Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 6, 1987

УДК 531.19 + 532.51 + 539.3

ПРОБЛЕМА ОСРЕДНЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СТРУКТУР В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Бердичевский В. Л.

Предлагается новый подход к решению задач осреднения микронеоднородных континуумов, основанный на переформулировке проблемы осреднения в терминах функций распределения. Рассматриваются задачи, имеющие вариационную структуру. Показано, что в терминах функций распределения они сводятся к проблеме минимума линейного функционала, имеющего смысл математического ожидания энергии, на множестве функций распределений, выделяемом бесконечным числом линейных ограничений. Эти ограничения выражают некоторые условия согласования и содержат многоточечные функции распределений случайных характеристик среды. Ограничения образуют незацепляющуюся цепочку, обрывание которой на n-м шаге содержит только n-точечные функции распределения. В связи с этим возникает последовательность приближенных задач.

1. Постановка задачи. Имеется несколько путей исследования композитов со случайной структурой, однако все они оставляют в стороне вопрос о функциях распределения микрополей, скажем, функциях распределения напряжений в поликристаллах. Микрополя по существу остаются неизвестными, поскольку знать случайное поле — это значит знать семейство его функций распределения. В связи с этим возникает необходимость так сформулировать задачу о поведении композита, чтобы она представляла собой задачу об отыскании семейства функций распределения характеризующих композит микрополей. В качестве образца физической теории, построенной именно в этих терминах, можно упомянуть теорию разреженных газов, в которой, как и в теории композитов, есть уравнения для средних характеристик (уравнения газовой динамики), а для изучения микрополей следует обратиться к уравнению для одноточечной функции распределения — уравнению Больцмана. Конечно, в теории композитов вряд ли можно рассчитывать на столь «простую» ситуацию, однако, несомненно, какие-то аналоги теории Больцмана должны быть. Ниже дается точная постановка задачи о поведении композита в терминах функций распределений. При этом возникает последовательность задач, которая напоминает, если продолжать сопоставление с теорией газов, цепочку Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона.

Будем исходить из формулировки задач о поведении композита в терминах реализации случайных полей.

Ясность в математической постановке подобных задач возникла после того, как в [1] для сред с периодической структурой была высказана идея об асимптотической природе проблемы осреднения (см. также [2, 3] и работы, в них процитированные). Малым параметром является отношение масштаба неоднородности (шага ячейки в периодическом случае) к характерному масштабу задачи. Искомые функции рассматриваются как функции быстрых и медленных переменных. Быстрые переменные изменяются на ячейке, а медленные «нумеруют» ячейки. В первом приближении для определения зависимости от быстрых переменных возникает так называемая задача на ячейке, а зависимость от медленных переменных находится из осредненных уравнений.

Коэффициенты осредненных уравнений (а для нелинейных задач — и вид осредненных уравнений) определяются по решению задачи на ячейке. Таким образом, решение проблемы осреднения сводится к решению задачи на ячейке.

Асимптотический подход был распространен на почти периодические и случайные среды [4, 5]. При этом аналогом задачи на ячейке оказалась задача о поведении сплошной среды в бесконечном пространстве для типичной реализации случайных характеристик среды. Ее постановка оказалась весьма существенным шагом в понимании проблемы осреднения и позволила обосновать известные эвристические соотношения и установить ряд новых общих фактов [4—10]. Приведем формулировку этой задачи, следуя [7, 8].

Рассмотрим сплошную среду, которая определяется лагранжианом Λ, зависящим от физической характеристики среды a и производных u_i искомой функции u по пространственным координатам: $\Lambda = \Lambda(a, u_i)$. Пространство в связи с обсуждаемыми приложениями считается трехмерным, и индекс i пробегает значения 1, 2, 3, однако размерность пространства для дальнейшего несущественна. Если искомых функций и характеристик среды несколько, то через u и a обозначаются соответствующие наборы величин. Лагранжиан Λ может иметь смысл внутренней энергии упругого тела (a — модули упругости, u — компоненты вектора перемещений), диссипации в теплопроводном теле (a — коэффициент теплопроводности, u — температура), диссипации в стоксовом потоке вязкой жидкости (a — коэффициент вязкости, u — компоненты скорости) и т. п.

