Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 6, 1987

УДК 532.584 : 537.24

ДИФФУЗИОННАЯ ЗАРЯДКА ЧАСТИЦ В ОДНОМЕРНЫХ СЛАБОИОНИЗОВАННЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ПОТОКАХ

Седова Г. Л., Филиппов А. В., Черный Л. Т.

В рамках электрогидродинамики [1, 2] исследуется одномерное течение биполярно заряженного аэрозоля в электрическом поле в случае, когда параметры электрогидродинамического (ЭГД) взаимодействия фаз малы. Предполагается, что радиус аэрозольных частиц мал и процесс зарядки определяется тепловым движением ионов к их поверхности. Рассматривается случай больших чисел Пекле, построенных по характерному размеру задачи, т. е. вкладом диффузии в полные макроскопические потоки ионов пренебрегается. Скорость реакции передачи ионами заряда частицам считается конечной. При помощи расчета на ЭВМ исследуется зависимость параметров потока от константы скорости реакции и плотности частиц. Результаты расчета сравниваются с аналитическим решением задачи, полученным для слабоконцентрированных аэрозолей в случае больших электрических чисел Рейнольдса.

В различных природных и технологических процессах осуществляются ЭГД течения слабоионизованных аэрозолей с объемными источниками ионов, например, за счет внешнего радиоактивного излучения [1—3]. В таких течениях частицы дисперсной фазы могут заряжаться в результате преимущественного осаждения ионов определенного знака. Чтобы изучить особенности межфазного обмена зарядом в слабоионизованных аэрозолях при наличии объемной ионизации, полезно исследовать их одномерные течения. Это представляет и самостоятельный интерес, так как течения, близкие к одномерным, встречаются в ряде ЭГД устройств [4].

Рассмотрим в полупространстве $x \geqslant 0$ одномерное установившееся течение слабоионизованного аэрозоля вдоль оси x декартовой системы координат. Пусть напряженность электрического поля также направлена вдоль оси x и параметры ЭГД взаимодействия для газа и дисперсной фазы малы. Тогда можно считать, что скорости газа и аэрозольных частиц совпадают и равны $u = \mathrm{const} > 0$. Распределение же концентраций ионов $n_\pm$, заряда частиц e_p и напряженности поля E описывается системой уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dx}\left[n_\pm(u \pm bE)\right] = \beta - \alpha n_+ n_- - n_p i_\pm \\
\frac{dE}{dx} = 4\pi(en_+ - en_- + e_p n_p), \quad u\frac{de_p}{dx} = e(i_+ - i_-) \\
i_\pm = \pm 4\pi n_\pm e_p b\left[\left(1 \pm \frac{e_p b}{a^2 K}\right)\exp\left(\pm\frac{e_p b}{aD}\right) - 1\right]^{-1}
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь b — абсолютная величина коэффициента подвижности ионов, которая считается одинаковой для ионов обоих знаков и связана с коэффициентом диффузии ионов D соотношением Эйнштейна, β — локальная скорость ионизации газа, α — коэффициент рекомбинации ионов, e — абсолютная величина электрического заряда ионов. Выражение для потоков ионов к частице $i_\pm$ выписано в предположении, что при переходе к поверхности частицы ионы отдают ей свой заряд, причем константы скорости этой поверхностной реакции для ионов обоих знаков равны K [5].

Предположим, что на поверхности $x = 0$ не происходит образования ионов, заряд частиц равен нулю, а напряженность электрического поля известна и равна E°, т. е. при $x = 0$ имеют место начальные условия

$$
I_\pm \equiv (u \pm bE)\, n_\pm = 0, \quad e_p = 0, \quad E = E^\circ, \quad 0 < E^\circ < u/b \tag{2}
$$

Заметим, что при записи уравнений (1), (2) предполагалось, что вкладом диффузии в полные потоки ионов $I_\pm$ можно пренебречь. Для этого должно выполняться условие $\mathrm{Pe} = Lu/D \gg 1$, где L — характерный размер задачи. Так как в рассматриваемой задаче отсутствует характерный геометрический размер, то величина L представляет собой характерную длину установления равновесного состояния (которое строго достигается при $x \to \infty$) за счет процессов рекомбинации ионов и их осаждения на частицах. Поэтому $L \sim u \min(\tau_{ii}, \tau_{\pm})$, где $\tau_{ii} = (\alpha n_s)^{-1}$, $\tau_{\pm} = (4\pi a D n_p)^{-1}$ — характерные времена изменения концентраций ионов за счет их взаимной рекомбинации и осаждения на частицах, $n_s = \sqrt{\beta/\alpha}$ — равновесная концентрация ионов в чистом газе.

