

УДК 539.3:534.1]

## О СТРУКТУРЕ КВАЗИПОПЕРЕЧНЫХ УПРУГИХ УДАРНЫХ ВОЛН

Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.

Изучается структура квазипоперечных ударных волн (УВ) в слабоанизотропной среде при наличии диссипации, обусловленной вязкостью. Показано существование структуры у УВ, «ответственной» за неединственность решения автомодельной задачи о волнах, возбуждаемых в полупространстве. Обсуждается вопрос о существовании структуры у остальных квазипоперечных УВ.

При анализе задач газовой динамики [1] и некоторых других задач [2—5] показано, что отбор разрывов, которые должны использоваться для построения решений, во многих случаях не должен ограничиваться только условиями неубывания энтропии и условиями эволюционности. Проверка часто используемого требования существования структуры разрыва [1, 3, 4, 5] особенно важна и интересна в случаях, когда имеет место неединственность решения задач, как в [1—4], так как помогает отобрать единственное решение, которое может реально осуществиться.

При построении решений автомодельных задач в предварительно напряженной или вообще слабоанизотропной упругой среде при заданных начальных деформациях и деформациях на границе полупространства, отличающихся от начальных, была обнаружена [6, 7] неединственность решения для некоторых областей параметров задачи. В построении решений были использованы квазипоперечные УВ, удовлетворяющие условию неубывания энтропии и условиям эволюционности. Можно подозревать, что, как и в [1—4], неединственность решения автомодельных задач является следствием того, что не все указанные УВ обладают структурой, т. е. непрерывным решением некоторой более полной системы уравнений, учитывающей диссипативные процессы, протекающие в узкой зоне, соответствующей разрыву в решении исходных уравнений.

Здесь сделаем общее замечание, касающееся дальнейшего содержания работы, где (как и в [1—4]) рассматривается только стационарная структура УВ. В случаях, когда стационарной структуры нет, а соответствующий разрыв с необходимостью возникает в решении задачи, по-видимому, реализуется нестационарная структура. Хорошо известным примером такого рода является гидравлический прыжок, структура которого турбулентна. В тех же случаях, когда имеется несколько решений задач, по-видимому, следует (как это и делалось в [1—5]) отдавать предпочтение решениям, содержащим разрывы, обладающие стационарной структурой. С этой точки зрения наибольший интерес для исследования стационарной структуры представляют УВ, которые встречаются в решении только в случае неединственности, когда имеется конкурирующее решение, не содержащее УВ этого типа.

Ниже исследуется структура квазипоперечных УВ, для которых необходимые условия существования (эволюционности и неубывания энтропии) выполнены [8, 9]. В качестве диссипативного механизма в динамические уравнения теории упругости добавляются члены, учитывающие дополнительные напряжения, вызванные вязкостью. Это самый простой из диссипативных механизмов, который используется в теории твердого деформируемого тела и обеспечивает непрерывность решений. Можно надеяться, что если неединственность решения автомодельной задачи связана с отсутствием структуры у части разрывов, то это должно было бы обнаружиться уже в этой модели.

1. Рассмотрим движения в виде плоских волн, параллельных некоторой плоскости, которую выберем в качестве координатной плоскости  $x_1x_2$  лагранжевой системы координат  $x_1, x_2, x_3 = x$ . Значения  $x_1, x_2, x$  соответствуют декартовым прямоугольным координатам в недеформированном состоянии среды. Предварительная деформация среды, если она есть, считается однородной:  $\varepsilon_{ij}^0 = \text{const}$ . В рассматриваемой волне компонен-

ты  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$  не меняются. Изменение деформированного состояния в волне будем описывать функциями  $\partial w_i / \partial x = u_i(x, t)$ , где  $w_i$  — компоненты вектора перемещения. При этом систему уравнений вязкоупругой среды можно записать в виде

$$(1.1) \quad \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = f_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial v_i}{\partial x} \right), \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j}$$

Здесь  $\rho_0$  — плотность среды в недеформированном состоянии,  $v_i = \partial w_i / \partial t$  — компоненты вектора скорости,  $\Phi = \rho_0 U(\varepsilon_{ij}, S)$  — упругий потенциал,  $U$  и  $S$  — внутренняя энергия и энтропия единицы массы,  $\tau_{ij}$  — тензор конечных деформаций Грина,  $v$  — кинематический коэффициент вязкости. Здесь не выписано энергетическое уравнение, которое позволяет находить изменение энтропии  $S$  в течении. Для волн малой амплитуды это изменение мало и не оказывает влияния на динамические уравнения (1.1) [8—10].

Если эффекты нелинейности и анизотропии малы, для квазипоперечной волны можно, воспользовавшись третьим и шестым уравнениями (1.1), приближенно выразить  $u_3$  и  $v_3$  через  $u_1$  и  $u_2$  и привести систему (1.1) к виду [11] (см. также [12], где аналогичная операция была сделана при  $v = 0$  для простых волн в изотропном теле)

$$(1.2) \quad \rho_0 \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = (\mu \delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \frac{\partial u_\beta}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x}, \quad h_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

Здесь  $F = F(u_1, u_2)$  — функция, выражающаяся через  $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ . Если анизотропия начального состояния среды обусловлена только начальной деформацией, а в недеформированном состоянии среда изотропна и ее упругий потенциал можно взять в виде разложения [12]

$$(1.3) \quad \Phi = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 + \beta I_1 I_2 + \gamma I_3 + \delta I_1^3 + \eta I_2^2 +$$

$$+ \rho_0 T_0 (S - S_0)$$

$$I_1 = \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad I_3 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}$$

функция  $F(u_1, u_2)$  имеет вид [10]

$$(1.4) \quad F(u_1, u_2) = \frac{1}{2} (g_{11}^\circ u_1^2 + g_{22}^\circ u_2^2) - \frac{1}{8} \kappa (u_1^2 + u_2^2)^2$$

$$\kappa = \mu + (\mu + \beta + \frac{3}{2} \gamma)^2 / (\lambda + \mu) - 2\eta$$

$$g_{11}^\circ = \alpha - \mu - g, \quad g_{22}^\circ = \alpha - \mu + g, \quad g = (2\mu - \frac{3}{2} \gamma) (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})$$

$$\alpha = \mu + 2b I_1^\circ - (\mu + \frac{3}{4} \gamma) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad 2b = \lambda + 2\mu +$$

$$+ \beta + \frac{3}{2} \gamma$$

Как следует из выражения (1.4), величина  $g$  — единственный параметр, вводящий в решение анизотропию, вызванную предварительной деформацией. Как показано в [10], в случае малой анизотропии общего вида функция  $F$  будет по-прежнему определяться равенством (1.4), но с другими  $g_{11}^\circ$  и  $g_{22}^\circ$ .