Введем некоторое вспомогательное пространство R быстрых переменных y_i, их совокупность обозначим y. Систему координат y_i в R считаем декартовой. Для каждой функции $\varphi(y)$ можно определить среднее по пространству

$$\langle\varphi(y)\rangle = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda^3}\iiint_{-\lambda/2}^{\lambda/2}\varphi(y)\,d^3y$$

Подразумевается, что встречающиеся здесь и дальше пределы и интегралы существуют.

Каждая реализация сплошной среды задается полем характеристик $a(y)$ (подробности см. в [4, 5, 7]). Для каждой функции $\psi(y)$ и числовых параметров v_i можно определить число $\langle\Lambda(a(y), v_i + \psi_{|i}(y))\rangle$, где вертикальной чертой в индексах отмечается дифференцирование по $y_i: \psi_{|i} = \partial\psi/\partial y_i$. Лагранжиан ограничен снизу (не ограничивая общности, можно считать, что $\Lambda \geqslant 0$), поэтому имеет смысл вариационная задача $\inf_\psi < \Lambda(a(y), v_i + \psi_{|i})\rangle$. Она будет нетривиальной, если на ψ наложить ограничения, исключающие обращение $\psi_{|i}$ в тождественные постоянные, иначе, например для строго выпуклых неотрицательных функций Λ, $\Lambda(a(y), 0) = 0$, минимум будет достигаться в точке $v_i + \psi_{|i} = 0$. В частности, можно считать $\psi(y)$ ограниченными на бесконечности. Возникающая при этом задача и есть «задача на ячейке» для случайных структур. Макролагранжиан $\overline{\Lambda}$ зависит от макропеременных v_i, имеющих смысл производных от макрополей v, и определяется формулой [7, 11, 4, 5]

$$\overline{\Lambda}(v_i) = \inf_{\psi(y)}\langle\Lambda(a(y), v_i + \omega_{|i}(y))\rangle \tag{1.1}$$

где нижняя грань ищется по всем ограниченным на бесконечности функциям $\psi(y)$. Величины v_i в (1.1) рассматриваются как параметры. Если $a(y)$ — периодические функции, то можно показать [7], что минимум в (1.1) достаточно искать на периодических функциях $\psi(y)$ и формула (1.1) переходит в формулу, полученную [11] для периодических структур: формула имеет вид (1.1), где под угловыми скобками следует понимать среднее по ячейке.

В качестве простейшего примера приведем формулировку задачи для теплопроводного покоящегося тела. В этом случае $\Lambda(a, u_i) = {}^1/_2 a^{ij} u_i u_j$ (по повторяющимся нижним и верхним индексам производится суммирование), a^{ij} — коэффициенты теплопроводности, макролагранжиан $\bar{\Lambda}$ в силу линейности задачи квадратичен по градиентам средней температуры v_i: $\bar{\Lambda} = {}^1/_2 \bar{a}^{ij} v_i v_j$, $\bar{a}^{ij}$ — эффективные коэффициенты теплопроводности, которые определяются из вариационной задачи

$$(1.2) \qquad {}^1/_2 \bar{a}^{ij} v_i v_j = \inf_{\psi(y)} \langle {}^1/_2 a^{ij} (v_i + \psi_{|i})(v_j + \psi_{|j}) \rangle$$

Выбирая различные реализации случайного поля $a(y)$, можно, вообще говоря, получать разные значения макролагранжиана $\bar{\Lambda}$. Для задачи (1.2) доказано [5] важное утверждение: если $a(y)$ — однородное эргодическое случайное поле, то случайные поля $\psi_{|i}$, реализующие минимум в (1.2), также однородные и эргодические, а макролагранжиан $\bar{\Lambda}$ не зависит от выбора реализации поля $a(y)$. Дальше предполагается, что это утверждение справедливо для всех рассматриваемых ниже задач.

Из ограниченности $\psi(y)$ на бесконечности следует [7], что

$$(1.3) \qquad \langle \psi_{|i}(y) \rangle = 0$$

Для однородных эргодических полей может оказаться, что вариационная задача (1.1), в которой условие ограниченности $\psi(y)$ на бесконечности заменено ограничением (1.3), имеет то же решение, что и исходная задача. Дальше для определенности будет рассматриваться задача (1.1) при ограничении (1.3), учитывать которое проще, и будет ясно, как заменить его условием ограниченности функций $\psi(y)$.

Цель последующих построений — переформулировать задачу (1.1) в терминах функций распределений.