Например, для воздуха при нормальных условиях $b \sim 2\cdot10^{-4}$ м²/(В·с), $\alpha \sim 2\cdot10^{-12}$ м³/с [3]. Если для ионизации используется радиоактивный источник при $\beta \sim 4\cdot10^{16}$ м⁻³/с [4], то $\tau_{ii} \sim 4\cdot10^{-3}$ с. При радиусе частиц 10^{-6} м и концентрации $n_p = 10^9$ м⁻³ имеем $\tau_{\pm} \sim 20$ с. В этом случае скорости потока 10 м/с соответствует $L \sim 4\cdot10^{-2}$ м.

Введем безразмерные величины

(3)
$$n_{\pm}^* = \frac{n_{\pm}}{n^\circ}, \quad n^\circ = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha_L}}, \quad \alpha_L = 8\pi eb, \quad E^* = \frac{E}{E^\circ}$$
$$x^* = \frac{\sigma_L x}{u}, \quad \sigma_L = 8\pi ebn^\circ, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\alpha_L}, \quad K^* = \frac{aK}{D}$$
$$e_p^* = \frac{e_p b}{aD}, \quad N = \frac{aDn_p}{2ebn^\circ} = \sqrt{\gamma}\,\frac{\tau_{ii}}{\tau_{\pm}}, \quad \mathrm{Re}_E = \frac{u}{bE^\circ}$$

и далее звездочки опустим.

В газах при нормальных условиях параметр γ находится в интервале (0,1; 1) [6] и $N \sim \tau_{ii}/\tau_{\pm}$. Для достаточно плотных газов из формулы Ланжевена $\alpha = \alpha_L = 8\pi eb$ следует $\gamma = 1$, $N = \tau_{ii}/\tau_{\pm}$.

Система уравнений (1), (2) не имеет аналитического решения и должна решаться численно для различных наборов определяющих параметров. Однако в случае предельных значений параметров задача упрощается.

Пусть, например, $\mathrm{Re}_E \gg 1$, т. е. скорость потока много больше скорости миграции ионов под действием электрического поля. При $\mathrm{Pe}_a = au/D \gtrsim 1$ это неравенство непосредственно вытекает из соотношения $\mathrm{Re}_E = \mathrm{Pe}_a D/(abE^\circ)$ и принятого условия о наличии чисто диффузионного механизма зарядки частиц, которое справедливо при $D/(abE^\circ) \gg 1$. Применяя метод возмущений [7] к задаче (1), (2), записанной в безразмерных величинах (3), представим все зависимые переменные в виде рядов

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{1}{\mathrm{Re}_E}\right)^n$$

Для первых отличных от нуля членов этих рядов получается замкнутая система уравнений