2. Исследуем структуру квазипоперечных разрывов. Пусть  $W$  — скорость разрыва. Будем разыскивать решения системы (1.2) вида  $u_\alpha = u_\alpha(\xi)$ ,  $v_\alpha = v_\alpha(\xi)$ ,  $\xi = -x + Wt$ ,  $\alpha = 1, 2$ , такие, что  $u_\alpha$  стремятся к постоянным значениям при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Очевидно, что при  $v \rightarrow 0$  эти решения переходят в разрывы, изменение величин в которых совпадает с из-

менением величин в соответствующей квазипоперечной УВ [10]. Функции  $u_\alpha(\xi)$  и  $v_\alpha(\xi)$  должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \rho_0 W \frac{dv_\alpha}{d\xi} &= -(\mu\delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \frac{du_\beta}{d\xi} + \nu\rho_0 \frac{d^2v_\alpha}{d\xi^2} \\ -\frac{dv_\alpha}{d\xi} &= W \frac{du_\alpha}{d\xi}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \end{aligned}$$

Функции  $v_\alpha$  можно исключить из системы, а уравнения один раз проинтегрировать по  $\xi$ . Используя то, что  $h_{\alpha\beta}$  представляют собой вторые производные от  $F$ , уравнения можно привести к виду

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \rho_0 \nu W \frac{du_\alpha}{d\xi} &= \frac{\partial q}{\partial u_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \\ q &= 1/2 (\lambda_0 W^2 - \mu) (u_1^2 + u_2^2) - F + A_1 u_1 + A_2 u_2 \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования  $A_\alpha$  представляют собой потоки импульса в направлении осей  $x_\alpha$  и могут быть определены из условий при  $\xi = -\infty$ , т. е. перед скачком:  $u_1 = U_1$ ,  $u_2 = U_2$ ,  $(du_\alpha/d\xi)_\infty = 0$ . Отметим, что уравнения (2.1) означают, что интегральные кривые ортогональны линиям  $q = \text{const}$ . В силу уравнений (2.1)

$$\frac{dq}{d\xi} = \frac{\partial q}{\partial u_\alpha} \frac{du_\alpha}{d\xi} = (\rho_0 \nu W)^{-1} \left[ \left( \frac{du_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{du_2}{d\xi} \right)^2 \right] > 0$$

Заметим, что при написании уравнений (1.2) вязкость принималась скалярной. При анизотропной вязкости вязкий член в этом и последующих уравнениях изменил бы вид, причем  $\nu du_\alpha/dx$  и  $\nu du_\alpha/d\xi$  в уравнениях (2.1) заменятся на  $\nu_{\alpha\beta} du_\beta/dx$  и  $\nu_{\alpha\beta} du_\beta/d\xi$  с положительно-определенной матрицей  $\nu_{\alpha\beta}$ . При произвольной матрице  $\nu_{\alpha\beta}$  интегральные кривые новых уравнений (2.1) могут образовывать любой угол с линиями  $q = \text{const}$ , но неравенство  $dq/d\xi > 0$  сохранится.

Используя явный вид функции  $F(u_1, u_2)$ , получим

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \rho_0 \nu W \frac{du_1}{d\xi} &= \left[ \rho_0 W^2 - \alpha + \frac{\kappa}{2} (u_1^2 + u_2^2) + g \right] u_1 + A_1 \equiv L(u_1, u_2) \\ \rho_0 \nu W \frac{du_2}{d\xi} &= \left[ \rho_0 W^2 - \alpha + \frac{\kappa}{2} (u_1^2 + u_2^2) - g \right] u_2 + A_2 \equiv M(u_1, u_2) \\ A_1 &= -U_1 (\rho_0 W^2 - \alpha + 1/2 \kappa R^2 + g) \\ A_2 &= -U_2 (\rho_0 W^2 - \alpha + 1/2 \kappa R^2 - g), \quad R^2 = U_1^2 + U_2^2 \end{aligned}$$

Чтобы задача о структуре имела решение, у системы (2.2) должны существовать интегральные кривые, соединяющие на плоскости  $u_1 u_2$  точку  $A(U_1, U_2)$ , представляющую состояние перед разрывом ( $\xi = -\infty$ ), с точкой  $u_1, u_2$ , изображающей состояние за скачком ( $\xi = +\infty$ ), в которой  $(du_\alpha/d\xi)_\infty = 0$ . Поэтому прежде всего найдем стационарные точки системы (2.1), где  $du_\alpha/d\xi = 0$ . Одна из них соответствует состоянию перед скачком, остальные — возможным состоянием за скачком при заданном значении  $W$ , так как они соответствуют тем же потокам импульса в направлении осей  $x_1$  и  $x_2$ . На линиях, где выполняется одно из равенств  $M(u_1, u_2) = 0$ ,  $L(u_1, u_2) = 0$  (изоклинах), касательные к интегральным кривым параллельны соответственно осям  $u_1$  и  $u_2$ . Исследование вида этих кривых показывает, что для фиксированного состояния перед разрывом в зависимости от величины скорости скачка  $W$  изоклина  $du_\alpha/d\xi = 0$  может состоять из одной или двух ветвей, пересекающих ось  $u_\alpha$  под прямым углом и симметричных относительно нее.

На фиг. 1 представлено одно из возможных положений изоклины  $du_\alpha/d\xi = 0$ . В зависимости от величины  $W$  в выражениях для  $M$  и  $L$  овал и незамкнутая ветвь могут меняться местами. Овал может вообще отсут-

ствовать. Пересечение линий  $L = 0$  и  $M = 0$  дает положение особых точек уравнения (2.3), т. е. стационарных точек системы (2.2).

