УДК 539.374

ЗАДАЧА О СТРУКТУРЕ РАЗРЫВА В УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Друянов Б. А., Святова Е. А.

Рассматривается задача о структуре разрыва скорости в несжимаемом упрочняющемся вязкопластическом материале при наличии термоэффектов. Показано, что непрерывное решение задачи существует не всегда. При малой вязкости непрерывное решение задачи существует лишь при малых скоростях распространения разрыва v. Установлено, что при стремлении коэффициента вязкости к нулю предельное решение при определенных условиях может содержать изотермический разрыв скорости. В другом предельном случае, когда к нулю стремится коэффициент теплопроводности (адиабатическое течение), непрерывное решение, напротив, существует при больших величинах v.

Задача о структуре разрыва в сжимаемой вязкой идеально пластической среде, предел текучести которой зависит от среднего давления, с учетом термических эффектов исследована в [1]. Ниже рассматривается жесткопластический упрочняющийся материал. Некоторые частные постановки задачи о структуре разрыва рассматривались в [2, 3].

Как видно из дальнейшего, эта задача в известной степени аналогична задаче о структуре разрыва в вязком теплопроводящем газе [4].

Предположим, что материал несжимаемый, вязкопластический. Предел текучести k, коэффициенты теплопроводности λ и вязкости μ, внутренняя энергия единицы массы e предполагаются известными функциями температуры θ и параметра упрочнения Одквиста χ.

Проекции скорости на оси Ox и Oy обозначим u, v соответственно. Рассмотрим установившееся течение среды, испытывающей чистый сдвиг, в направлении оси ординат, предполагая, что $u = u(y)$, $v = \text{const}$. В этом случае течение описывается следующей системой уравнений (штрих означает производную по y, ρ — плотность среды):

$$\tau' = \rho v u', \; \rho v e' = (\lambda\theta') + \tau u', \; \tau = k + \mu u', \; u' = v\chi' \tag{1}$$

(это уравнение движения ($\tau = \tau_{xy}$), уравнение притока тепла, определяющее соотношение вязкопластического материала и закон упрочнения).

Заметим, что v — существенный параметр. Величина, противоположная ей по знаку, имеет смысл скорости распространения разрыва. Из (1) и краевых условий видно, что при $v = 0$ решение отсутствует.

Краевые условия

$$u = \chi = \theta = \theta' = \chi' = 0, \; y \to -\infty \tag{2}$$

$$u = u_1, \; \theta' = \chi' = 0, \; y \to +\infty \tag{3}$$

Интегрируя уравнения (1) с учетом условий (2), получаем систему уравнений

$$\rho v\chi' = M, \; M = \rho v^2\chi + k_0 - k \tag{4}$$

$$\lambda\theta' = L, \; L = \rho e - k_0\chi - {}^1/_2\rho v^2\chi^2 \; (k_0 = k(0, 0)) \tag{5}$$

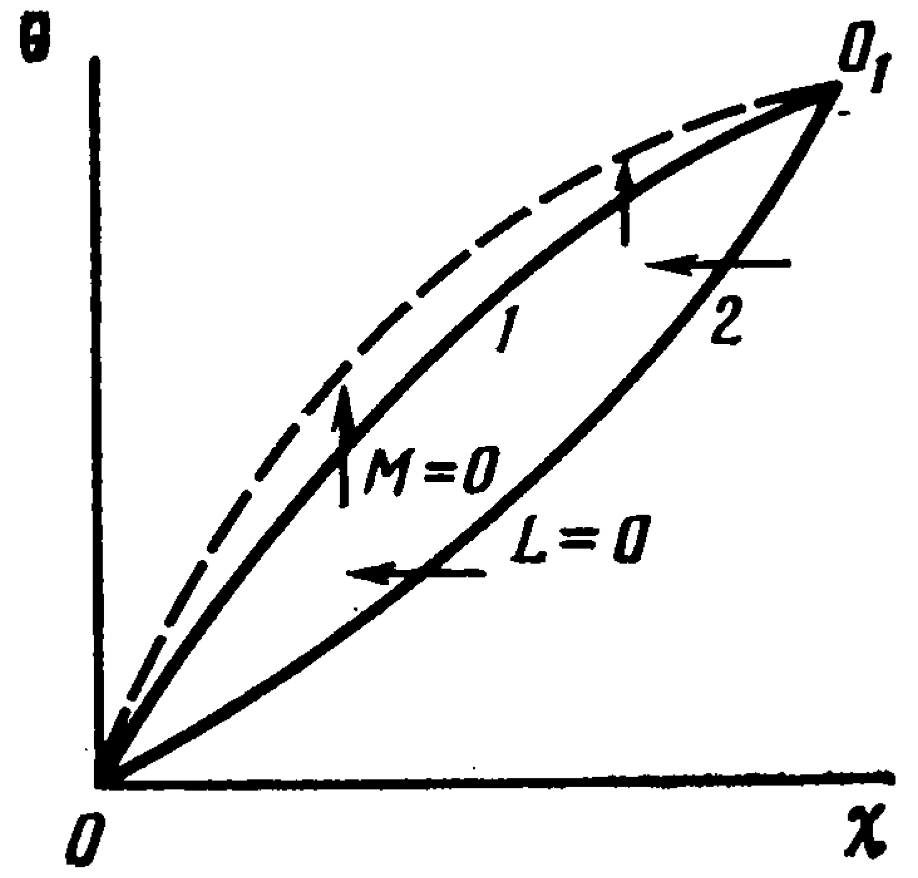
Полагаем, что $e(0, 0) = 0$. Величина u исключена при помощи уравнения $u = v\chi$. Из (4) и (5) получаем