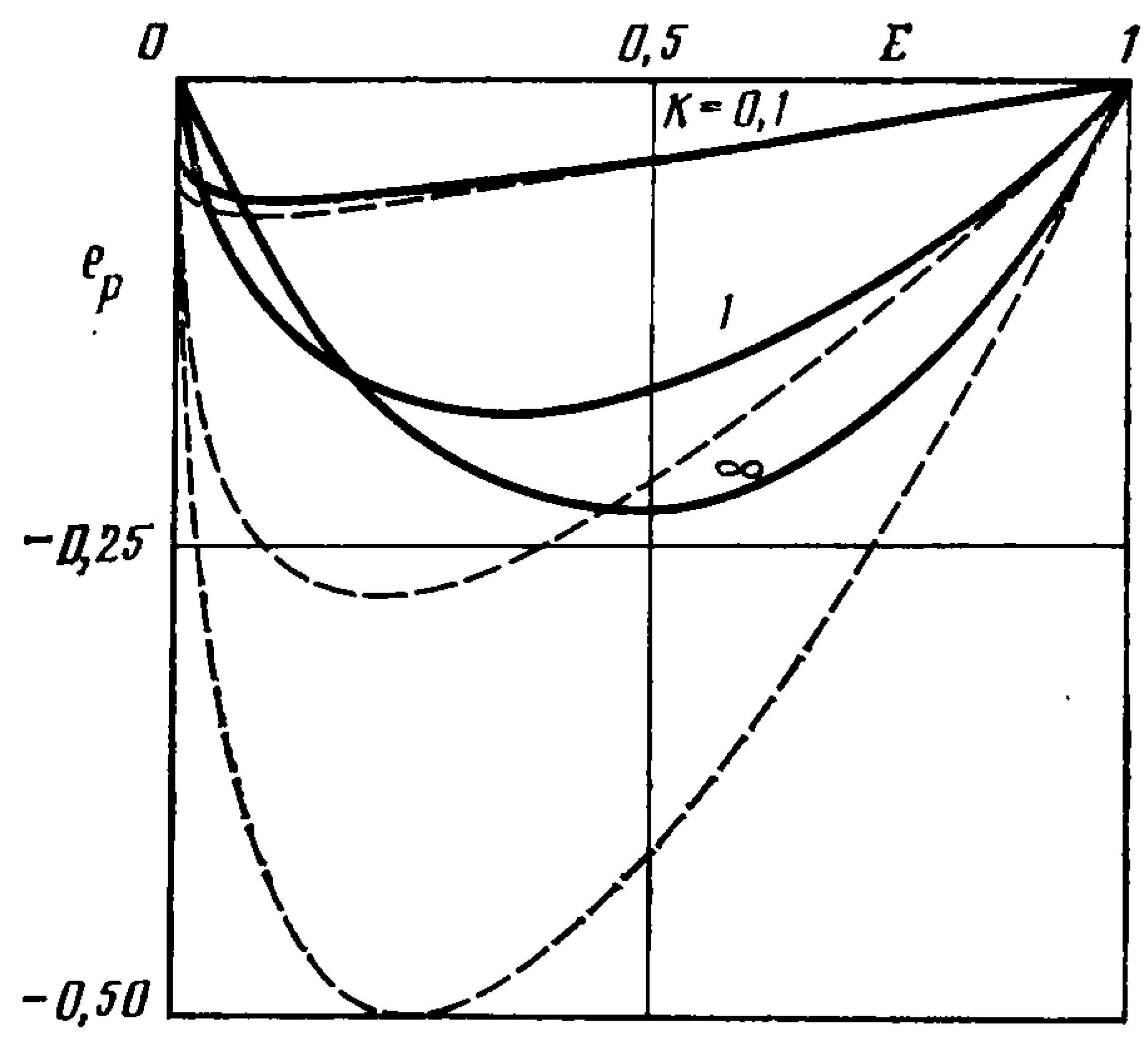
(4)
$$\frac{dn_0}{dx} = 1 - \gamma n_0^2 - ANn_0, \quad \frac{dE_0}{dx} = -n_0 E_0$$
$$\frac{de_{p1}}{dx} = -A\left[n_0 E_0 + \left(N + \frac{1+K/2}{1+K}\,n_0\right)e_{p1}\right]; \quad A = \frac{K}{1+K}$$
$$n_0(0) = e_{p1}(0) = 0, \quad E_0(0) = 1$$

Нулевые приближения по параметру $1/\mathrm{Re}_E$ безразмерных концентраций ионов $n_{\pm}$ совпадают и обозначены n_0.