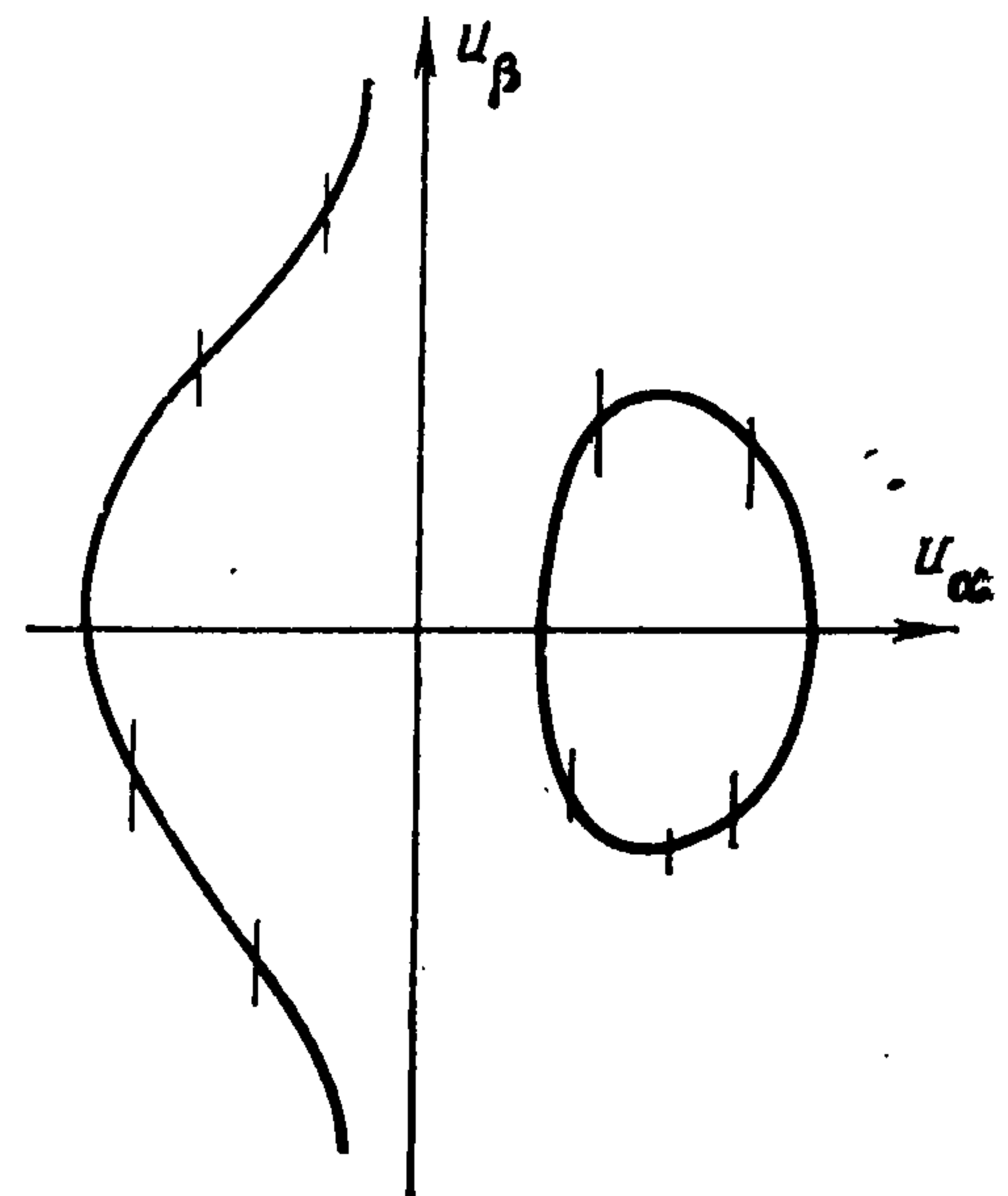
При заданном состоянии с одной стороны разрыва  $u_1 = U_1$ ,  $u_2 = U_2$  и произвольном  $W$  все возможные состояния по другую сторону разрыва были найдены ранее [9] в виде ударной адиабаты, которая изображается на плоскости  $u_1 u_2$  кривой (фиг. 2, а). Зависимость  $W$  от точек на адиабате (фиг. 2, б) указывает соответствие между значением  $W$  и состоянием за скачком (параметр  $\varphi$  на фиг. 2, б — некоторая координата, монотонно изменяющаяся вдоль ударной адиабаты). Поведение УВ существенно зависит от знака упругой константы среды  $\kappa$ . Для определенности во всех дальнейших рассуждениях принято  $\kappa > 0$ . Отмеченные на фиг. 2, б на оси  $W$  величины  $c_\alpha^-$  ( $\alpha = 1, 2$ ) — характеристические скорости медленных и быстрых квазипоперечных волн [12] по состоянию перед скачком, т. е. при  $u_\alpha = U_\alpha$

$$\rho_0 c_{1,2}^2 = \alpha - \frac{1}{2}\kappa \{u_1^2 + u_2^2 \pm [(u_1^2 - u_2^2 + g/\kappa)^2 + 4u_1^2 u_2^2]^{1/2}\}$$