2. **Некоторые наводящие соображения.** Введем функцию $f(a, \psi_i)$ — плотность совместного распределения полей $a(y)$ и $\psi_i(y)$ (черта в индексе сохраняется в тех случаях, когда требуется специально подчеркнуть, что ψ_i — потенциальное векторное поле). В силу однородности случайных полей a, ψ_i функция f не зависит от y, а в силу эргодичности минимизируемый функционал можно записать в форме

$$(2.1) \qquad \langle \Lambda(a(y), v_i + \psi_i(y)) \rangle = \int \Lambda(a, v_i + \psi_i) f(a, \psi_i)\, da\, dv_\psi$$

где da и dv_ψ — элементы интегрирования в пространствах переменных a и ψ_i.

Ограничение (1.3) переписывается в терминах функции распределения следующим образом:

$$(2.2) \qquad \int \psi_i f(a, \psi_i)\, da\, dv_\psi = 0$$

Функция $f(a, \psi_i)$ удовлетворяет также естественным условиям

$$(2.3) \qquad \int f(a, \psi_i)\, dv_\psi = f_0(a), \quad f(a, \psi_i) \geqslant 0$$

где $f_0(a)$ — заданная одноточечная функция распределения однородного поля $a(y)$.

Функционал (2.1) является линейным функционалом от функции распределения; обозначим его $I(f)$. Соотношения (2.2), (2.3) образуют систему линейных ограничений на f. Представляется очевидным, что поиск минимума по полям $\psi(y)$ эквивалентен минимизации $I(f)$ по функциям распределения этого поля, и можно написать

(2.4) $\bar{\Lambda}(v_i) = \inf_f I(f)$

Будем искать минимум в (2.4) по всем функциям f, удовлетворяющим ограничениям (2.2), (2.3). Эта задача решается в явном виде. Для простоты построим решение в случае задачи теплопроводности (1.2), считая среду изотропной ($a^{ij} = a\delta^{ij}$). Вводя множитель Лагранжа λ^i для ограничения (2.2), придем к вариационной задаче

$$(2.5) \qquad \inf_f \int [{}^1/_2 a (v_i + \psi_i)(v^i + \psi^i) - \lambda^i \psi_i] f(a, \psi_i)\, da\, dv_\psi$$

где минимум ищется по всем функциям f, удовлетворяющим условиям (2.3).

Задача (2.5) по своей структуре имеет следующий вид: найти минимум функционала

$$\int \Lambda(t, x) f(t, x)\, dt\, dx$$

по неотрицательным функциям f с заданным при каждом t значением интеграла от f по x; обозначим этот интеграл $f_0(t)$. Ясно, как устроена минимизирующая функция $f^{\vee}$: надо при каждом t найти точку $x^{\vee}(t)$, в которой функция $\Lambda(t, x)$ имеет минимальное значение по x, и сосредоточить $f^{\vee}(t, x)$ в этой точке: $f'(t, x) = f_0(t)\, \delta(x - x^{\vee}(t))$ ($\delta(x)$ — δ-функция Дирака).

Итак, решение задачи (2.5) сводится к минимизации выражения в квадратных скобках в (2.5) по ψ_i. Элемент $\psi_i^{\vee}$, минимизирующий это выражение, определяется из уравнения $a(v_i + \psi_i^{\vee}) = \lambda_i$, следовательно, $f^{\vee}(a, \psi_i) = f_0(a)\ \delta(\psi_i - a^{-1}\lambda_i + v_i)$. Множитель Лагранжа λ_i находится из ограничения (2.2): $\lambda_i = (\mathrm{M}a^{-1})^{-1} v_i$ (символом M обозначается математическое ожидание). Подставляя $f^{\vee}$ в (2.4), вычисляем минимальное значение функционала: ${}^1/_2\, (\mathrm{M}a^{-1})^{-1} v_i v^i$. Таким образом пришли к формуле Рейсса, которая дает оценку снизу эффективной теплопроводности, однако не верна точно ни для одной макроизотропной структуры (за исключением тривиальной $a(y) \equiv \mathrm{const}$). Можно предположить, что так получилось по двум причинам: во-первых, была использована не вся информация относительно поля $a(y)$, а только его одноточечная функция распределения; во-вторых, не было учтено, что ψ_i есть производные от некоторой функции ψ, а это, вообще говоря, может привести к дополнительным ограничениям на функцию $f(a, \psi_i)$.