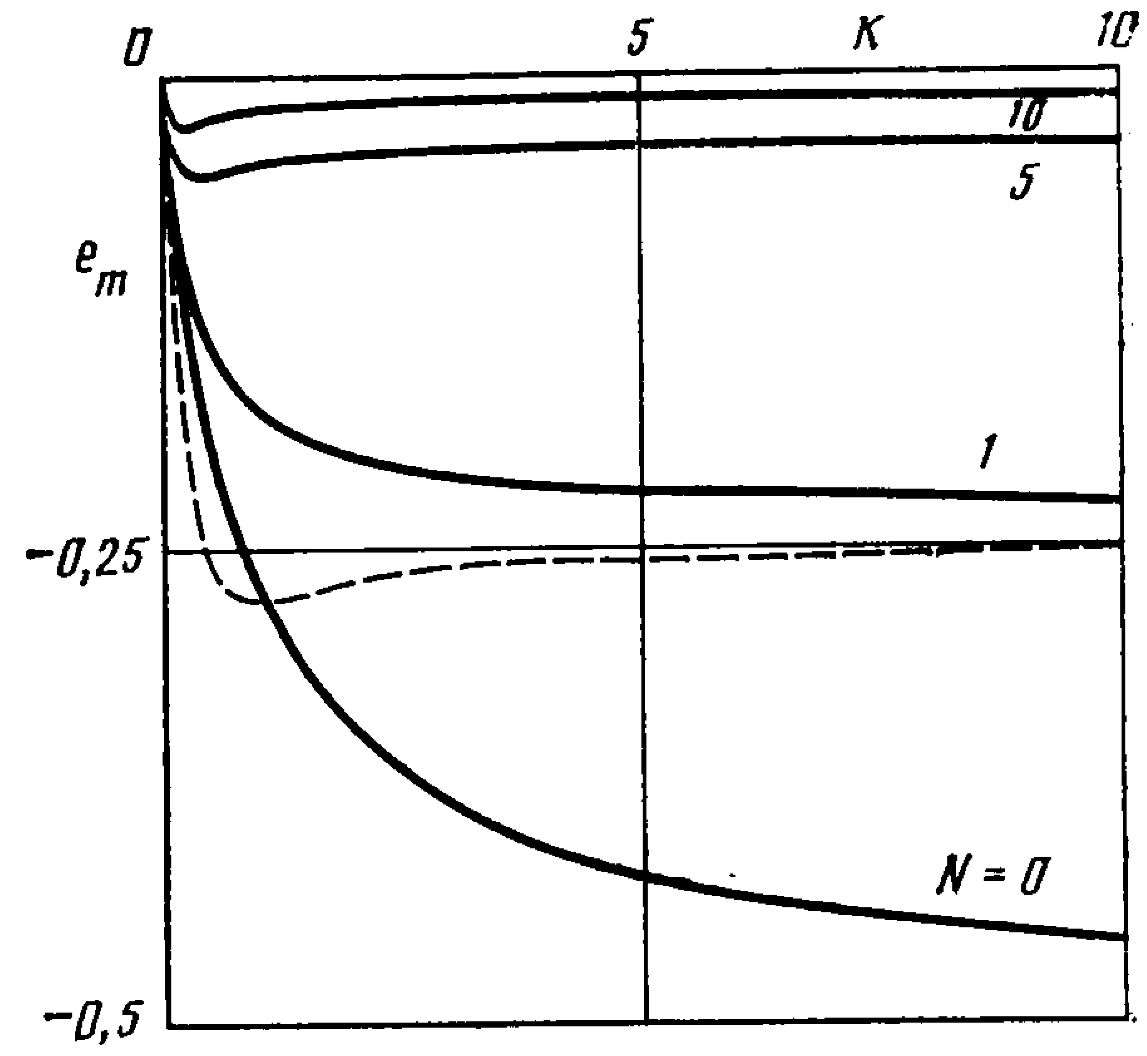
В случае, когда параметр N пренебрежимо мал, из уравнения (4) можно получить аналитическую зависимость величины e_{p1} от E_0, а также соответствующую зависимость $e_p(E)$, верную с точностью до членов $O(1/\mathrm{Re}_E)^2$

(5)
$$e_{p1} = \frac{AE_0}{\lambda}(1 - E_0^{-\lambda}), \quad e_p = \frac{AE_0}{\lambda\,\mathrm{Re}_E}(1 - E_0^{-\lambda})$$
$$2\lambda = 1 + (1+K)^{-2}$$