$$\lambda(\mu v^2)^{-1} d\theta/d\chi = L/M \tag{6}$$

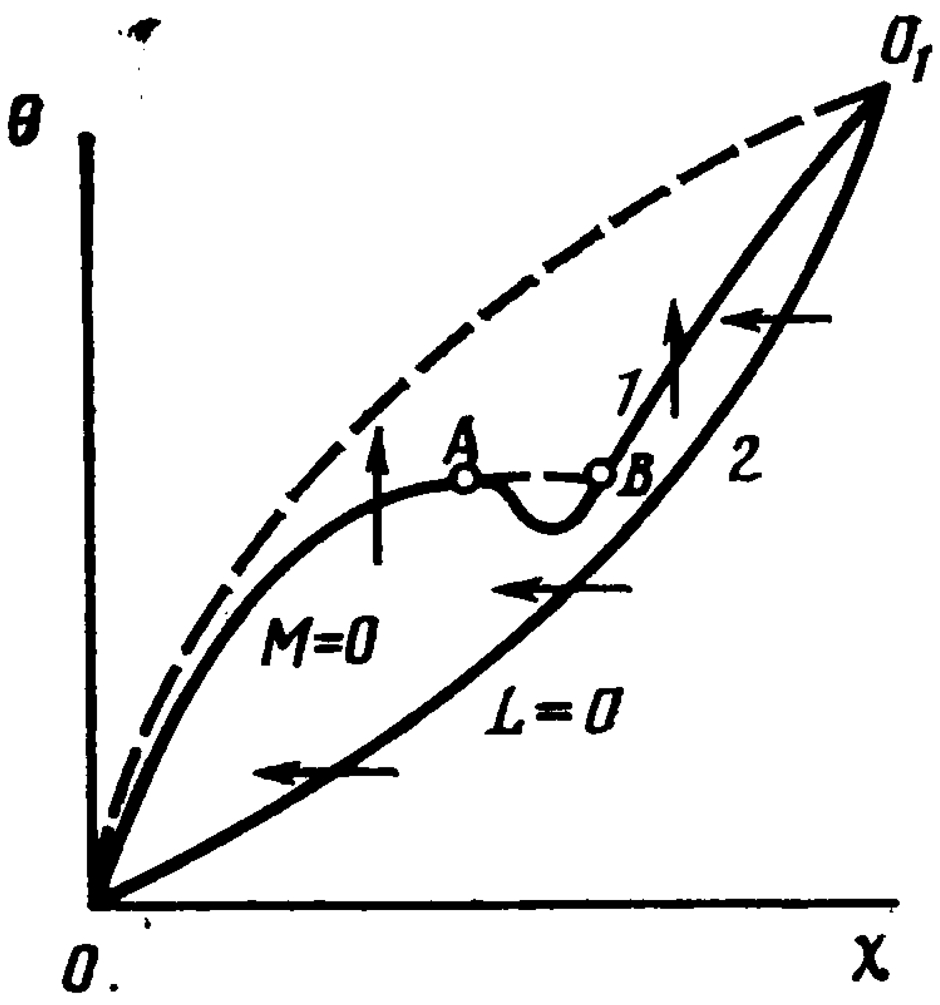
Искомая кривая должна проходить через особые точки этого уравнения, соответствующие $y \to -\infty$ и $y \to +\infty$. Для определения координат θ_1, χ_1, соответствующих $y \to \infty$, имеем систему уравнений $L = 0$, $M = 0$, которая при заданной величине u_1 определяет θ_1, χ_1 и v. Удобнее, однако, считать, что значение v задано, и определять величины u_1, θ_1 и χ_1.

Особая точка, соответствующая $y \to -\infty$, имеет координаты $\theta = \chi = 0$. Существование второй особой точки зависит от вида кривых $L = 0$, $M = 0$.

Для большинства реальных материалов $\partial e/\partial\theta$, $\partial e/\partial\chi$, $\partial k/\partial\chi > 0$, $\partial k/\partial\theta < 0$, причем зависимость e от χ слаба [5].



