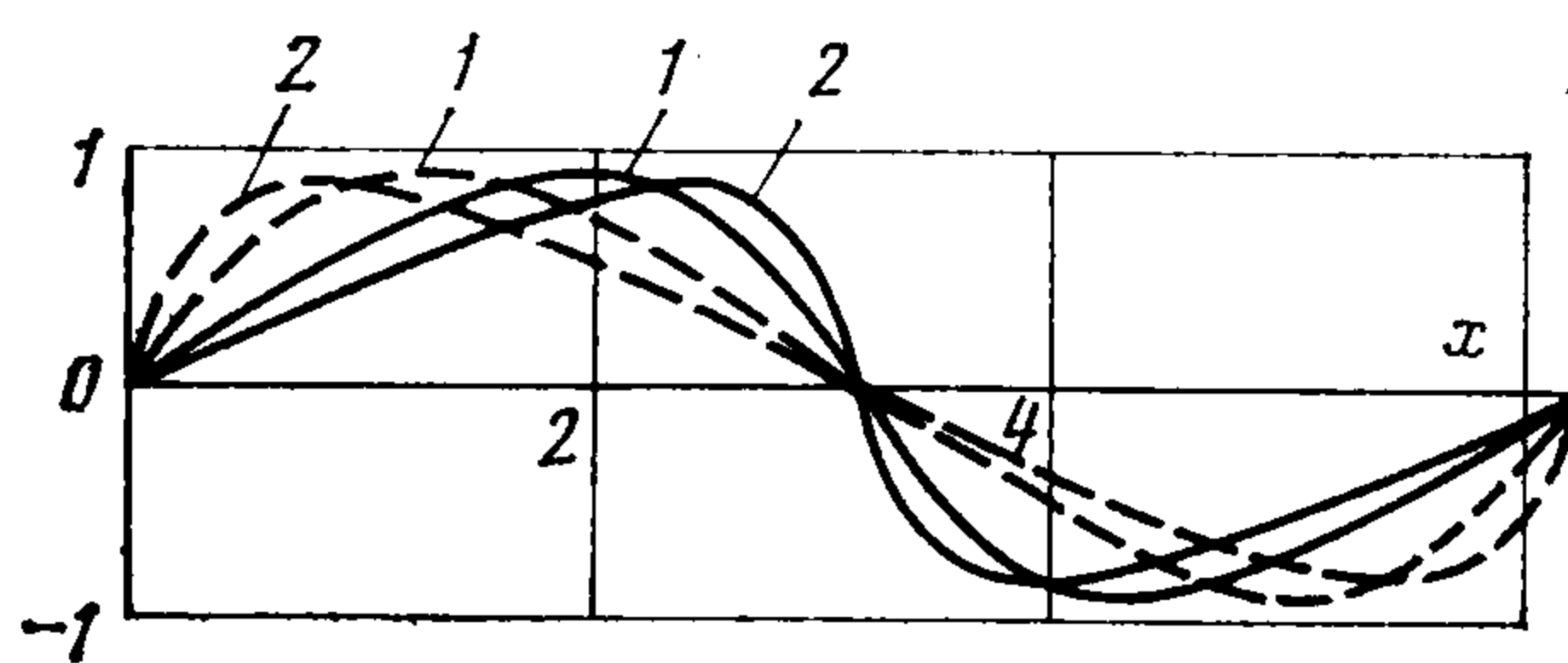
Уравнения плоских длинных волн над неровным дном в безразмерных переменных имеют вид ([15], с. 94).

$$(6.1) \quad \begin{aligned} z_t + (Hu)_x &= \varepsilon \{ 1/6 (H^3 u_{xx})_x - 1/2 (Hu)_{xxx} - \\ &- HH_x (Hu)_{xx} - (zu)_x \} \\ u_t + z_x &= -\varepsilon u u_x, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \end{aligned}$$