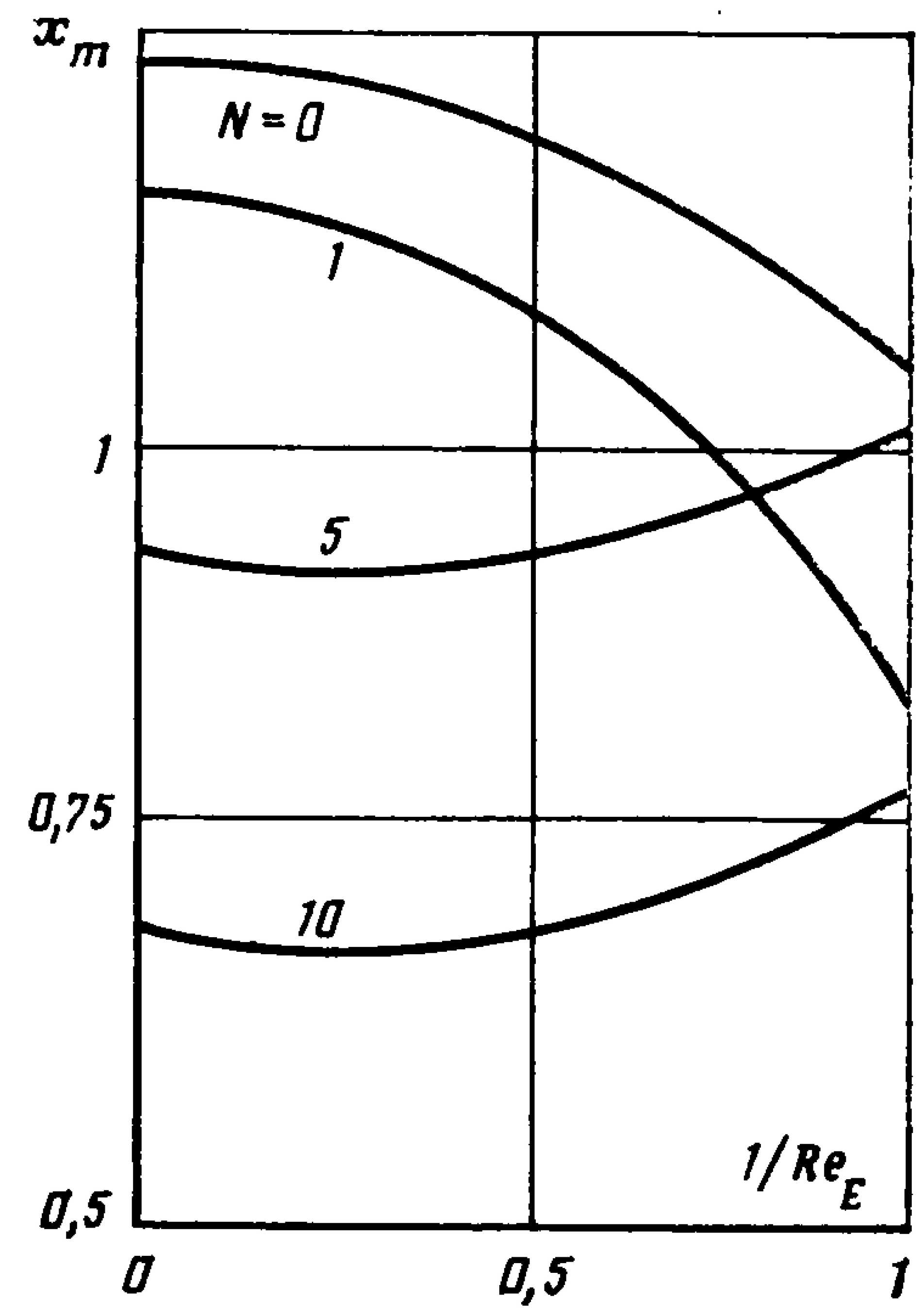
На фиг. 1—4 сплошными линиями представлены результаты численного решения задачи (1), (2) при $\gamma = 0{,}25$, что соответствует сухому воздуху при нормальных условиях. На фиг. 1 показаны зависимости $e_p(E)$ в случае $N = 1$, $\mathrm{Re}_E = 1$ при разных значениях K. Зависимости $e_p(E)$, определяемые формулой (5) для тех же значений K, показаны штриховыми линиями. Поведение кривых $e_p(E)$, полученных при решении задачи (1), (2) и определяемых (5), одинаково. С уменьшением E от единицы до нуля, что соответствует изменению x от нуля до бесконечности, значение $|e_p|$ сначала возрастает, а затем убывает до нуля при $E = 0$, $x = \infty$.



