Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 6, 1987

УДК 531/5

ОБ УСЛОЖНЕННЫХ МОДЕЛЯХ СПЛОШНЫХ СРЕД В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Цыпкин А. Г.

В рамках общей теории относительности из вариационного уравнения в предположении, что лагранжиан материи зависит от дополнительных (по сравнению с классическими теориями) термодинамических параметров, и учете возможных необратимых процессов получена система уравнений Эйлера. Показано, что для термодинамически замкнутой системы уравнения импульсов для сплошной среды являются следствием уравнений поля. Рассмотрен вопрос о виде тензора энергии-импульса материи при наличии в числе аргументов лагранжиана производных от дополнительных термодинамических параметров.

Пусть x^i — координаты в четырехмерном римановом пространстве, в котором компоненты метрического тензора g_{ij}, коэффициенты параллельного переноса $\Gamma_{ij}{}^k$ и тензор кривизны $R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot s}$ связаны равенствами

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{1}$$

$$\Gamma_{ij}{}^k = \frac{1}{2} g^{ks}\left[\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}\right]$$

$$R_{ijk\cdot}^{\cdot\cdot\cdot s} = \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^s_{pj}\Gamma^p_{ki} - \Gamma^s_{pi}\Gamma^p_{kj}$$

$$R_{ij} = R_{isj\cdot}^{\cdot\cdot\cdot s}, \quad R = R_{ij}g^{ij}$$

где R_{ij} — компоненты тензора Риччи, R — скалярная кривизна четырехмерного риманова пространства (скаляр Риччи). Здесь и далее малые латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4; по верхним и нижним совпадающим индексам проводится суммирование: сигнатура метрики $(+\,-\,-\,-)$.

Наряду с переменным x^i в том же самом римановом пространстве будем рассматривать для некоторого решения сопутствующие координаты ξ^k, в которых фиксированные значения ξ^1, ξ^2, ξ^3 индивидуализируют точку сплошной среды, причем будем полагать, что между переменными x^i и ξ^k существует взаимно однозначное соответствие $x^i = x^i(\xi^k)$ — закон движения континуума сплошной среды.

Динамические уравнения для поля и сплошной среды в рамках общей теории относительности могут быть получены при помощи вариационного уравнения [1]

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda\, dV_4 + \delta W^* + \delta W = 0 \tag{2}$$

$$dV_4 = \sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \quad g = \det \| g_{ij} \|$$

где dV_4 — инвариантный элемент произвольного четырехмерного объема V_4, ограниченного трехмерной поверхностью Σ_3, а лагранжиан Λ, являющийся четырехмерным скаляром,— функция следующих аргументов:

$$x_j^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j},\ \mu^A,\ \nabla_k \mu^A,\ \Gamma_{ij}{}^k,\ \frac{\partial \Gamma_{ij}{}^k}{\partial x^s},\ K^{\wedge B},\ K^C \tag{3}$$

где функции μ^A могут быть как скалярами, так и компонентами векторов или тензоров произвольного ранга с любым строением индексов, зависящих от координат x^k. Здесь для простоты в число аргументов не включены ковариантные производные выше первого порядка от аргументов μ^A, а также ковариантные производные аргументов x_j^i. Все последующие выводы останутся справедливыми и для расширенного набора аргументов при соответствующем видоизменении полученных формул.

В качестве параметров μ^A могут быть выбраны тензорные характеристики электромагнитного поля или кинематические и термодинамические характеристики сплошной среды, например тензор деформации, вектор скорости, энтропия, температура; ∇_k — символ ковариантной производной в системе координат x^k; $K^{\wedge B}(\xi^k)$ и $K^C(x^k)$ — компоненты параметрически задаваемых векторов или тензоров в сопутствующей системе координат ξ^k и в системе координат x^i соответственно, характеризующих задаваемые свойства материи и пространства. В число тензоров $K^{\wedge B}$ включаются, например, задаваемые физические характеристики сплошной среды (например, компоненты тензоров, характеризующих анизотропные свойства, коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости и т. д). В число тензоров K^C, в зависимости от конструируемой модели, включаются те характеристики материи, которые считаются заданными при конструировании конкретной модели континуума и принятых гипотез о геометрии пространства. Так, например, в качестве параметрически известных функций $K^C(x^k)$ могут быть выбраны характеристики заданного в постановке задачи невозмущаемого электромагнитного поля или заданного невозмущаемого гравитационного поля, когда рассматривается модель вещества, для которого энергия зависит от характеристик поля.