Рассмотрим сначала вопрос о формулировке этих дополнительных ограничений; он представляет и определенный самостоятельный интерес.

3. Ограничения на функции распределения. Пусть $f_n = f(y^{(1)}, \psi^{(1)}, \psi_i^{(1)}; \ldots; y^{(n)}, \psi^{(n)}, \psi_i^{(n)})$ — n-точечная функция распределения случайных полей ψ, ψ_i. Семейство функций распределения ($n = 1, 2, \ldots$) удовлетворяет условиям согласования: для всех n

(3.1) функция f_n симметрична по любой паре аргументов, $f_n \geqslant 0$

$$(3.2) \qquad f_{n-1} = \int f_n\, d\psi^{(n)}\, dv_{\psi^{(n)}}, \quad \int f_1\, d\psi\, dv_\psi = 1$$

В (3.1) под аргументами f_n понимаются величины, разделенные в записи f_n точкой с запятой. Имеет место следующая

Теорема 1. Для того чтобы семейство функций распределения полей ψ, ψ_i было семейством функций распределения случайного поля $\psi(y)$ и его производных $\psi|_i(y)$, необходимо, чтобы f_n удовлетворяли условиям согласования (3.1), (3.2), а для $f_2 = f(y, \psi, \psi_i; y', \psi', \psi_i')$ имело место равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y'^j} \int f_2 \, dv_\psi \, dv_{\psi'} + \frac{\partial}{\partial y'^j} \frac{\partial}{\partial \psi} \int f_2 \psi_i \, dv_\psi \, dv_{\psi'} + \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial \psi'} \int f_2 \psi_j' \, dv_\psi \, dv_{\psi'} + \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \psi'} \int f_2 \psi_i \psi_j' \, dv_\psi \, dv_{\psi'} = 0 \tag{3.3}$$

Здесь $dv_{\psi'}$ — элемент объема в пространстве переменных ψ_i'. Подразумевается, что все интегралы и производные в (3.3) существуют. Если, дополнительно, $f_2 \to 0$ при $\psi \to \infty$, $\psi' \to \infty$ настолько быстро, что стремятся к нулю следующие интегралы по сфере Σ_r радиуса r в пространстве переменных ψ ($d\sigma_\psi$ — элемент объема Σ_r) при $r \to \infty$:

$$\int_{\Sigma_r} \psi \psi_i \psi' f_2 \, d\sigma_\psi \, d\psi' \, dv_\psi \, dv_{\psi'}, \qquad \int_{\Sigma_r} \psi \psi_i \psi_j f_2 \, d\sigma_\psi \, dv_\psi \, dv_{\psi'}$$

то указанные условия являются и достаточными.

Замечания. 1°. Формула (3.3) написана в предположении, что f_2 — дифференцируемая функция. В противном случае равенство (3.3) следует понимать в слабом смысле, т. е. как соответствующее интегральное тождество.

2°. Если ψ — не скалярное, а векторное поле, то символ $\partial/\partial\psi$ в (3.3) следует понимать как дивергенцию, при этом, например, последнее слагаемое имеет вид (по α, β суммирование)

$$\frac{\partial^2}{\partial \psi^\alpha \partial \psi'^\beta} \int \psi_i^{\alpha} \psi_j'^{\beta} f_2 \, dv_\psi \, dv_{\psi'}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\alpha(y, \psi; y', \psi')$ — произвольная финитная функция своих аргументов, $\psi(y)$ — некоторая реализация дифференцируемого случайного поля ψ. Построим функцию двух аргументов $\beta(y, y')$ по формуле $\beta(y, y') \equiv \alpha(y, \psi(y); y', \psi(y'))$. В силу финитности α по y, y' функция $\beta(y, y')$ финитна по y, y', следовательно

$$\int \frac{\partial^2 \beta(y, y')}{\partial y^i \partial y'^j} d^3y \, d^3y' = 0$$

Переписывая это равенство в терминах функции α, имеем

$$\int \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^i \partial y'^j} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \psi \partial y'^j} \frac{\partial \psi(y)}{\partial y^i} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \psi' \partial y^i} \frac{\partial \psi(y')}{\partial y'^j} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \psi \partial \psi'} \frac{\partial \psi(y)}{\partial y^i} \frac{\partial \psi(y')}{\partial y'^j} \right) d^3y \, d^3y' = 0 \tag{3.4}$$

Вычислим математическое ожидание левой части (3.4). Получим

$$\int \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^i \partial y'^j} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \psi \partial y'^j} \psi_i + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \psi' \partial y^i} \psi_j' + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \psi \partial \psi'} \psi_i \psi_j' \right) f_2 \, d\psi \, d\psi' \, dv_\psi \, dv_{\psi'} \, d^3y \, d^3y' = 0 \tag{3.5}$$

В силу произвольности функции $\alpha(y, \psi; y', \psi')$ из (3.5) следует (3.3). Необходимость условий согласования (3.1), (3.2) известна (см., например, [12]).