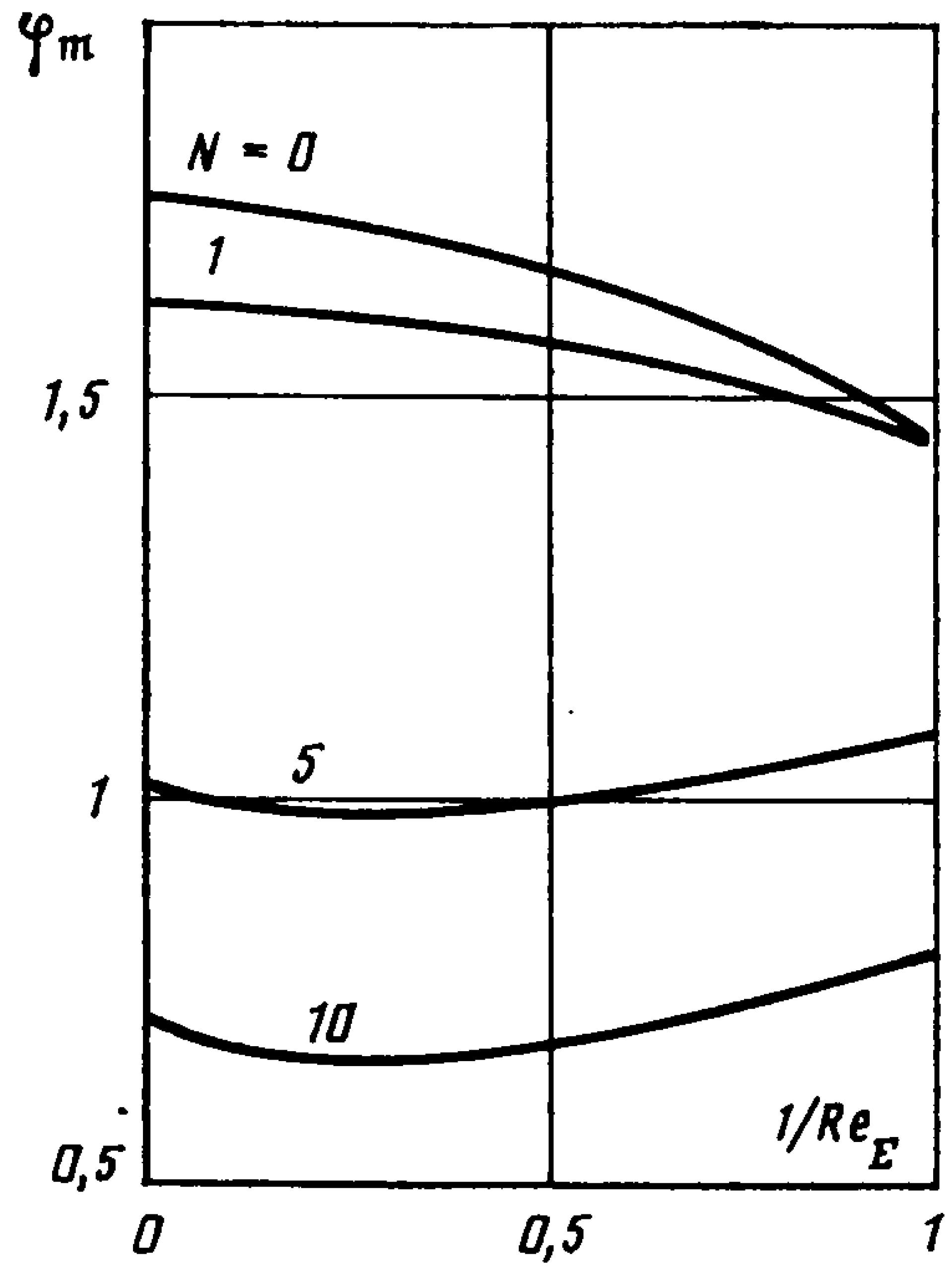
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

При малых значениях безразмерной константы скорости реакции K формула (5) дает лучшее приближение к расчетным зависимостям $e_p\ (E)$, чем в случае больших значений K.

На фиг. 2 изображены зависимости минимального заряда частиц в потоке $e_m = \min e_p$ от величины K при разных значениях параметра N (величина e_m соответствует $\max \mid e_p \mid$, так как $e_p < 0$ при $E^\circ > 0$). При $N \lesssim 1$ зависимость $e_m\ (K)$ монотонна и абсолютная величина минимального заряда увеличивается с ростом K. При достаточно больших значениях N зависимость $e_m\ (K)$ имеет минимум, но с ростом K во всех случаях имеет место стремление к конечному пределу $e_m\ (\infty)$. Зависимость $e_m\ (K)$, полученная путем определения экстремума функции (5), показана на фиг. 2 штриховой линией. Эта зависимость также немонотонна и имеет минимум. При стремлении к нулю безразмерной константы скорости реакции K всегда стремится к нулю и максимальное значение абсолютной величины заряда частиц $\mid e_m \mid$, достижимое в потоке.

