5. *Седова Г. Л., Черный Л. Т.* Уравнения электрогидродинамики слабоионизованных аэрозолей с диффузионной зарядкой частиц дисперсной фазы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 54—60.
6. *Смирнов Б. М.* Введение в физику плазмы. М.: Наука. 1982. 224 с.
7. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир. 1972. 274 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.VI.1986

УДК 533.6.011

ЗАДАЧА О ЗАПОЛНЕНИИ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА ВЯЗКИМ ТЕПЛОПРОВОДНЫМ ГАЗОМ

Белов С. Я.

Изучается система дифференциальных уравнений, решение которой описывает одномерное движение вязкого теплопроводного совершенного политропного газа [1, 2]. Доказывается однозначная разрешимость задачи о заполнении газом ограниченного объема. Теорема существования устанавливается методом продолжения локального по времени решения при помощи глобальных априорных оценок. Метод получения таких оценок был предложен [2] для уравнений вязкого газа, записанных в лагранжевых переменных. Наличие проницаемой стенки приводит к тому, что граничные условия являются неоднородными, и в массовых лагранжевых переменных начально-краевая задача ставится в области с криволинейной границей. Последнее обстоятельство требует развития техники доказательства оценок. Корректность в целом по времени задачи о заполнении объема вязким газом ранее исследовалась только для более простых моделей и для системы уравнений теплопроводного газа в случае, когда коэффициент теплопроводности специальным образом зависит от температуры [3, 4]. Другие постановки задач о течениях вязкого газа в областях с проницаемыми границами изучались в [3—6].

1. Постановка задачи и основные результаты. Одномерное движение вязкого совершенного политропного газа в массовых лагранжевых координатах описывается системой уравнений [1, 2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

$$c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \rho \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \mu\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - p\frac{\partial u}{\partial x}, \quad p = R\rho\theta$$

Здесь u, ρ, θ, p — соответственно, скорость, плотность, абсолютная температура и давление — искомые характеристики среды; x — массовая лагранжева переменная, t — время; μ, c_v, $\varkappa$ — коэффициенты вязкости, удельной теплоемкости, теплопроводности — положительные постоянные; R — универсальная газовая постоянная.

Рассматривается движение вязкого газа в некоторой области физического пространства, левая граница которой неподвижна и проницаема (через нее газ постоянно втекает), а правая граница остается неподвижной, непроницаемой и теплоизолированной. Этот процесс в течение времени T, $0 < T < \infty$ может быть описан в лагранжевых переменных решением системы уравнений (1.1), которое определено в области $Q_T = \{(x, t)\colon 0 < t < T, s(t) < x < X\}$ и удовлетворяет следующим условиям ($X > 0$ — начальная масса газа):

$$u = u_0(x), \quad \rho = \rho_0(x), \quad \theta = \theta_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad x \in \overline{\Omega} \tag{1.2}$$

$$u = u_1(t), \quad \rho = \rho_1(t), \quad \theta = \theta_1(t) \quad \text{при} \quad x = s(t), \quad t \in [0, T] \tag{1.3}$$

$$u = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = X, \ t \in [0, T] \tag{1.4}$$

$$s(t) = -\int_0^t \rho_1(\tau) u_1(\tau)\, d\tau, \quad \Omega = (0, X), \quad \Omega_t = (s(t), X)$$

При этом выполнены ограничения

$$0 < m_0 \leqslant (\rho_0, \theta_0, \rho_1, u_1, \theta_1) \leqslant M_0 < \infty \tag{1.5}$$

(m_0 и M_0 — произвольные положительные постоянные).

Сформулируем основной результат, используя понятие обобщенного решения и обозначения функциональных пространств, принятые в [2].

Теорема 1. Пусть данные задачи такие, что

$$(u_0, \theta_0) \in C^{2+\alpha}(\Omega), \quad \rho_0 \in C^{1+\alpha}(\Omega), \quad (u_1, \rho_1, \theta_1) \in C^{1+\alpha/2}(0, T), \quad 0<\alpha<1$$

выполнены условия согласования первого порядка начальных и граничных функций и условие (1.5). Тогда существует единственное классическое решение задачи (1.1)—(1.4), обладающее свойствами

$$(u(x, t), \ \theta(x, t)) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T), \quad \rho \in C^{1+\alpha}(Q_T), \quad \rho > 0, \ \theta > 0$$

Если данные задачи принадлежат более широкому классу:

$$(u_0, \rho_0, \theta_0) \in W_2^1(\Omega), \quad (u_1, \rho_1, \theta_1) \in W_2^1(0, T)$$

удовлетворяют условиям согласования нулевого порядка и выполнено условие (1.5), то существует единственное обобщенное решение, такое, что функции ρ и θ строго положительные и ограниченные.

Доказательство существования единственного классического решения на всем интервале времени $[0, T]$ проводится методом продолжения локального решения с помощью априорных оценок. После этого обобщенное решение в целом получается как предел, определенный в Q_T, классических решений задач, гладкие начальные и граничные данные которых приближают в соответствующих нормах заданные функции. Доказательство единственности обобщенного решения не отличается от изложенного в [2] для однородной начально-краевой задачи.

2. Априорные оценки. Постоянные, зависящие только от данных задачи (1.1) — (1.4) и T, обозначаются через N (с индексом).

Пусть выполнены условия первой части теоремы 1 и задача (1.1)—(1.4) имеет классическое решение, причем $0 < \rho < \infty$, $0 < \theta < \infty$. В малом по времени это гарантируется локальной теоремой существования.