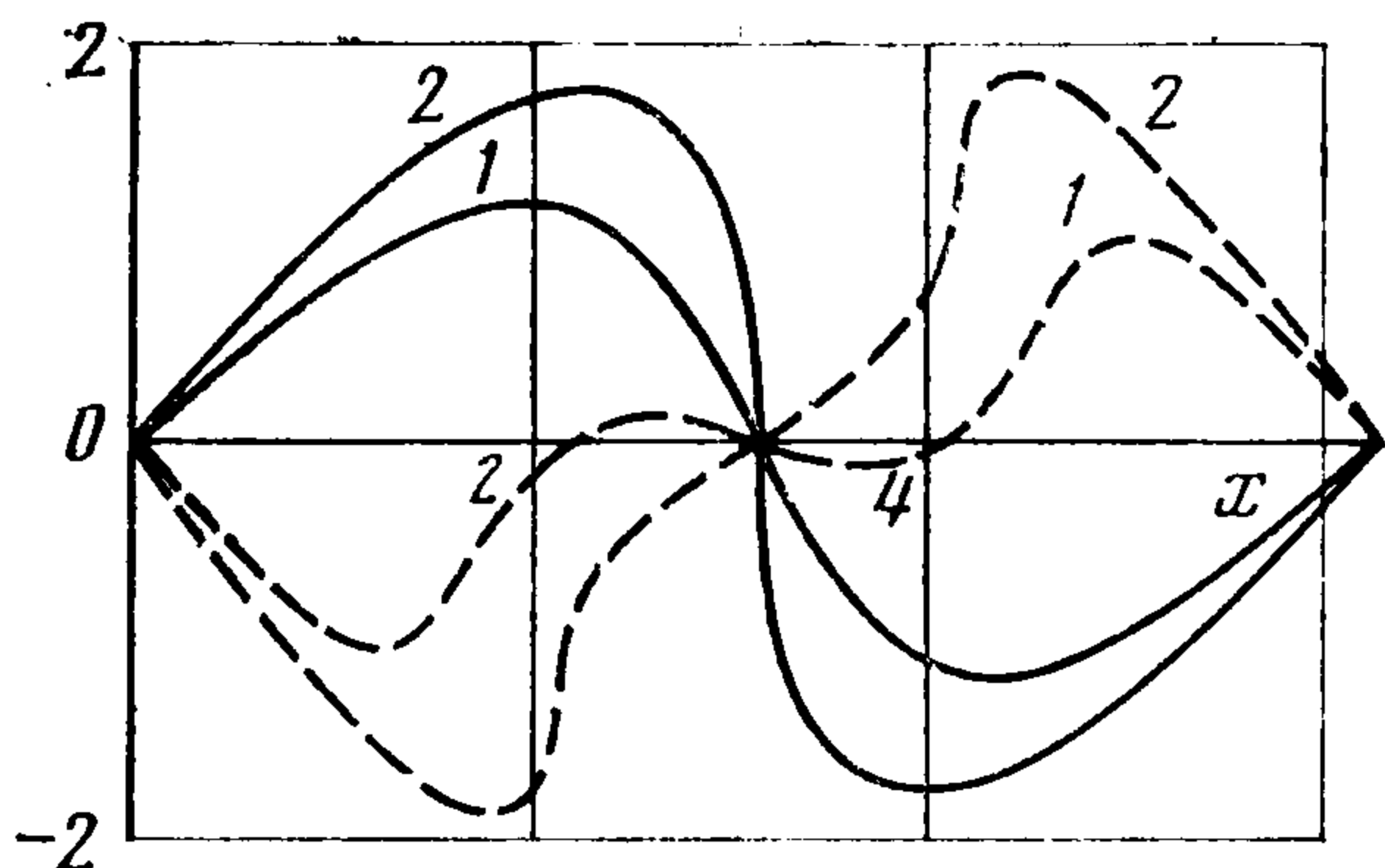
где  $H(x, \varepsilon)$  — заданное безразмерное уравнение дна.



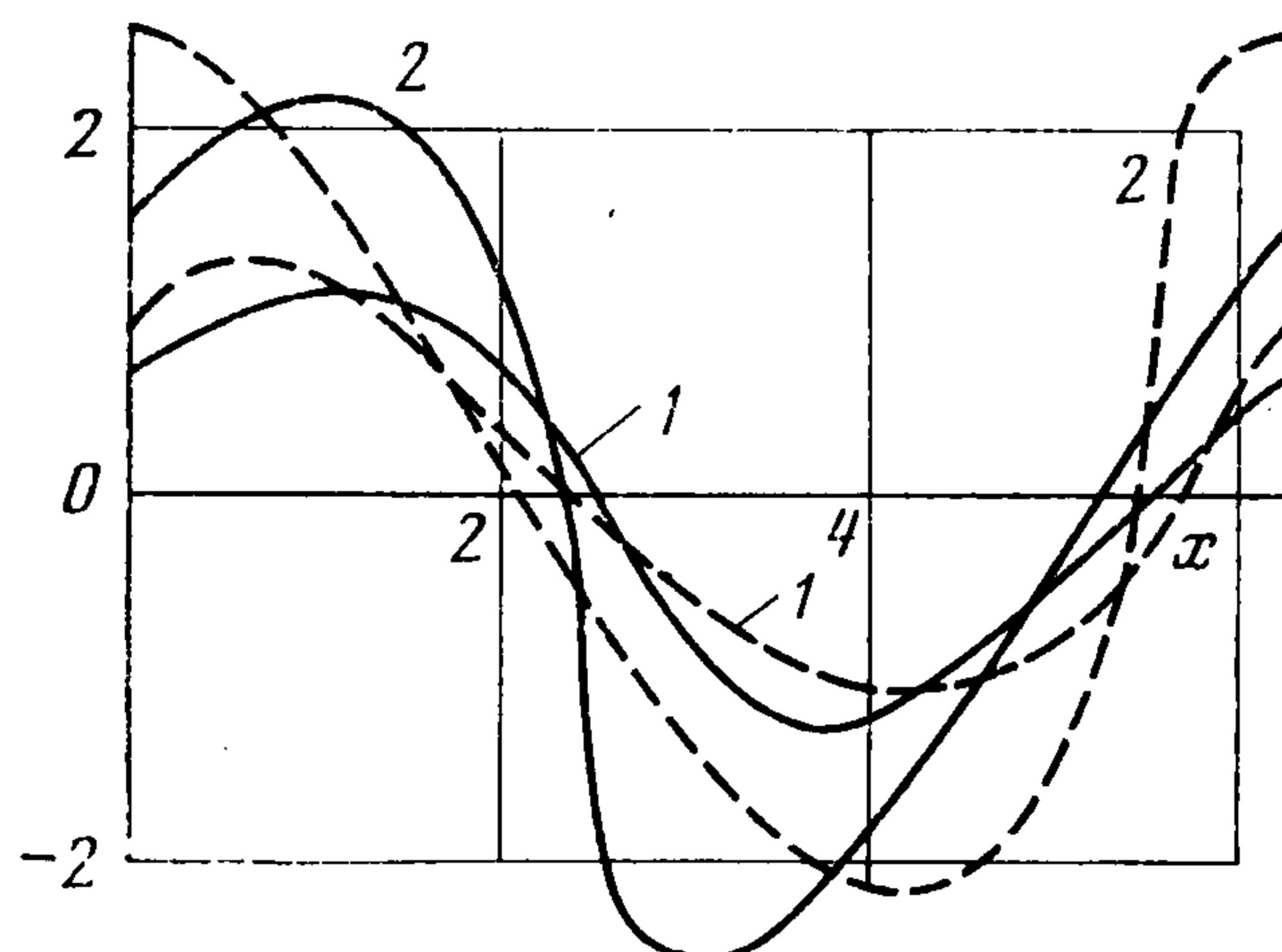
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Если  $H(x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon h(x)$ , то преобразованием  $u = v^+ - v^-$ ,  $z = v^+ + v^-$  система (6.1) приводится к виду