В рамках рассматриваемых ниже моделей аргументы μ^A — искомые функции, так же как компоненты метрического тензора $g_{ij}(x^k)$ и закон движения сплошной среды $x^i(\xi^k)$.

Рассмотрим модель достаточно общего вида, в которой лагранжиан Λ берется в следующей форме:

$$(4)\qquad \Lambda = -R/(2\varkappa) + \nabla_i\Omega^i + \Lambda_m,\ \varkappa = 8\pi G/c^4$$

где $\varkappa$ — гравитационная постоянная, G — ньютоновская гравитационная постоянная, c — скорость света в вакууме; четырехмерный скаляр Λ_m — зависящий от набора аргументов (3) лагранжиан материи (здесь под термином «материя» понимается совокупность сплошных сред и физических полей, за исключением гравитационного поля); Ω^i — компоненты задаваемого в рамках рассматриваемой модели четырехмерного вектора, являющегося функцией только координат x^i.

Дальнейшие формулы можно обобщить на случай, когда компоненты вектора Ω^i также зависят от набора аргументов (3). Физический смысл вектора Ω^i подробно обсуждался в работе [2]. Ниже для простоты будем полагать, что функция Λ_m, характеризующая термодинамическое состояние материи и зависящая от набора аргументов (3), не зависит от $\partial\Gamma_{ij}{}^k/\partial x^s$ и зависит от $\Gamma_{ij}{}^k$ только через аргумент $\nabla_k\mu^A$. (Аналогичный набор аргументов, в котором μ^A считались компонентами вектора, а вместо аргумента $\Gamma_{ij}{}^k$ выбирался аргумент $\partial g_{ij}/\partial x^s$ был принят в работе [3]).

Далее будем рассматривать простейший случай непрерывных движений и процессов, когда, вообще говоря, неголономный функционал вариационного уравнения δW^* имеет вид

$$\delta W^* = \int_{V_4} \left(M_A \delta_L \mu^A - \frac{1}{2} \tau^{ij} \delta_L g_{ij} \right) dV_4 \tag{5}$$

$$\delta_L \mu^A = \partial \mu^A + \delta x^i \nabla_i \mu^A - F^{Ak}_{Bi} \mu^B \nabla_k \delta x^i$$

В формуле (5) M_A — компоненты обобщенных сил, задание которых связано с принимаемой в рамках рассматриваемой модели теории внутренних диссипативных механизмов в рассматриваемой термодинамической системе; $\tau^{ij} = \tau^{ji}$ — компоненты тензора, определяющего вязкие свойства сплошной среды, а $\delta_L \mu^A$ — абсолютная вариация компонент тензора μ^A, которая для действительных движений и процессов представляет собой приращение компонент тензора μ^A относительно сопутствующей системы координат; F^{Ak}_{Bi} — комбинации символов Кронекера, вид которых можно установить на основании формулы

$$\nabla_i \mu^A = \partial \mu^A / \partial x^i + F^{Ak}_{Bs} \mu^B \Gamma^s_{ik}$$

а вариации $\delta_L g_{ij}$ определяются равенствами

$$\delta_L g_{ij} = \partial g_{ij} + g_{sj} \nabla_i \delta x^s + g_{is} \nabla_j \delta x^s$$