Достаточность. Пусть имеется некоторое семейство функций распределения, удовлетворяющих условиям согласования (3.1), (3.2). Тогда по теореме Колмогорова [12] существуют случайные поля $\psi(y, \omega)$, $\psi_i(y, \omega)$ (ω — элемент вероятностного пространства), имеющие в качестве функций распределения рассматриваемое семейство. Покажем, что с вероятностью единица функции $\psi_i(y, \omega)$ в силу равенства (3.3) представляют производные по y^i от функции $\psi(y, \omega)$. Для этого достаточно доказать, что

$$\text{(3.6)} \qquad \mathrm{M}\left[\psi(y, \omega) - \psi(y', \omega) - \int_{\Gamma} \psi_i(y, \omega)\, dy^i\right]^2 = 0$$

где Γ — некоторый контур, соединяющий точки y и y'. Раскрывая квадратные скобки в (3.6) и вычисляя математическое ожидание, получим равенство

$$\text{(3.7)} \qquad B(y, y) + B(y', y') - 2B(y, y') + \int_{\Gamma}\int_{\Gamma} B_{ij}(z, z')\, dz^i dz'^j -$$
$$-2\iint_{\Gamma\Gamma} \psi_i' \psi \left(f(y, \psi, \psi_i; z, \psi', \psi_i') - f(y', \psi, \psi_i; z, \psi', \psi_i')\right) \times$$
$$\times\, d\psi\, d\psi'\, dv_\psi\, dv_{\psi'}\, dz^i = 0, \quad B(y, y') = \mathrm{M}\psi(y, \omega)\, \psi(y', \omega),$$
$$B_{ij}(y, y') = \mathrm{M}\psi_i(y, \omega)\, \psi_j(y', \omega)$$

Умножим теперь (3.3) на $\psi\psi'$ и проинтегрируем полученное соотношение по $\psi\psi'$, а по переменным y^i и y'^j — по контуру Γ. Можно проверить, что при этом получится равенство (3.7) (условие о стремлении к нулю интегралов по Σ_r нужно для обращения в нуль слагаемых, возникающих при интегрировании по частям). Итак, из (3.3) вытекает равенство (3.6) и для (почти) каждой реализации

$$\psi(y, \omega) - \psi(y', \omega) - \int_{\Gamma} \psi_i(z, \omega)\, dz^i = 0$$

Следовательно, $\psi_i(y, \omega)$ представляют собой производные по y^i от функции $\psi(y, \omega)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если ψ_i — градиент поля ψ, то для одноточечной функции распределения $f(y, \psi, \psi_i)$ справедливо равенство

$$\text{(3.8)} \qquad \frac{\partial}{\partial y^i}\int f\, dv_\psi + \frac{\partial}{\partial \psi}\int \psi_i f\, dv_\psi = 0$$

Равенство (3.8) выводится так же, как (3.3).

Рассмотрим теперь однородные случайные поля, для которых f_1 не зависит от y, а f_2 зависит от координат только через разность $\tau = y' - y$. Предполагаем, что $f_2 \to 0$ при $\psi \to \infty$, $\psi' \to \infty$ настолько быстро, что при интегрировании по частям выражений типа $\psi\partial f_2/\partial\psi$ внеинтегральный член обращается в нуль.

Следствия. 1°. Для однородных случайных полей

$$\text{(3.9)} \qquad \frac{\partial}{\partial \psi^\alpha}\int f(\psi^\alpha, \psi_i^\alpha)\, \psi_i^\alpha\, dv_\psi = 0$$

В формуле (3.9) восстановлен индекс α, нумерующий набор функций ψ, если их несколько, для того, чтобы подчеркнуть, что равенство (3.9) означает «несжимаемость» для каждого i среднего поля градиентов в пространстве переменных ψ^α.