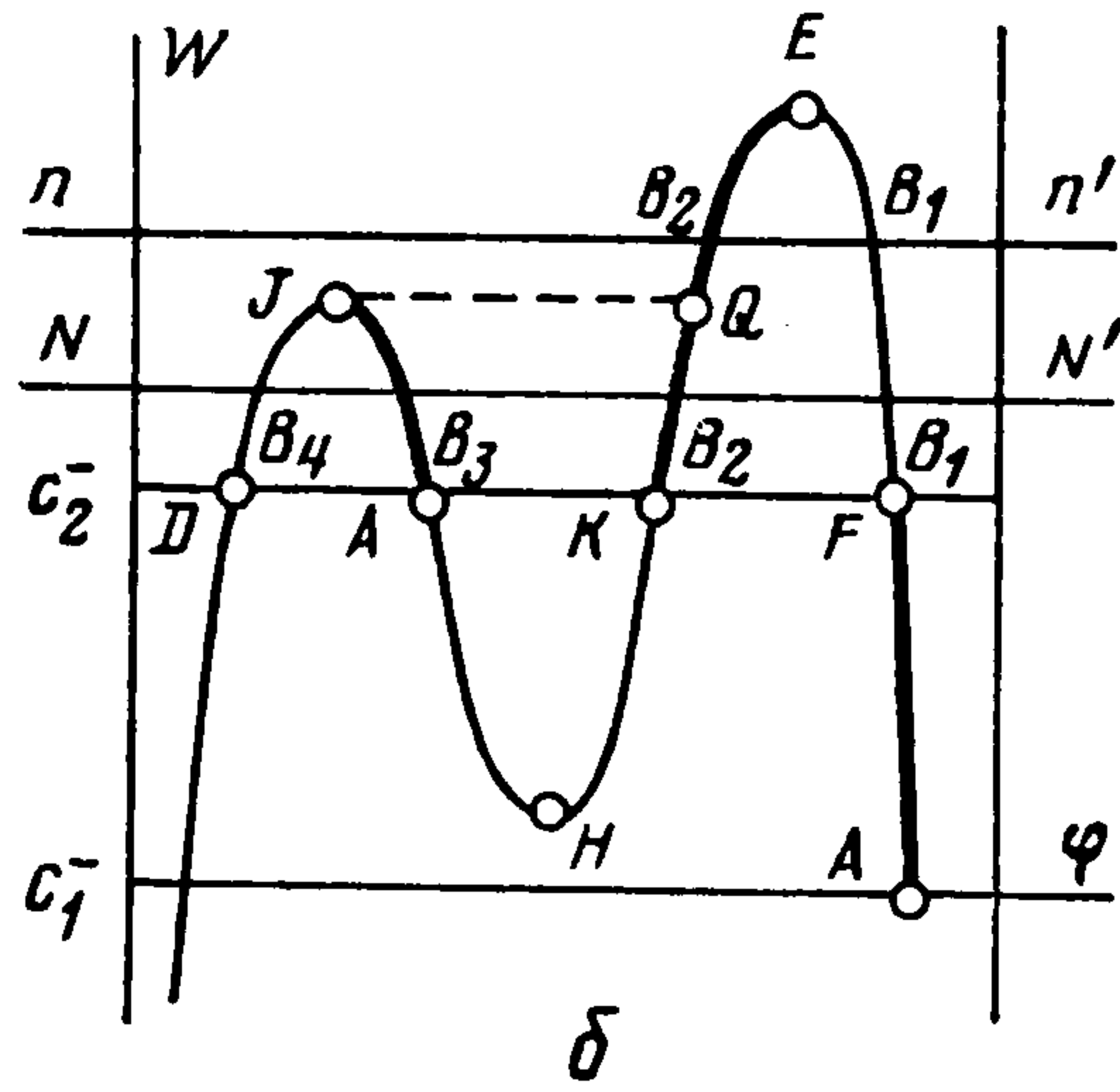
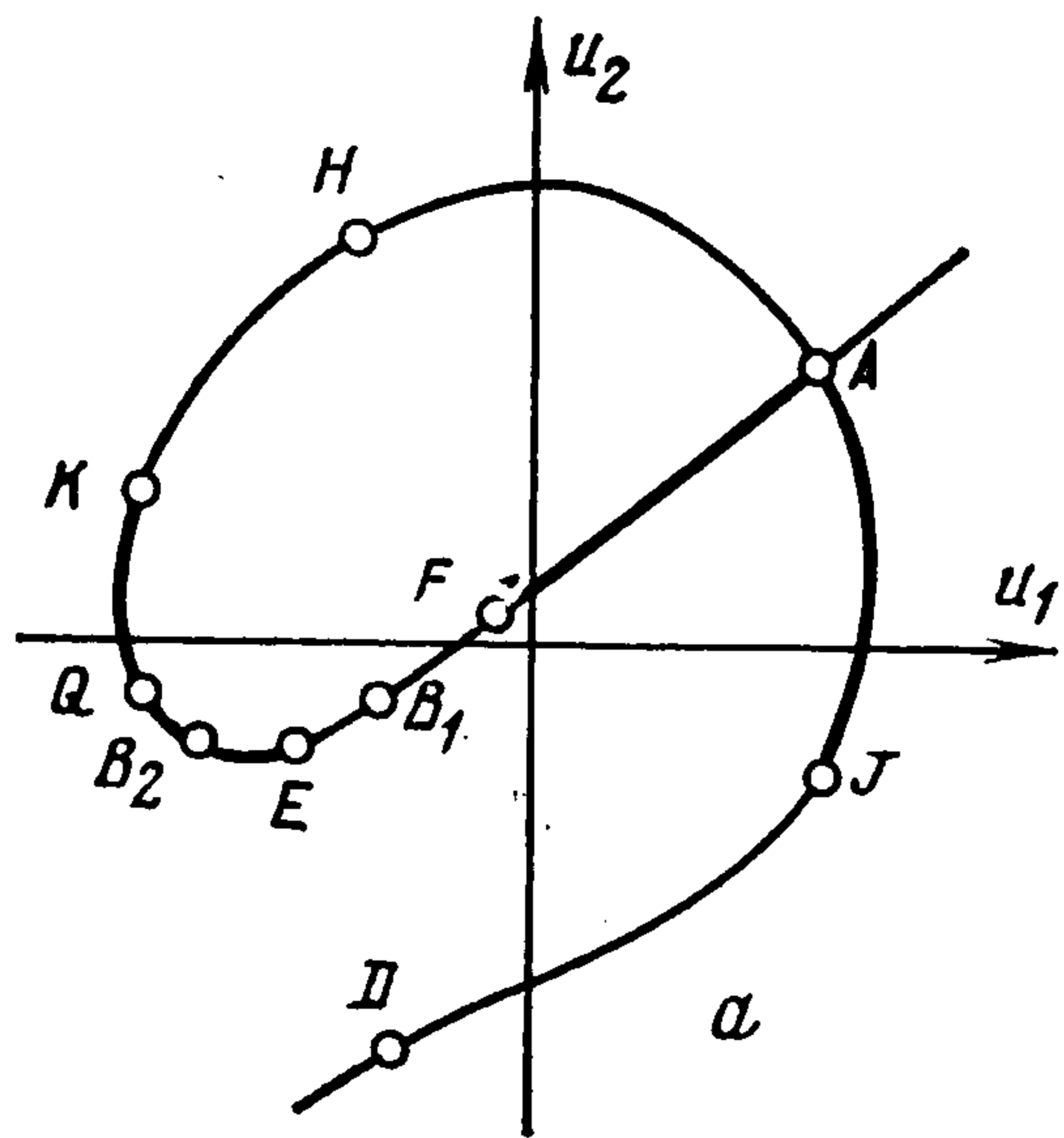
Жирной линией на фиг. 2 отмечены те участки адиабаты и графика скоростей, которые соответствуют эволюционным УВ. Только для этих значений скорости скачка  $W$  надо исследовать структуру разрыва, так как для неэволюционных участков заведомо УВ существовать не могут.