Второе уравнение системы (1.1), записанное в виде $(\rho^{-1})_t = u_x$, проинтегрируем по области $Q_t = \{(x, t)\colon 0 < \tau < t, \ x \in \Omega_\tau\}$. Получаем следующее соотношение:

$$\int\limits_{\Omega_t} \rho^{-1}(x, t)\, dx = \int\limits_{\Omega} \rho_0^{-1}(x)\, dx = N, \quad \forall t \in [0, T] \tag{2.1}$$

Подставим в уравнения системы (1.1) $u = w + u_2$, $\rho = v^{-1}$, где

$$u_2(x, t) = u_1(t) N^{-1} \int\limits_x^X \rho^{-1}(\xi, t)\, d\xi$$

и умножим первое уравнение на w, второе на $R\theta_1\ (1 - v^{-1})$, третье на $(1 - \theta_1\theta^{-1})$, а затем их сумму проинтегрируем по Q_t. После несложных преобразований, оценивая правую часть полученного соотношения по неравенству Коши, при помощи леммы Гронуолла можно вывести оценку

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \int\limits_{\Omega_t} [u^2(x, t) + (v(x, t) - \ln v(x, t) - 1)]\, dx \leqslant N_1 \tag{2.2}$$

которая позволяет доказать вспомогательное утверждение

Лемма 1. На интервале $[0, T]$ определена измеримая функция, $a(t)$, такая, что $0 \leqslant a(t) \leqslant X$ и

$$N_2^{-1} \leqslant \rho(a(t), t) \leqslant N_3^{-1}, \quad \forall t \in [0, T] \tag{2.3}$$

где N_2 и N_3 — корни уравнения $z - \ln z - 1 = N_1 X^{-1}$.

Обозначим $t = t^*(x)$, $s(T) \leqslant x \leqslant 0$ функцию, обратную к $x = s(t)$. При этом $t^*(x) = 0$, если $0 \leqslant x \leqslant X$.

В любой точке $(x, t) \in \overline{Q_0} = \{0 \leqslant x \leqslant X, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, следуя [7], можно получить

$$\rho(x, t) = Y(x, t, t) B(x, t, t) J^{-1}(x, t, t) \tag{2.4}$$

где

$$Y(x,t,r) = \rho(a(r),t)\,\rho^{-1}(a(r),t^*(x))\exp\left\{\mu^{-1}\int\limits_{t^*(x)}^{t} p(a(r),\tau)\,d\tau\right\}$$

$$B(x,t,r) = \exp\left\{\mu^{-1}\int\limits_{a(r)}^{x}[u(\xi,t^*(x)) - u(\xi,t)]\,d\xi\right\}$$

$$J(x,t,r) = \rho^{-1}(x,t^*(x)) + \mu^{-1}R\int\limits_{t^*(x)}^{t}\theta(x,\tau)Y(x,\tau,r)B(x,\tau,r)\,d\tau$$

— функции, определенные в $G = \{(x,t,r)\colon 0 \leqslant t \leqslant T,\ s(t) \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant r \leqslant t\}$.

В точках криволинейного треугольника $Q_1 = \{(x,t)\colon 0 < t \leqslant T,\ s(t) \leqslant x < 0\}$ справедливы следующие равенства:

(2.5) $$\rho(x,t) = Y(x,t,t)B(x,t,t)J^{-1}(x,t,t^*(x))$$

(2.6) $$\rho(x,t) = Y(x,t,t^*(x))B(x,t,t^*(x))J^{-1}(x,t,t^*(x))$$

Для произвольной функции $f(x,t)$, непрерывной в $\overline{Q}_T$, введем обозначения

$$m_f(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}_t} f(x,t), \qquad M_f(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}_t} f(x,t)$$

Оценивая правую часть равенства (2.4) снизу и сверху, а затем правую часть (2.5) снизу и правую часть (2.6) сверху, получаем следующее утверждение.

Лемма 2. Для любого $t \in [0, T]$ справедливы соотношения

$$m_\rho(t) \geqslant N_4 + \left[1 + N_5\int\limits_0^t M_\theta(\tau)\,d\tau\right]^{-1}, \quad M_\rho(t) \leqslant N_5$$

После этого все оценки, необходимые для доказательства теоремы 1, получаются по схеме, изложенной в [2].

Замечание. Аналогичным методом исследуется задача, когда обе границы области являются проницаемыми и через них происходит втекание жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их применения к газовой динамике. М.: Наука. 1978. 687 с.
2. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука. 1983. 319 с.
3. *Белов С. Я.* Разрешимость «в целом» задачи протекания для уравнений Бюргерса сжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР. 1981. Вып. 50. С. 3—14.
4. *Белов С. Я.* О задаче протекания для системы уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР. 1982. Вып. 56. С. 22—43.
5. *Кажихов А. В.* О краевых задачах для уравнений Бюргерса сжимаемой жидкости в областях с подвижными границами // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР. 1976. Вып. 26. С. 60—76.
6. *Белов С. Я.* Задача о заполнении вакуума вязким теплопроводным газом // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР. 1983. Вып. 59. С. 23—38.
7. *Кажихов А. В., Шелухин В. В.* Однозначная разрешимость «в целом» по времени начально-краевых задач для одномерных уравнений вязкого газа // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 282—291.

Новосибирск

Поступила в редакцию
30.I.1986