2°. Среднее значение градиента поля равно нулю:

$$\text{(3.10)} \qquad \int f(\psi, \psi_i)\, \psi_i\, d\psi\, dv_\psi = 0$$

Равенство (3.10) получается из (3.9) умножением на ψ^α и интегрированием по частям.

3°. Для однородных полей f_2 удовлетворяет равенству

$$\text{(3.11)} \qquad -\frac{\partial^2}{\partial\tau^i \partial\tau^j}\int f_2\, dv_\psi\, dv_{\psi'} + \frac{\partial}{\partial\tau^j}\frac{\partial}{\partial\psi}\int f_2 \psi_i\, dv_\psi\, dv_{\psi'} -$$
$$-\frac{\partial}{\partial\tau^i}\frac{\partial}{\partial\psi'}\int f_2 \psi_j'\, dv_\psi\, dv_{\psi'} + \frac{\partial^2}{\partial\psi\, \partial\psi'}\int f_2 \psi_i \psi_j'\, dv_\psi\, dv_{\psi'} = 0$$

4°. Справедливо равенство

$$\sum_{\alpha}\int f_2(\psi_i;\tau,\psi_i')\,\psi_i^{\alpha}\psi_j'^{\alpha}dv_{\psi}\,dv_{\psi'}=\frac{\partial^2 B(\tau)}{\partial\tau^i\,\partial\tau^j} \tag{3.12}$$

$$B(\tau)=\sum_{\alpha}\mathrm{M}\psi^{\alpha}(y)\,\psi^{\alpha}(y+\tau)$$

Оно получается из (3.11) умножением на ψ, ψ' и интегрированием по ψ, ψ'.

Теорема 3. Для того чтобы случайное однородное поле $\psi_i(y,\omega)$ было полем производных от некоторой случайной функции $\psi(y,\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы семейство функций распределения удовлетворяло условиям согласования и однородности и нашлась такая функция $B(\tau)$, чтобы имело место равенство (3.12).

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1 с той лишь разницей, что вместо равенства (3.6) устанавливается равенство (Γ — произвольный замкнутый контур)

$$\sum_{\alpha}\mathrm{M}\Big(\oint_{\Gamma}\psi_i^{\alpha}(z,\omega)\,dz^i\Big)^2=0$$

4. Проблема осреднения в терминах функций распределений. В п. 3 получены все необходимые соотношения для переформулировки задачи на ячейке. Пусть $f_n(y^{(1)},a^{(1)},\psi_i^{(1)};\ldots;y^{(n)},a^{(n)},\psi_i^{(n)})$ $(n=1,2,\ldots)$ — семейство n-точечных функций распределения случайных полей $a(y)$, $\psi_i(y)$, удовлетворяющих условиям согласования. Поле $a(y)$ задано, поэтому в равенстве

$$\int f(y^{(1)},a^{(1)},\psi_i^{(1)};\ldots;y^{(n)},a^{(n)},\psi_i^{(n)})\,dv_{\psi^{(1)}}\ldots dv_{\psi^{(n)}}= \tag{4.1}$$
$$=f_0(y^{(1)},a^{(1)};\ldots;y^{(n)},a^{(n)})$$

функции f_0 известны.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала $I(f)$ на множестве семейств функций распределения, выделяемом ограничениями (2.2), (3.12), и (4.1), и предположим, что нижняя грань функционала $I(f)$ на этом множестве достигается.

Теорема 4. Имеет место равенство (2.4), в котором inf ищется по всем функциям распределения, удовлетворяющим условиям согласования и ограничениям (2.2), (3.12) и (4.1).

Доказательство. Пусть $\check{\psi}(y)$ — минимизирующий элемент задачи на ячейке. Обозначим f^* семейство функций распределения полей $a(y)$, $\partial\check{\psi}(y)/\partial y^i$. Это семейство удовлетворяет условиям согласования и ограничениям (2.2), (3.12) и (4.1), поэтому