Если рассматриваемая термодинамическая система замкнута, т. е. отсутствует силовое и энергетическое взаимодействие с другими термодинамическими системами, то, согласно второму закону термодинамики для действительных процессов, выполняется равенство

$$M_A d_L \mu^A - (1/2) \tau^{ij} d_L g_{ij} = 0$$

Присутствие в вариационном уравнении отличного от нуля неголономного функционала δW^*, вообще говоря, обязательно при конструировании многих моделей сплошных сред и полей. При этом очевидно, что набор варьируемых параметров μ^A в выражении для функционала δW^* может не совпадать с набором параметров μ^A, входящих в число аргументов лагранжиана (3). Необходимо также отметить, что зависимость неголономного функционала δW^* от абсолютных вариаций параметров μ^A вполне естественна, так как согласно своему физическому смыслу параметры μ^A описывают термодинамическое состояние материи, которое не зависит от выбора координат x^i. В частности, как будет показано ниже, при соответствующем выборе параметров μ^A и обобщенных массовых и поверхностных сил M_A функционал вида (5) позволяет учесть процессы диссипативного выделения тепла в сплошной среде, обусловленное электропроводными свойствами сплошной среды.

Используя формулы для вариаций [4, 5], первый член вариационного уравнения (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\delta \int_{V_4} \Lambda\, dV_4 = \int_{V_4} \Bigg\{ \Bigg[\frac{1}{2\varkappa} R^{ij} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2\varkappa} g^{ij} + {} \\
+ \frac{1}{2} \Lambda_m g^{ij} + \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g_{ij}} + \frac{1}{2} \nabla_s \Bigg[\frac{\partial \Lambda_m}{\partial \nabla_l \mu^A} \Bigg(\frac{\partial V_l \mu^A}{\partial \Gamma_{ij}^{\;k}} g^{sk} - {} \\
- \frac{\partial \nabla_l \mu^A}{\partial \Gamma_{sj}^{\;k}} g^{ik} - \frac{\partial \nabla_l \mu^A}{\partial \Gamma_{si}^{\;k}} g^{jk} \Bigg) \Bigg] \Bigg] \partial g_{ij} + \Bigg[- \frac{\partial \Lambda_m}{\partial x_j^{\;s}} \nabla_i x_j^{\;s} - {} \\
- \nabla_s \left(\frac{\partial \Lambda_m}{\partial x_j^{\;i}} x_j^{\;s} \right) \Bigg] \delta x^i + \left[\frac{\partial \Lambda_m}{\partial \mu^A} - \nabla_s \left(\frac{\partial \Lambda_m}{\partial \nabla_s \mu^A} \right) \right] \partial \mu^A + {} \\
+ \frac{\partial \Lambda_m}{\partial K^{\wedge B}} \partial K^{\wedge B} + \frac{\partial \Lambda_m}{\partial K^C} \partial K^C \Bigg\} dV_4 + {} \\
+ \int_{\Sigma_3} \Bigg\{ \Bigg[- \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial \nabla_l \mu^A} \left(\frac{\partial \nabla_l \mu^A}{\partial \Gamma_{ij}^{\;s}} g^{sk} - \frac{\partial \nabla_l \mu^A}{\partial \Gamma_{kj}^{\;s}} g^{is} - \right.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$-\frac{\partial\nabla_l\mu^A}{\partial\Gamma^s_{ki}}g^{js}\Big)\Big]\partial g_{ij}+\Big[-\frac{R}{2\varkappa}\delta_i^k+\nabla_s\Omega^s\delta_i^k-\nabla_i\Omega^k+$$

$$+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial x_j^i}x_j^k+\Lambda_m\delta_i^k-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_k\mu^A}\nabla_i\mu^A+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial K^C}F^{Ck}_{Ai}K^A\Big]\delta x^i+$$

$$+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_k\mu^A}\delta\mu^A-\Big[\frac{1}{2\varkappa}(g^{si}g^{kj}-g^{ij}g^{sk})\Big]\nabla_s\partial g_{ij}\Big\}n_k\,d\sigma_3$$

Здесь n_k — компоненты единичного вектора внешней нормали к трехмерной поверхности Σ_3, $d\sigma_3$ — трехмерный инвариантный элемент поверхности Σ_3.