Особый интерес представляют разрывы, для которых  $W_J < W < W_E$  (фиг. 2, б). Эволюционные УВ, удовлетворяющие этому условию, являются быстрыми, и состояние за ними представляется точками отрезка  $QE$  ударной адиабаты (фиг. 2, а, б). Условием существования отрезка  $QE$  является неравенство  $W_J < W_E$ , которое выполняется, если величины  $U_\alpha / (g/\kappa)^{1/2}$  выходят из некоторой ограниченной области значений [9]. Как показано в [6], при этих же условиях автомодельная задача может иметь два решения, причем одно из них содержит УВ, соответствующую одной из точек отрезка  $QE$ . Кроме того, это решение может содержать медленную ударную волну. Второе решение содержит разрывы, соответствующие точкам  $J$  и  $K$  ударной адиабаты, а также может содержать медленную УВ. Все перечисленные разрывы, кроме тех, которые соответствуют точкам отрезка  $QE$ , входят также в другие решения, когда эти решения единственны, и поэтому, как уже было сказано выше, их существование едва ли может подвергаться сомнению. Отсутствие стационарной структуры у этих волн должно было бы означать, что существует нестационарная структура.

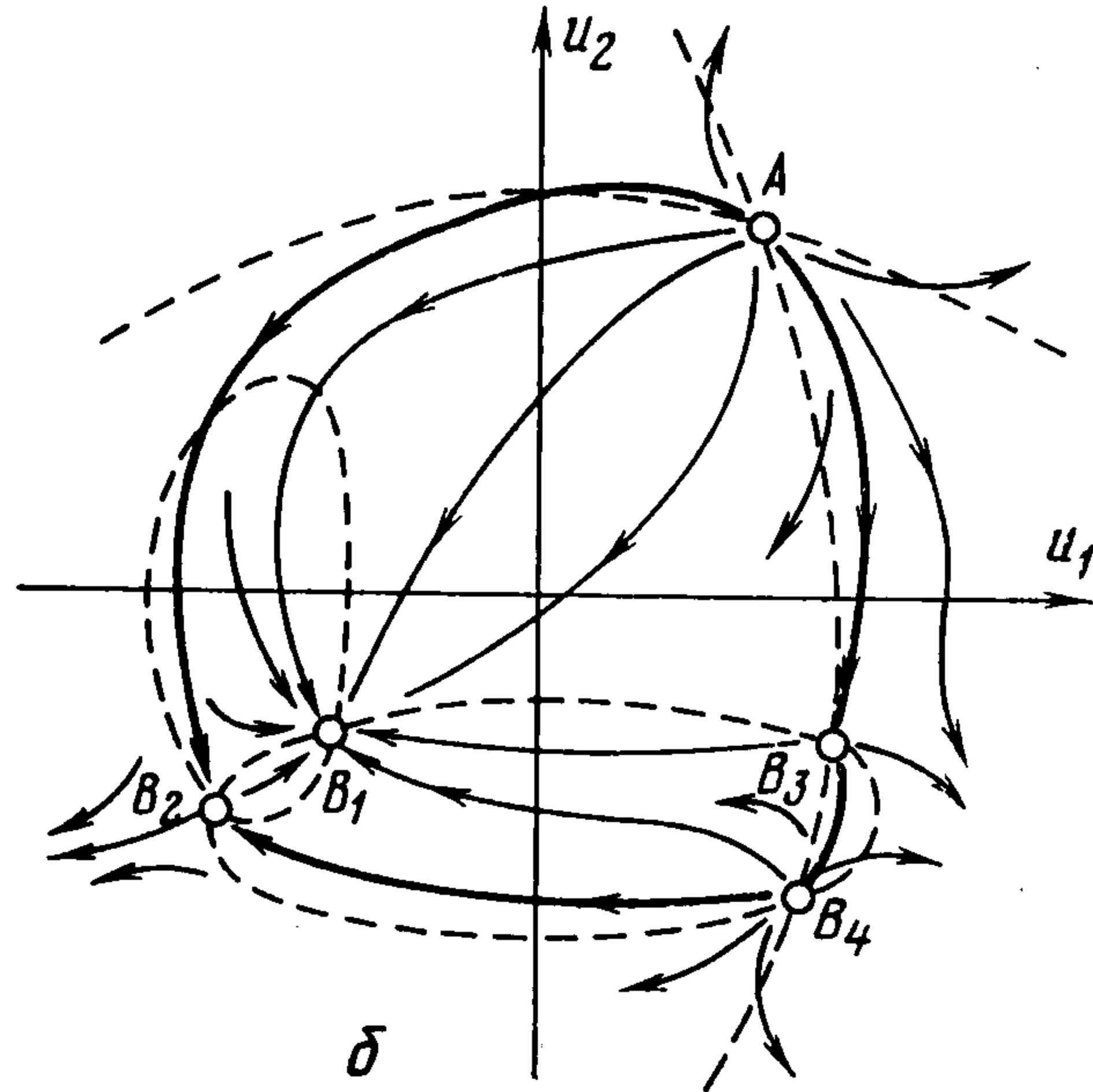
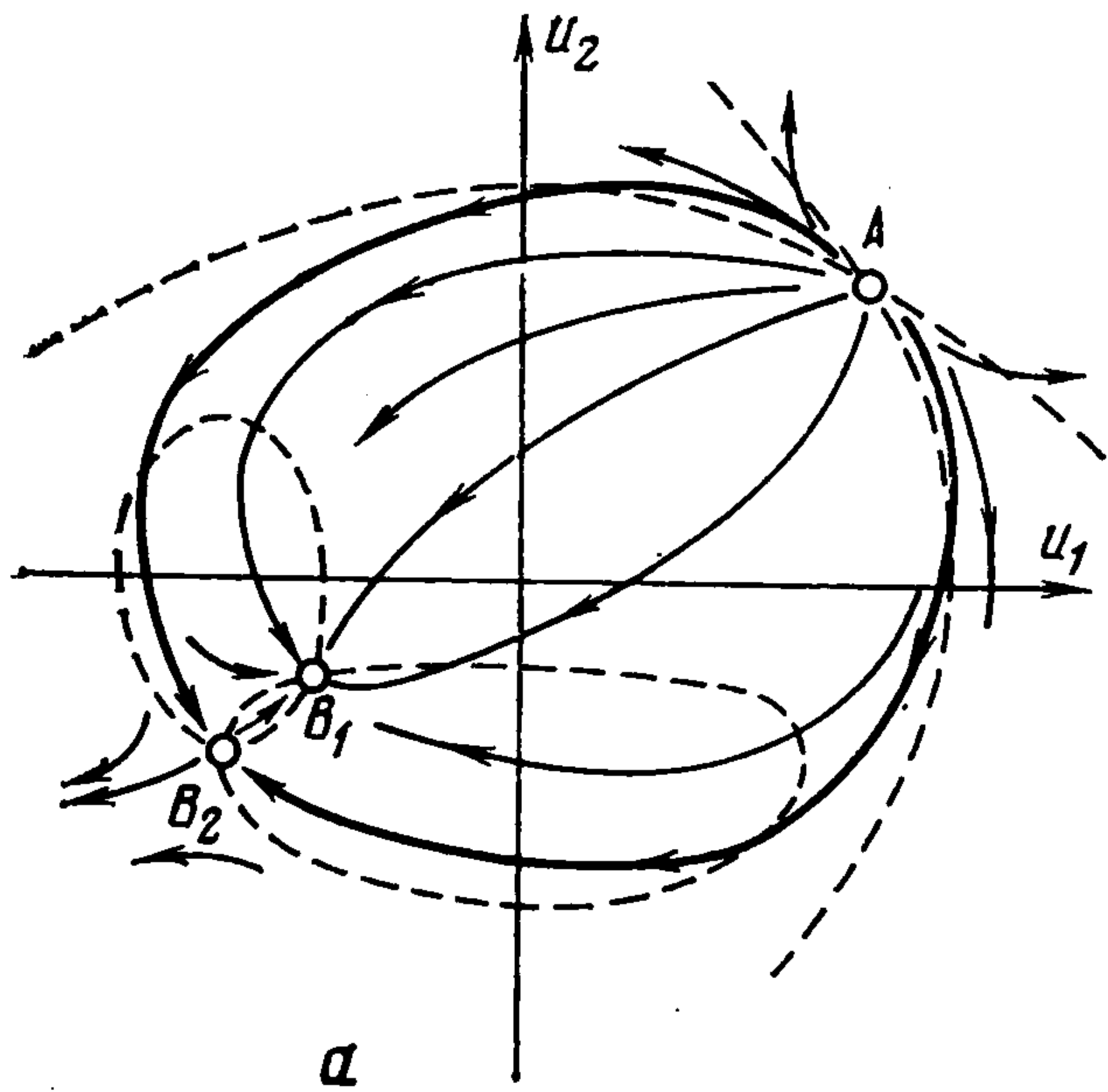
Знание ударной адиабаты и графика для  $W$  помогает установить положение особых точек уравнения (2.3). Выбирая некоторое значение  $W = \text{const}$ , проводим тем самым на фиг. 2, б прямые  $NN'$ ,  $nn'$ , ..., пересекающие график скорости в точках  $B_i$ . Таких точек может быть две ( $B_1, B_2$  на линии  $nn'$ ), четыре ( $B_1, B_2, B_3, B_4$  на линии  $NN'$ ) или ни одной. На ударной адиабате (фиг. 2, а) указанным точкам соответствуют состояния за скачком, обозначенные теми же буквами  $B_i$ . Эти точки вместе с точкой  $A$