$$(6.2) \quad v_t^\pm \pm v_x^\pm = \frac{1}{2}\varepsilon (f \mp g) + o(\varepsilon)$$

$$f = -\frac{1}{3}(v_{xxx}^+ - v_{xxx}^-) - 2(v_x^+v^+ - v_x^-v^-) - [h(v^+ - v^-)]_x$$

$$g = (v^+ - v^-)(v_x^+ - v_x^-)$$

Усредненная система для (6.2) имеет вид

$$(6.3) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}^\pm \pm \frac{3}{2} \bar{v}^\pm \frac{\partial}{\partial y^\pm} \bar{v}^\pm \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{(\partial y^\pm)^3} \bar{v}^\pm =$$

$$= \pm \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial y^\pm} [h(y^\pm \pm p) \bar{v}^\pm(\tau, y^\pm \pm 2p)] dp,$$

$$y^\pm = x \mp t$$

Если, например,  $h = \text{const}$ , то правая часть (6.3) равна нулю и система распадается на два скалярных уравнения Кортевега — де Фриза, совпадающих с получаемым методом редукции.

Автор благодарит А. Л. Штараса за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Штарас А. Л. Асимптотическое интегрирование слабонелинейных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1977. Т. 237. № 3. С. 525—528.
2. Крылов А. В. Об асимптотическом интегрировании гиперболических систем первого порядка // Лит. мат. сб. 1983. Т. 23. № 4. С. 12—17.
3. Крылов А. В. Асимптотическое интегрирование слабонелинейных систем с частными производными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 1. С. 72—79.
4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука. 1978. 687 с.
5. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977. 622 с.
6. Taniuti T. Reductive perturbation method and far fields of wave equations // Suppl. Progr. Theor. Phys. 1974. V. 55. P. 1—35.
7. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир. 1983. 136 с.
8. Энгельбрехт Ю. К., Нигул У. К. Нелинейные волны деформации. М.: Наука. 1981. 256 с.

9. *Калякин Л. А.* Асимптотический распад на простые волны решения возмущенной гиперболической системы уравнений // Дифференциальные уравнения с малым параметром. Свердловск: УНЦ. 1984. С. 36—49.
10. *Калякин Л. А.* Длинноволновая асимптотика решения гиперболической системы уравнений // Мат. сб. 1984. Т. 124. № 1. С. 96—120.
11. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир. 1981. 598 с.
12. *Гинзбург И. П.* Прикладная гидрогазодинамика. Л.: Изд-во ЛГУ. 1958. 338 с.
13. *Габов С. А.* Об уравнении Уизема // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1978. Т. 242. № 5. С. 993—996.
14. *Наумкин П. И., Шишмарев И. А.* О существовании и разрушении волн, описываемых уравнением Уизема // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1986. Т. 288. № 1. С. 90—95.
15. *Алешков Ю. З.* Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во ЛГУ. 1981. 196 с.

Вильнюс

Поступила в редакцию  
10.III.1987