Из условия равенства нулю объемного интеграла в вариационном уравнении (2) с учетом формул (5), (6) при линейно независимых вариациях ∂g_{ij}, δx^i и $\partial\mu^A$ получим следующую систему уравнений Эйлера для функций $g_{ij}(x^k)$, $x^i(\xi^k)$ и $\mu^A(x^k)$:

(7) $$\frac{1}{\varkappa}R^{ij}-\frac{1}{2\varkappa}Rg^{ij}=T^{ij}$$

(8) $$-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial x_j^s}\nabla_i x_j^s-\nabla_s\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial x_j^i}x_j^s\right)+M_A\nabla_i\mu^A+$$

$$+\nabla_k\tau_{i\cdot}^{\cdot k}+\nabla_k(M_AF^{Ak}_{Bi}\mu^B)-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial K^{\wedge B}}\nabla_i K^{\wedge B}-$$

$$-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial K^C}\nabla_i K^C-\nabla_s\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial K^C}F^{Cs}_{Bi}K^B\right)=0$$

(9) $$\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\mu^A}-\nabla_s\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_s\mu^A}\right)+M_A=0$$

В уравнениях (7) T^{ij} — компоненты симметричного тензора, вычисляемого по формуле

$$T^{ij}=-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\Lambda_m\sqrt{-g})}{\partial g_{ij}}-\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_s\Big\{\frac{\partial(\Lambda_m\sqrt{-g})}{\partial\nabla_l\mu^A}\times$$

$$\times[{}^1/_2(F^{Ai}_{Bk}\delta_l^j+F^{Aj}_{Bk}\delta_l^i)\mu^Bg^{ks}-F^{As}_{Bk}\mu^B(g^{kj}\delta_l^i+g^{ki}\delta_l^j)]\Big\}+\tau^{ij}$$

Уравнения (7) определяют метрический тензор четырехмерного риманова пространства; (8) — четырехмерные уравнения импульсов для материи; уравнения (9) можно рассматривать как уравнения состояния, среди которых, в частности, при соответствующем выборе параметров μ^A содержатся и уравнения моментов для материи.

Необходимо отметить, что уравнения импульсов (8) для материи получены при некоторых специальных условиях о виде вариаций параметрически задаваемых тензоров $K^{\wedge B}(\xi^k)$ и $K^C(x^k)$, а именно: так как согласно сделанному выше предположению тензоры $\mathbf{K}(\xi^k)$ считаются заданными, то полные вариации компонент этих тензоров равны нулю

(10) $$\delta K^{\wedge B}=0$$

и частные вариации $\partial K^{\wedge B}$ вычисляются по формулам

$$\partial K^{\wedge B}=-\delta x^i\nabla_i K^{\wedge B}$$

причем для действительных движений равенство $\delta K^{\wedge B}=0$ в сопутствующей системе координат ξ^k представляет собой условие постоянства компонент тензора $K^{\wedge B}$ для индивидуальной точки сплошной среды $dK^{\wedge B}/ds=0$, не исключающее возможной пространственной неоднородности сплошной среды, характеризуемой тензором $\mathbf{K}(\xi^k)$.

Из равенств (10) следуют выражения для полных вариаций компонент тензора **K** в системе координат x^i

$$\delta K^C = F^{Ck}_{Ai} K^A \nabla_k \delta x^i$$

и для частных вариаций компонент тензора K^C

$$\partial K^C = -\delta x^i \nabla_i K^C + F^{Ck}_{Ai} K^A \nabla_k \delta x^i$$

Можно проверить, что уравнения импульсов (8) сохранят свою форму и в том случае, когда в число аргументов включены лишь параметрически задаваемые тензоры с компонентами относительно сопутствующей системы координат $K^{\wedge B}(\xi^k) = \xi_A{}^B K^A(x^k)$, где $\xi_A{}^B$ — произведения вида $\xi_j{}^i \xi_n{}^m \ldots$ ($\|\xi_j{}^i\|$ —матрица, обратная матрице $\|x_j{}^i\|$). При этом необходимо только учесть разницу в зависимости функции Λ_m от аргумента $x_j{}^i$.