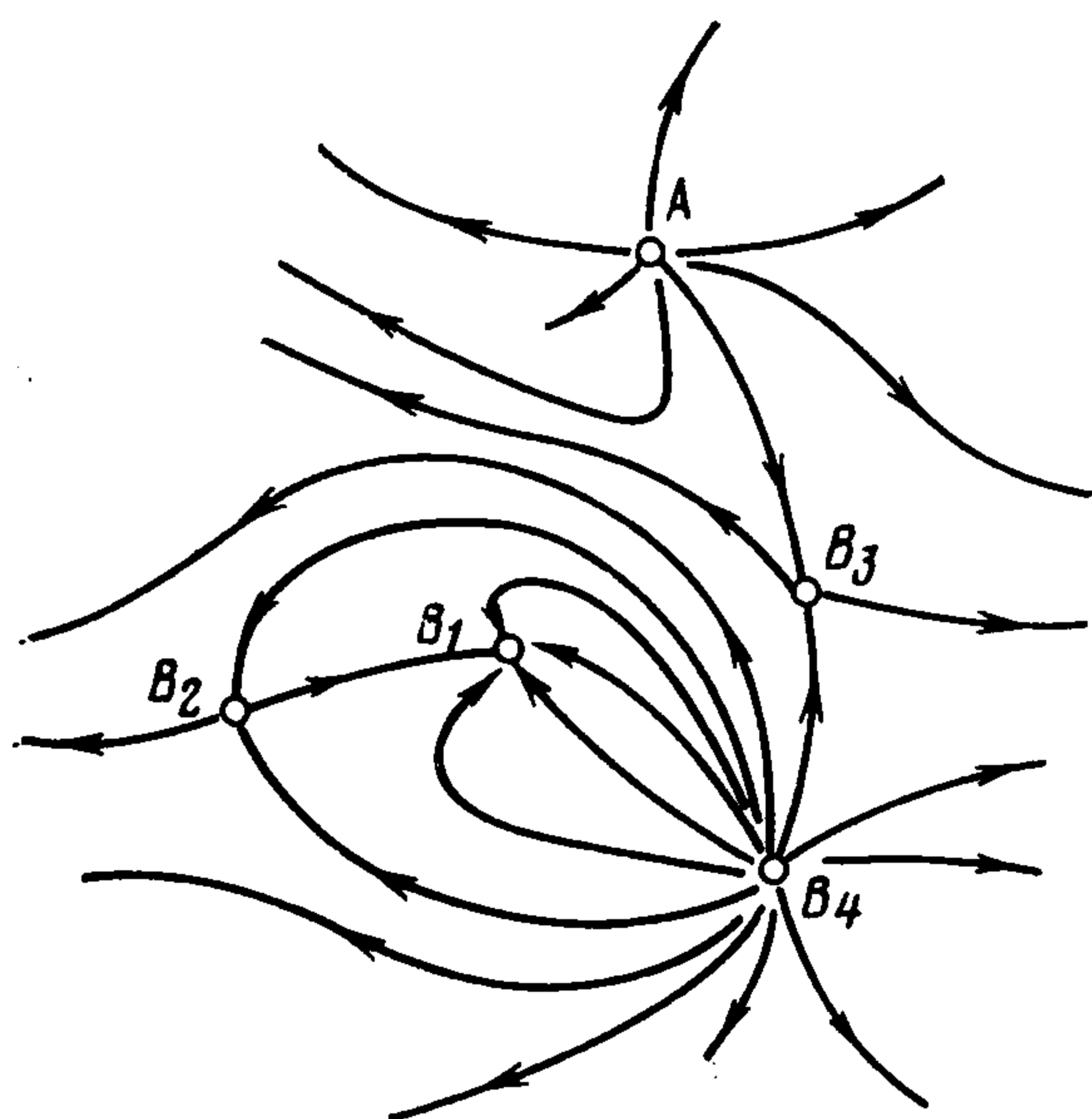
Фиг. 1



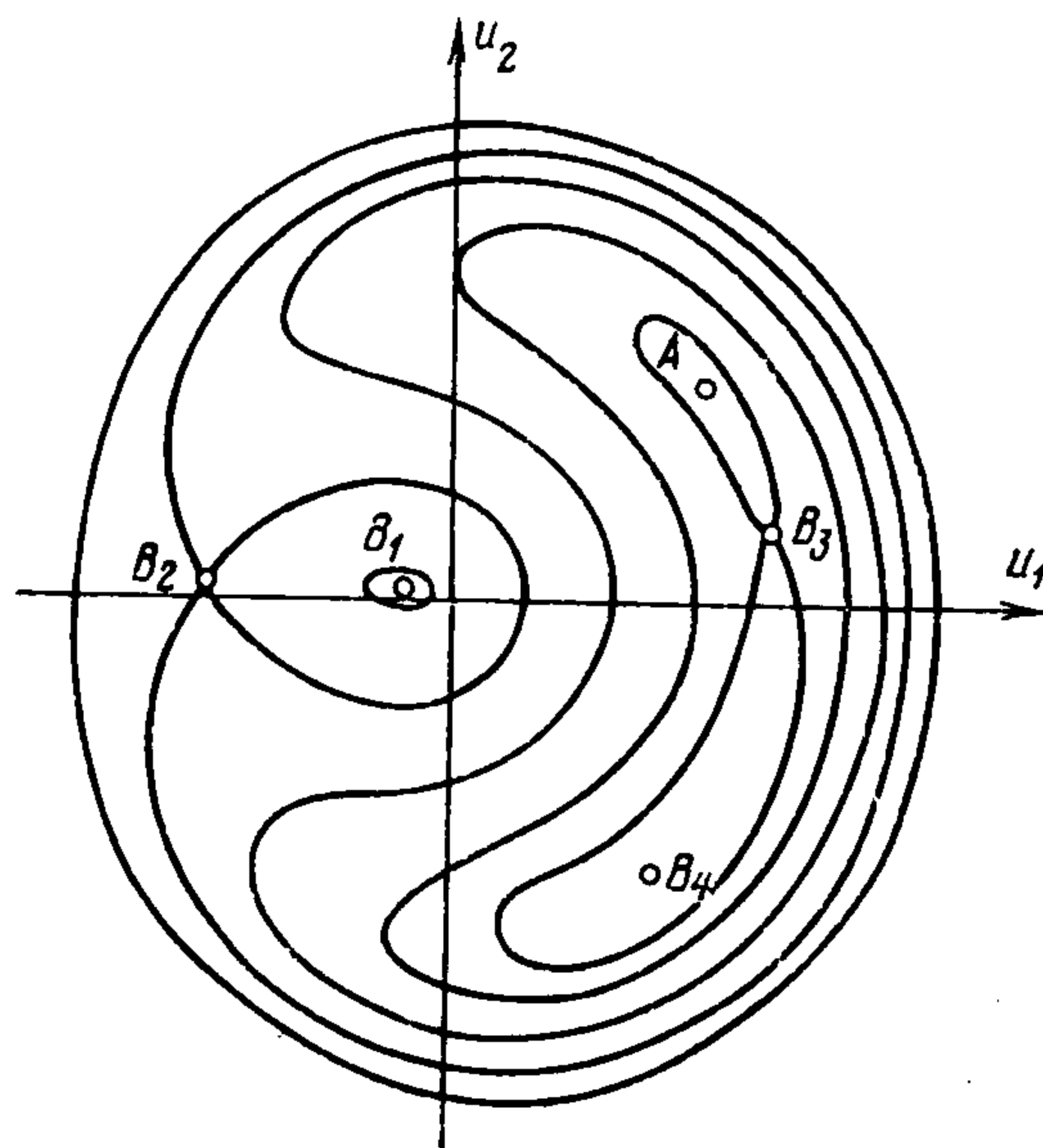
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

и будут стационарными точками системы (2.2) при заданном значении  $W$ . Чтобы знать, какие ударные переходы из начального состояния возможны, надо среди особых точек  $B_i$  указать те (если они есть), в которые приходят при возрастании  $\xi$  интегральные кривые, вышедшие из точки  $A$ . Для этого надо выяснить тип особых точек  $A, B_i$  и исследовать поле направлений  $\{L, M\}$ .