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим тангенсы углов наклона кривых $L = 0$ и $M = 0$ к оси $O\chi$

$$\varkappa_1 = \left(k_0 + \rho v^2 - \rho \frac{\partial e}{\partial \chi}\right)\left(\rho \frac{\partial e}{\partial \theta}\right)^{-1}, \quad \varkappa_2 = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial k}{\partial \chi} - v^2\right)\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^{-1} \tag{7}$$

Видно, что линия $L = 0$ представляет собой монотонно возрастающую вогнутую кривую (кривая *2* на фиг. 1, 2). Вид кривой $M = 0$ определяется зависимостью $k(\theta, \chi)$. Для некоторых металлов зависимость k от χ представляет собой выпуклую кривую. В этом случае линия $M = 0$ имеет максимум в точке $\rho v^2 = \partial k / \partial \chi$ (кривая *1* на фиг. 1). Для многих других металлов кривая упрочнения имеет участок, где она вогнута. Линия $M = 0$ в этом случае имеет два максимума и один минимум, расположенный между ними (кривая *1* на фиг. 2).

Во всех этих случаях кривые $L = 0$ и $M = 0$ имеют вторую точку пересечения, асположенную в квадранте $\theta > 0$, $\chi > 0$, если $\varkappa_2 > \varkappa_1$ в точке $\theta = \chi = 0$. В дальнейшем предполагается, что это условие выполнено. Так как $\varkappa_1 (0, 0) > 0$, то должно быть $\varkappa_2 > 0$, или $\rho v^2 < \partial k / \partial \chi$ в точке $\theta = \chi = 0$.

Введем скорость распространения слабых разрывов в упрочняющей пластической (невязкой) среде $v^* = (\rho^{-1} \partial k / \partial \chi)^{1/2}$. Рассмотренное выше условие можно записать в виде $v < v_0^*$.

Исследование показывает, что при указанных условиях точка $\theta = \chi = 0$ — седло, а точка $\theta = \theta_1$, $\chi = \chi_1$ — узел. Решение, таким образом, является сепаратрисой.

Обратимая часть энергии, запасаемая на микроуровне и идущая на упрочнение, обычно мала по сравнению с удельной работой внутренних сил [5]. Поэтому условие положительности диссипации можно записать в виде $\tau u' > 0$. Оно выполняется при $u' > 0$. Так как $u' = v\chi'$, то решение должно лежать выше кривой $M = 0$, что соответствует направлению интегральных кривых, показанному стрелками на фиг. 1, 2. Кривые, соответствующие решению, показаны штрихами.

Как видно из (6), решение может иметь экстремум только в точке, где $L = 0$. При сделанных предположениях это будет максимум. Следовательно, в интервале $(0, \chi_1)$ решение монотонно возрастает. Поэтому в точке $O_1 (\theta_1, \chi_1)$ должно быть $\varkappa_2 > 0$, т. е. $v < v_1^*$, где v_1^* — скорость распространения слабых разрывов в точке $O_1 (\theta_1, \chi_1)$. Таким образом, для существования непрерывного решения необходимо, чтобы $v < v_1^*$. Обычно $v_1^* < v_0^*$, поэтому условие $v < v_1^*$ включает в себя условие $v < v_0^*$.

При $\mu \to 0$ решение стремится к кривой $M = 0$. Если эта кривая не имеет экстремума в интервале $(0, \chi_1)$, как на фиг. 1, то в пределе решение совпадает с $M = 0$. Если же экстремум имеется (фиг. 2), то предельное решение содержит изотермический разрыв упрочнения и скорости (кривая $OABO_1$ на фиг. 2).

Хотя при $\lambda \to 0$ (адиабатическое течение) решение существует, однако при принятых условиях, когда кривая $L = 0$ лежит в области $M < 0$, оно не удовлетворяет условию положительности диссипации энергии. В этом случае температура выражается через параметр упрочнения χ и становится параметром деформационного разупрочнения.

Введем адиабатический предел текучести $k_a(\chi) = k_a(\theta, \chi)$. Функция k_a не обязательно монотонна, т. е. материал может упрочняться или разупрочняться на разных участках изменения χ. Пусть k_a возрастает на некотором интервале. В этом случае уравнения отличаются от уравнений изотермического течения только пределом текучести. Как показано в [2], непрерывное решение задачи о структуре разрыва при изотермическом течении существует при больших значениях v, а именно: $v > (\rho^{-1}\partial k/\partial\chi)^{1/2}$ при $\chi = 0$. При адиабатическом течении упрочняющегося материала в случае, если k_a — возрастающая функция, этот вывод сохраняется, однако под k теперь надо понимать адиабатический предел текучести k_a.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пачепский Я. А.* О структуре ударных волн в упругопластических средах // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 2. С. 300—305.
2. *Друянов Б. А.* Волны сдвига в упрочняющихся жесткопластических телах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 4. С. 745—751.
3. *Друянов Б. А., Святова Е. А.* О сильных разрывах скорости в термопластических телах // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1982. Т. 262. № 2. С. 288—291.
4. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука. 1968. 592 с.
5. *Ранецкий Б., Савчук А.* Температурные эффекты в пластичности. Ч. I. Связанная теория // Проблемы теории пластичности и ползучести. М.: Мир, 1979. С. 203—220.

Поступила в редакцию
9.IX.1986

Москва