Из условия равенства нулю поверхностного интеграла в вариационном уравнении (2) получим

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma_3} (P_{i\cdot}^{\cdot k} \delta x^i + T^{kij} \partial g_{ij} + T^{ksij} \nabla_s \partial g_{ij} + M_A{}^k \delta \mu^A) n_k \, d\sigma_3 \tag{11}$$

где величины $P_{i\cdot}{}^{\cdot k}$, T^{kij}, T^{ksij}, $M_A{}^k$ определяются равенствами, вид которых устанавливается из формул (5), (6). В частности, при произвольных вариациях δx^i и $\delta\mu^A$ на поверхности Σ_3 из формул (5), (6) следует, что

$$P_{i\cdot}^{\cdot k} = \frac{1}{2\varkappa} R \delta_i{}^k - \nabla_s \Omega^s \delta_i{}^k + \nabla_i \Omega^k + \theta_{i\cdot}^{\cdot k} \tag{12}$$

Здесь

$$\theta_{i\cdot}^{\cdot k} = -\frac{\partial \Lambda_m}{\partial x_j{}^i} x_j{}^k - \Lambda_m \delta_i{}^k + \frac{\partial \Lambda_m}{\partial \nabla_k \mu^A} \nabla_i \mu^A + \tag{13}$$
$$+ M_A F^{Ak}_{Bi} \mu^B - \frac{\partial \Lambda_m}{\partial K^A} F^{Ak}_{Bi} K^B$$

Уравнения, определяющие подынтегральные члены в δW в известных классических теориях (теория идеальной жидкости, теория упругости и т. д.), являются уравнениями состояния. Так как лагранжиан Λ_m — четырехмерный скаляр, то набор величин $P_{i\cdot}{}^{\cdot k}$ представляет собой набор компонент тензора второго ранга. Задаваемое формулой (11) выражение для функционала δW не дает возможности однозначно определить выражения для компонент тензоров $P_{i\cdot}{}^{\cdot k}$, T^{kij}, T^{ksij}. Для однозначного установления вида компонент тензора $P_{i\cdot}{}^{\cdot k}$ необходимо выдвигать дополнительные предположения о том, какие вариации параметров μ^A считаются независимыми, и эти предположения связаны с физическим истолкованием уравнений состояния. Вид тензорных функций T^{kij} и T^{ksij} также не может быть однозначно установлен, так как на поверхности Σ_3 величины ∂g_{ij} и $\nabla_s \partial g_{ij}$ не являются независимыми. Как показано в [6], из выражения для функционала δW следуют лишь выражения для некоторых определенных комбинаций компонент тензоров T^{kij} и T^{ksij} , получающиеся из условий независимости вариаций ∂g_{ij} и $(D/Dn)(\partial g_{ij}) \equiv n^k \nabla_k \partial g_{ij}$ на поверхности Σ_3.

В качестве частного случая общей модели континуума рассмотрим модель поляризующейся и намагничивающейся сплошной среды, диссипативные процессы в которой происходят только за счет выделения джоулева тепла. Полагая, что параметр μ^A представляет собой компоненты четырехмерного векторного потенциала электромагнитного поля A_k, а обобщенные силы M_A — компоненты четырехмерного вектора электрического тока I^k, функционал δW^* имеет вид

$$\delta W^* = \int\limits_{V_4} I^k \delta_L A_k \, dV_4$$

и определяет возможное выделение джоулева тепла в сплошной среде [7].

Положим лагранжиан материи Λ_m равным [7]

$$\Lambda_m = -U - L + \frac{1}{8\pi} F_{mn} H^{mn} - \frac{1}{4\pi} H^{mn} \nabla_m A_n$$

где U — плотность полной энергии сплошной среды; L — слагаемое, учитывающее взаимодействие электромагнитного поля со сплошной средой; F_{mn} и H^{mn} — компоненты тензоров электромагнитного поля. Далее будем полагать, что функция U зависит от $x_j{}^i$, g_{ij}, энтропии S, $K^{\wedge B}$ и K^C, а функция L зависит кроме перечисленных аргументов также от F_{ij} и ковариантных производных $\nabla_k F_{ij}$.