На фиг. 3, *a* штрихами изображены кривые  $L = 0, M = 0$ , которые делят плоскость  $u_1 u_2$  на области с разными наклонами вектора  $\{L, M\}$  для случая, когда  $W_J < W < W_E$ , что соответствует положению точек  $B_1$  и  $B_2$  на фиг. 2, *a, б*. Качественная картина интегральных кривых изобра-

жена на фиг. 3, а сплошными линиями. Точка  $A$  — узел с выходящими интегральными кривыми, точка  $B_1$  — узел с входящими интегральными кривыми, а точка  $B_2$ , принадлежащая отрезку  $QE$ , — седло. Переход  $A \rightarrow B_1$  соответствует неэволюционной УВ, а переход  $A \rightarrow B_2$  — быстрой УВ. Нетрудно понять, что существуют две интегральные кривые, идущие из  $A$  в  $B_2$ . Используя идеи работ [13, 14], покажем, что эти решения будут существовать и при любой положительно-определенной матрице  $\nu_{\alpha\beta}$ , так как при переходе от  $\nu\delta_{\alpha\beta}$  к  $\nu_{\alpha\beta}$  тип особых точек не меняется и два луча сепаратрисы точки  $B_2$ , идущие в сторону убывания  $q$ , должны прийти в точку  $A$ , поскольку в этой точке имеется единственный минимум функции  $q$ , а при удалении от начала координат  $q$  растет.

В случае  $c_2^- < W < W_J$  особые точки  $B_1, B_2, B_3, B_4$  на фиг. 2, б лежат на линии  $NN'$ . Их положение на плоскости  $u_1u_2$  изображено на фиг. 3, б. Эволюционными будут разрывы, соответствующие переходам  $A \rightarrow B_2$  и  $A \rightarrow B_3$ . Теперь на плоскости  $u_1u_2$  имеется два минимума функции  $q$  — в точках  $A$  и  $B_4$  и две седловые точки —  $B_2$  и  $B_3$ . Всегда оказывается, что  $q(B_3) < q(B_2)$ . При этом (и при любой матрице  $\nu_{\alpha\beta}$ ) можно гарантировать существование интегральной кривой, идущей из точки  $A$  в точку  $B_3$ . Действительно, рассмотрим линию  $q(u_1, u_2) = C$ . При значении  $C$ , слегка превышающем  $q(A)$ , эта линия замкнута и охватывает точку  $A$ . Через каждую ее точку проходит интегральная кривая, вышедшая из  $A$ . При увеличении  $C$  поверхность  $q = C$  пройдет через точку  $B_3$ , что гарантирует существование рассматриваемого решения.

Существование интегральной кривой, идущей из точки  $A$  в точку  $B_2$ , зависит от поведения сепаратрисы, выходящей из точки  $B_3$  (седло). Упомянутая сепаратриса разделяет интегральные кривые, вышедшие из узлов  $A$  и  $B_4$ . Если она входит в точку  $B_1$ , как это изображено на фиг. 3, б, то точки  $A$  и  $B_2$  соединяются интегральной кривой. В противном случае (фиг. 4) стационарная структура УВ, соответствующих точкам  $B_2$  (это — быстрые волны, принадлежащие отрезку  $KQ$  ударной адиабаты), не существует.

Поведение сепаратрисы определяется матрицей  $\nu_{\alpha\beta}$ . Поскольку  $q(B_2) > q(B_3) > q(A)$ , можно всегда указать такие  $\nu_{\alpha\beta}$ , что интегральная кривая из  $A$  в  $B_2$  не существует, и такие, для которых эта интегральная кривая существует. Наибольший интерес, естественно, представляет скалярная, т. е. изотропная, вязкость и случай малоанизотропной вязкости. Для этих случаев структура всех эволюционных УВ существует.

Картины линий уровня  $q(u_1, u_2) = \text{const}$  рассчитывались на ЭВМ для всевозможных значений параметров. Из типичной картины (фиг. 5) видно, что для того, чтобы сепаратриса из точки  $B_3$  не попала в точку  $B_1$ , она должна составлять очень малый угол с линиями  $q = \text{const}$ .

Случай  $W_H < W < c_2^-$  отличается от рассмотренного выше тем, что точки  $A$  и  $B_3$  на фиг. 3, б и 4, 5 меняются местами, причем расчеты на ЭВМ подтверждают, что при скалярной или слабо отличающейся от скалярной вязкости структура медленной УВ существует. В случае  $c_1^- < W < W_H$  существование структуры медленной УВ при любой анизотропной вязкости доказывается строго. Точно так же существует стационарная структура для быстрых УВ, соответствующих отрезку  $AJ$  на фиг. 2, а, б.

Таким образом, при изотропной вязкости как в уравнениях (2.1), и в случае, когда вязкость слабо анизотропна, существование стационарной

структуры всех квазипоперечных УВ подтверждается расчетами на ЭВМ. Для УВ, «ответственных» за неединственность решения автомодельной задачи, для медленных УВ при  $c_1^- < W < W_H$  и быстрых УВ, соответствующих участку  $AJ$  ударной адиабаты, существование стационарной структуры доказывается строго при любой анизотропной вязкости.

Аналогичное исследование для сред с  $\kappa < 0$  показывает, что, по крайней мере, для медленных УВ, входящих в состав одного из решений автомодельной задачи в области неоднозначности и не участвующих ни в каких решениях этой задачи для других областей, стационарная структура существует.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Г. Я. К теории ударных волн // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1959. Т. 127. № 1. С. 55—58.
2. Олейник О. А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи мат. наук (УМН). 1959. Т. 14. № 2. С. 159—164.
3. Калашников А. С. Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка без условия выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1959. Т. 127. № 1. С. 27—30.
4. Куликовский А. Г. О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1984. Т. 275. № 6. С. 1349—1352.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике: М.: Наука, 1978. 687 с.
6. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284—291.
7. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространства // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллин: Валгус. 1985. С. 133—145.
8. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 523—534.
9. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 831—840.
10. Бленд Д. Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир. 1972. 183 с.
11. Куликовский А. Г. Об уравнениях, описывающих распространение квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597—604.
12. Свешникова Е. И. Простые волны в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 642—646.
13. Годунов С. К. О понятии обобщенного решения // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1960. Т. 134. № 6. С. 1279—1281.
14. Годунов С. К. О неединственном «размазывании» разрывов в решениях квазилинейных систем // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1961. Т. 136. № 2. С. 272—273.

Москва

Поступила в редакцию  
22.I.1987