$$\inf_f I(f)\leqslant I(f^*)=\bar{\Lambda}(v_i) \tag{4.2}$$

Пусть теперь $\check{f}$ — минимизирующее семейство функций распределения в рассматриваемой задаче. Поскольку оно удовлетворяет условиям согласования, по теореме Колмогорова найдутся случайные поля $\psi_i(y,\omega)$, для которых эти функции являются функциями распределения. Равенство (3.12) выполнено, поэтому существует случайное поле $\psi(y,\omega)$, для которого $\psi_i=\partial\psi(y,\omega)/\partial y^i$. Кроме того, $\mathrm{M}\Lambda(a,v_i+\psi_i)=\langle\Lambda(a,v_i+\psi_i)\rangle<\infty$. Выбирая $\psi(y,\omega)$ в качестве пробной функции задачи на ячейке, получим оценку

$$\bar{\Lambda}(v_i)\leqslant\langle\Lambda(a,v_i+\psi_i)\rangle=\mathrm{M}\Lambda(a,v_i+\psi_i)=\inf_f I(f) \tag{4.3}$$

Из неравенств (4.2) и (4.3) следует утверждение теоремы.

Замечания. 3°. Построенная вариационная задача представляет задачу о минимуме линейного по f функционала $I(f)$ на множестве функций, удовлетворяющих линейным ограничениям, и в этом смысле есть задача линейного программирования. Обратим внимание на то, что доказанная теорема сводит к задаче линейного программирования как линейные, так и нелинейные проблемы осреднения (с неквадратичными лагранжианами).

4°. Отметим, не останавливаясь на этом подробно, что задача на ячейке для периодических структур также сводится к задаче линейного программирования. Для этого под вероятностью того, что значения поля ψ_i лежат в некоторой области A пространства переменных ψ_i, надо понимать объемную долю ячейки, в которой ψ_i принимает значения из A. Формула (2.1) при этом соответствует вычислению интеграла по ячейке по Лебегу. Интерпретация n-точечных функций распределений аналогична.

5. Последовательность приближений. Приведенная выше формулировка проблемы осреднения содержит бесконечное число ограничений. В связи с этим возникает последовательность приближенных задач, в каждой из которых удерживается лишь конечное число ограничений. В задаче первого приближения участвуют только одноточечные функции распределений, второго — двухточечные и т. д. В каждой следующей задаче учитываются все более подробные характеристики случайного поля $a(y, \omega)$.

Обозначим $I_{(n)}$ нижнюю грань функционала $I(f)$ на множестве, выделяемом ограничениями для всех k-точечных функций распределения при $k \leqslant n$.

Обсудим возможность равенства

$$\lim_{n\to\infty} \underline{I}_n = \overline{\Lambda}(v_i) \tag{5.1}$$

Действительно, множество допустимых функций с ростом n сужается, поэтому $\underline{I}_{(n)} \leqslant \underline{I}_{(n+1)}$. Последовательность $\underline{I}_{(n)}$ в силу (4.2) ограничена сверху величиной $\overline{\Lambda}(v_i)$. Поэтому она имеет предел. Допустим, что он меньше $\overline{\Lambda}(v_i)$. Обозначим $\check{f}_{(n)}$ минимизирующий элемент задачи n-го приближения. Если существует поле $\psi^{(n)}(y)$ и некоторое поле $a^{(n)}(y)$, такие, что $\check{f}_{(n)}$ — совместное распределение $a^{(n)}(y)$ и $\psi^{(n)}_{|i}(y)$, то $\underline{I}_{(n)} = \langle\Lambda(a^{(n)}(y), v_i + \psi^{(n)}_{|i}(y))\rangle$. При $n \to \infty$ поля $a^{(n)}(y)$ и $a(y)$ сближаются по распределениям и для достаточно больших n $\underline{I}_{(n)} = \langle\Lambda(a(y), v_i + \psi^{(n)}_{|i})\rangle + o(n)$. Выбирая $\psi^{(n)}$ в качестве пробного поля в задаче на ячейке, получим оценку $\overline{\Lambda}(v_i) \leqslant \underline{I}_{(n)} + o(n)$, которая приводит к противоречию со сделанным предположением.

Если ввести в пространстве одноточечных функций распределения «энергетическую норму» (2.1) (напомним, что $f \geqslant 0$, $\Lambda \geqslant 0$), то равенство (5.1) можно интерпретировать как сходимость в энергетической норме одноточечных функций распределения приближенных задач к одноточечной функции распределения исходной задачи. Вопрос о сходимости многоточечных функций распределения остается открытым.

Наибольший интерес представляют первые три приближения, в приближениях более высокого порядка вряд ли есть необходимость.