В рассматриваемом случае выражение для функционала δW принимает вид

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma_3} \left[\theta_{i\cdot}^{\cdot k} \delta x^i + \frac{1}{4\pi} H^{ks} \delta_L A_s \right] n_k \, d\sigma_3$$

где тензор

$$\theta_{i\cdot}^{\cdot k} = \frac{\partial (U + L)}{\partial x_j^{\ i}} x_j^{\ k} - U \delta_i^{\ k} + S_{i\cdot}^{\cdot k}$$

может быть истолкован как суммарный тензор энергии-импульса системы сплошная среда — электромагнитное поле; $S_{i.}^{\ \cdot k}$ — компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля по Минковскому. (В формулах рассматриваемого примера приведены лишь те члены, которые получаются при варьировании аргументов $x^i{}_j$ и A_k функции Λ_m. Подробный вывод полной системы уравнений механики и электродинамики дан в работе [7].)

При выводе системы уравнений Эйлера и выражения для функционала δW не использовалось условие скалярности лагранжиана материи Λ_m, которое позволяет установить связь между компонентами тензоров T^{ij} и θ^{ij}. Из условия скалярности лагранжиана материи Λ_m относительно произвольного бесконечно малого преобразования координат $y^i = x^i + \delta\eta^i (x^k)$ следуют равенства

$$\theta^{ij} = T^{ij} + \nabla_s \left[\frac{\partial \Lambda_m}{\partial \nabla_i \mu^A} (F_{Bk}^{Aj} g^{ks} - F_{Bk}^{As} g^{kj}) \mu^B \right] = \tag{14}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\Lambda_m \sqrt{-g})}{\partial g_{ij}} + \nabla_s \left[\frac{\partial \Lambda_m}{\partial \nabla_s \mu^A} F_{Bk}^{Aj} \mu^B g^{ik} \right]$$

показывающие, что при наличии в наборе определяющих параметров (3) аргументов $\nabla_s \mu^A$, где μ^A — компоненты вектора или тензора произвольного ранга, компоненты тензора θ^{ij} несимметричны. Очевидно, что при отсутствии среди набора аргументов (3) величин $\nabla_s \mu^A$ из (14) следует тождественное совпадение тензоров θ^{ij} и T^{ij}.

Рассмотрим некоторые следствия системы уравнений Эйлера (7)—(9) и тождеств (14). Из уравнений для гравитационного поля (7) при учете тождеств Бианки получим уравнения

$$\nabla_j T^{ij} = 0 \tag{15}$$

Уравнениям импульсов (8) для материи при учете формул (13) можно придать вид

$$\nabla_k \theta_{i\cdot}^{\cdot k} = \frac{\partial \Lambda_m}{\partial \nabla_s \mu^A} (\nabla_s \nabla_i - \nabla_i \nabla_s) \mu^A$$

или

$$\nabla_k \theta_{i\cdot}^{\cdot k} = R_{liks} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial \nabla_l \mu^A} F_{Bj}^{As} \mu^B g^{jk} \tag{16}$$

Воспользовавшись связью (14) между тензорами θ^{ij} и T^{ij}, уравнения (15) можно записать в виде

$$
(17) \qquad \nabla_k\theta^{ik} = (1/2)(\nabla_s\nabla_k - \nabla_k\nabla_s)\theta^{isk}
$$

$$
\theta^{isk} = -\theta^{iks} = \frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_i\mu^A}(F^{As}_{Bj}g^{jk} - F^{Ak}_{Bj}g^{js})\mu^B
$$

Можно проверить, что уравнения (16) и (17) совпадают, т. е. в рамках рассматриваемой модели уравнения импульсов для материи (8) являются следствием уравнений (7). Указанное свойство системы уравнений Эйлера будет нарушаться в случае, когда в функционал δW^* входят члены, описывающие внешнее объемное взаимодействие рассматриваемой термодинамической системы с другими термодинамическими системами, но будет выполняться независимо от способа задания обобщенных внутренних поверхностных и массовых сил τ^{ij} и M_A, отвечающих за внутренние механизмы преобразования одних видов энергии в другие внутри рассматриваемой термодинамической системы, а также вида параметрически задаваемых тензоров $K^{\wedge B}$ и K^C.