На фиг. 3, 4 представлены зависимости расстояния x_m до плоскости, на которой заряд частиц достигает максимального по модулю значения, и безразмерной разности потенциалов $\varphi_m = \varphi 8\pi ebn^\circ/(uE)$ от параметра $1/\mathrm{Re}_E$ при разных значениях N, причем $K = \infty$. Видно, что величина x_m слабо зависит от параметров N, Re_E и $x_m \sim 1$, а наличие аэрозольных частиц оказывает существенное влияние на зависимость $\varphi_m\ (1/\mathrm{Re}_E)$ только при $N > 1$ и $\mathrm{Re}_E < 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. I. 535 с. Т. II. 573 с.
2. *Ватажин А. Б., Грабовский В. И., Лихтер В. А., Шульгин В. И.* Электрогазодинамические течения. М.: Наука. 1983. 344 с.
3. *Чалмерс Дж.* Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеоиздат. 1974. 144 с.
4. *Adachi M., Kousaka Y., Okuyama K.* Unipolar and bipolar diffusion charging of ultrafine aerosol particles // J. Aerosol Sci. 1985. V. 16. No. 2. P. 109—123.

5. *Седова Г. Л., Черный Л. Т.* Уравнения электрогидродинамики слабоионизованных аэрозолей с диффузионной зарядкой частиц дисперсной фазы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 54—60.
6. *Смирнов Б. М.* Введение в физику плазмы. М.: Наука. 1982. 224 с.
7. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир. 1972. 274 с.

Москва

Поступила в редакцию 6.VI.1986

УДК 533.6.011

ЗАДАЧА О ЗАПОЛНЕНИИ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА ВЯЗКИМ ТЕПЛОПРОВОДНЫМ ГАЗОМ

Белов С. Я.

Изучается система дифференциальных уравнений, решение которой описывает одномерное движение вязкого теплопроводного совершенного политропного газа [1, 2]. Доказывается однозначная разрешимость задачи о заполнении газом ограниченного объема. Теорема существования устанавливается методом продолжения локального по времени решения при помощи глобальных априорных оценок. Метод получения таких оценок был предложен [2] для уравнений вязкого газа, записанных в лагранжевых переменных. Наличие проницаемой стенки приводит к тому, что граничные условия являются неоднородными, и в массовых лагранжевых переменных начально-краевая задача ставится в области с криволинейной границей. Последнее обстоятельство требует развития техники доказательства оценок. Корректность в целом по времени задачи о заполнении объема вязким газом ранее исследовалась только для более простых моделей и для системы уравнений теплопроводного газа в случае, когда коэффициент теплопроводности специальным образом зависит от температуры [3, 4]. Другие постановки задач о течениях вязкого газа в областях с проницаемыми границами изучались в [3—6].

1. Постановка задачи и основные результаты. Одномерное движение вязкого совершенного политропного газа в массовых лагранжевых координатах описывается системой уравнений [1, 2]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial p}{\partial x},\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho^2\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

$$c_v\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\mu\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-p\frac{\partial u}{\partial x},\quad p=R\rho\theta$$

Здесь u, ρ, θ, p — соответственно, скорость, плотность, абсолютная температура и давление — искомые характеристики среды; x — массовая лагранжева переменная, t — время; μ, c_v, $\varkappa$ — коэффициенты вязкости, удельной теплоемкости, теплопроводности — положительные постоянные; R — универсальная газовая постоянная.

Рассматривается движение вязкого газа в некоторой области физического пространства, левая граница которой неподвижна и проницаема (через нее газ постоянно втекает), а правая граница остается неподвижной, непроницаемой и теплоизолированной. Этот процесс в течение времени T, $0<T<\infty$ может быть описан в лагранжевых переменных решением системы уравнений (1.1), которое определено в области $Q_T=\{(x,t): 0<t<T,\ s(t)<x<X\}$ и удовлетворяет следующим условиям ($X>0$ — начальная масса газа):

$$u=u_0(x),\quad \rho=\rho_0(x),\quad \theta=\theta_0(x)\quad \text{при}\quad t=0,\quad x\in\overline{\Omega} \tag{1.2}$$

$$u=u_1(t),\quad \rho=\rho_1(t),\quad \theta=\theta_1(t)\quad \text{при}\quad x=s(t),\quad t\in[0,T] \tag{1.3}$$

$$u=\frac{\partial\theta}{\partial x}=0\quad \text{при}\ x=X,\ t\in[0,T] \tag{1.4}$$

$$s(t)=-\int\limits_0^t\rho_1(\tau)u_1(\tau)\,d\tau,\quad \Omega=(0,X),\quad \Omega_t=(s(t),X)$$