6. Двойственная задача. Для контроля погрешности приближения обычно оказывается эффективным использование двойственной задачи. В терминах реализаций она формулируется следующим образом:

$$\overline{\Lambda}(v_i) = \sup_{p^i}(\langle p^i\rangle v_i - \langle\Lambda^*(a(y), p^i(y))\rangle) \tag{6.1}$$

где верхняя грань ищется по всем ограниченным на бесконечности векторным полям $p^i(y)$, удовлетворяющим ограничению

$$p^i{}_{|i}(y) = 0 \tag{6.2}$$

а $\Lambda^*(a, p^i)$ — преобразование Юнга — Фенхеля функции $\Lambda(a, u_i)$ по переменным u_i:

$$\Lambda^*(a, p^i) = \sup_{u_i}(p^i u_i - \Lambda(a, u_i))$$

Общее решение уравнения (6.2) записывается в форме

$$p^i = e^{ijk}\varphi_{j|k}$$

где e^{ijk} — символы Леви-Чевиты. Поэтому двойственная задача может быть записана в такой же форме, как и исходная, с подынтегральной функцией $L(a, \varphi_i, v_i) = e^{ijk}\varphi_{i|k} v_i - \Lambda^*(a(y), e^{ijk}\varphi_{j|k})$. Формулировка двойственной задачи в терминах функций распределения выглядит так же, как и исходной задачи, с заменой Λ на L, inf на sup и ψ на φ_i.

Обозначим $\bar{J}_{(n)}$ верхнюю грань функционала

$$J = \int L(a, \varphi_i, v_i) f(a, \varphi_i)\, da\, dv_\varphi$$

на множестве, выделяемом ограничениями на k-точечные функции распределения, $k = 1, \ldots, n$. Так же, как в п. 5, доказывается утверждение

$$\lim_{n\to\infty} \bar{J}_{(n)} = \bar{\Lambda}(v_i)$$

Последовательность $\bar{J}_{(n)}$ убывающая: $\bar{J}_{(n+1)} \leqslant \bar{J}_{(n)}$ и, кроме того, $\bar{\Lambda}_{(n)} \leqslant \bar{\Lambda}(v_i) \leqslant \bar{J}_{(n)}$. Эти неравенства могут быть источником двусторонних оценок макролагранжиана.

7. Приближения и экстремальность по микроструктурам. Зададимся некоторой n-точечной функцией распределений поля $a(y)$ и обозначим A_n множество полей $a(y)$, имеющих эту функцию распределения. Макролагранжиан $\bar{\Lambda}(v_i)$ зависит от выбора поля $a(y)$, отметим это, приписав ему индекс a: $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}_a(v_i)$. Сформулируем без доказательства следующее свойство задач n-го приближения, которое разъясняет их смысл:

$$\underline{I}_{(n)} = \inf_{a\in A_n} \bar{\Lambda}_a(v_i), \quad \bar{J}_{(n)} = \sup_{a\in A_n} \bar{\Lambda}(v_i)$$

Можно показать, что все известные результаты теории осреднения, содержащие одноточечные функции распределения (формулы Дыхне, оценки Лурье — Черкаева и т. д.), можно извлечь из задачи первого приближения. Второе приближение не удается изучить аналитическими методами, и его, по-видимому, можно исследовать лишь численно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н. С.* Осредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1974. Т. 218. № 5. С. 1046—1048.
2. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352 с.
3. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов // Успехи мат. наук (УМН). 1979. Т. 34. № 5. С. 65—133.
4. *Козлов С. М.* Осреднение дифференциальных операторов с почти периодическими быстроосциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1977. Т. 236. № 5. С. 1068—1071.
5. *Козлов С. М.* Осреднение случайных структур // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1978. Т. 241. № 5. С. 1016—1019.

6. *Козлов С. М.* Проводимость двумерных случайных сред // Успехи мат. наук (УМН). 1979. Т. 34. № 4. С. 193—194.
7. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983. 447 с.
8. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы в проблеме осреднения случайных структур // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1981. Т. 261. № 2. С. 301—304.
9. *Жиков В. В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47. № 5. С. 961—998.
10. *Жиков В. В.* Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50. № 4. С. 675—710.
11. *Бердичевский В. Л.* Пространственное осреднение периодических структур // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1975. Т. 222. № 3. С. 565—567.
12. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М.: Мир. 1969. 398 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.III.1987