В рассмотренных выше примерах диссипации энергии за счет вязких и электропроводных свойств сплошной среды и преобразования нетепловых видов энергии в тепловую энергию уравнения импульсов для материи являются следствием уравнений поля независимо от выбора вида зависимости компонент тензора вязких напряжений τ^{ij} и вектора четырехмерного тока I^k от определяющих параметров (3). Необходимо также отметить, что в случае учета диссипативных эффектов, обусловленных электропроводными свойствами сплошной среды, в лагранжиан материи должен быть включен лагранжиан электромагнитного поля, так как в противном случае процесс выделения джоулева тепла нельзя считать внутренним процессом преобразования одного вида энергии в другой внутри одной термодинамической системы.

Полученная выше система уравнений Эйлера (7)—(9) и выражение для функционала δW показывают, что при конструировании усложненных моделей сплошных сред в общей теории относительности возникает вопрос о том, что называть тензором энергии-импульса материи. Уравнения импульсов для сплошной среды могут быть записаны в виде (15) при помощи тензора T^{ij}, который обычно называют тензором энергии — импульса материи. Этот тензор для любого материального континуума симметричен независимо от выбора определяющих параметров модели. Однако, как следует из вариационного уравнения, условия на поверхности сильных разрывов (а также начальные и граничные условия) формулируются для определенных формулами (14) компонент тензора P^{ij}, который в общем случае не симметричен и отличается от тензора T^{ij} [8]. Это отличие связано, во-первых, с тем, что в выражение для лагранжиана Λ_m может быть включен дивергентный член $\nabla_s\Omega^s$, который не влияет на вид уравнений Эйлера (7) и тензора T^{ij}, но меняет вид тензора P^{ij} (вопрос о виде вектора Ω^s, а также его возможный физический смысл подробно рассмотрены в работе [9]), а во-вторых, с присутствием среди набора аргументов (3) ковариантных производных $\nabla_i\mu^A$. Все сказанное выше относится к случаю моделей континуумов с усложненными физико-химическими свойствами. В том случае, когда в числе аргументов лагранжиана Λ_m отсутствуют ковариантные производные тензорных функций μ^A и отсутствует член $\nabla_s\Omega^s$, компоненты тензора P^{ij} с точностью до множителя совпадают с компонентами тензора Риччи.

При построении моделей континуумов в рамках специальной теории относительности с постулируемым видом метрического пространства как четырехмерного псевдоевклидова пространства Минковского уравнения импульсов для материи (16) могут быть записаны как в виде $\nabla_k \theta_{i\cdot}^{\cdot k} = 0$, так и в виде $\nabla_k T_{i\cdot}^{\cdot k} = 0$, где компоненты несимметричного тензора θ^{ik} и симметричного тензора T^{ik} связаны равенствами (14), а граничные условия формулируются для компонент несимметричного тензора $\theta^{ik} \equiv \equiv P^{ik}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. Вып. 5. С. 121—180.
2. *Седов Л. И.* Об описании динамических свойств гравитационного поля в вакууме // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 195—204.
3. *Седов Л. И.* О тензоре энергии-импульса и о макроскопических взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1965. Т. 165. № 3. С. 519—522.
4. *Седов Л. И.* Применение базисного вариационного уравнения для построения моделей сплошных сред // Избранные вопросы современной механики. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ. 1981. С. 11—64.
5. *Цыпкин А. Г.* Об определении вариаций в механике сплошных сред // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 904—911.
6. *Желнорович В. А., Седов Л. И.* О вариационном выводе уравнений состояния для материальной среды и гравитационного поля // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 771—780.
7. *Седов Л. И., Цыпкин А. Г.* О построении моделей сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 387—400.
8. *Седов Л. И.* Об условиях на сильных разрывах в теории гравитации // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 3—14.
9. *Седов Л. И.* О динамических свойствах гравитационных полей // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 180—199.

Москва

Поступила в редакцию
28.I.1986