Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 6, 1987

УДК 539.3

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ С РАЗРЕЗОМ

Бойко А. В., Карпенко Л. Н.

Получено новое сингулярное интегральное уравнение, описывающее упругое равновесие полосы как с внутренним, так и с краевым разрезом (трещиной), имеющее существенное преимущество перед известными ([1—9] и др.) с точки зрения численной реализации и выявляющее аналитическую связь с аналогичным уравнением для полуплоскости. Представлены числовые результаты расчета коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах внутренней и краевой трещин, уточняющие литературные данные.

1. Пусть упругое тело занимает полосу $0 < y < H$, $-\infty < x < \infty$ с прямолинейным разрезом вдоль оси Oy между точками $y = a$, $y = b$, $a \geqslant 0$, $b \leqslant H$. Граница полосы свободна от напряжений, на берегах разреза заданы напряжения $\sigma_x = p(y)$, $\tau_{xy} = 0$. Тогда напряженное состояние рассматриваемого тела описывается [10] при помощи двух регулярных функций комплексной переменной $z = x + iy$:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\,[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\,[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \tag{1.1}$$

удовлетворяющих граничным условиям на берегах разреза

$$\Phi^{\pm}(iy) + \overline{\Phi^{\pm}(iy)} + iy\Phi'^{\pm}(iy) - \Psi^{\pm}(iy) = p(y) \tag{1.2}$$

и на границе полосы

$$\begin{gathered} \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\Phi'(x) + \Psi(x) = 0 \\ \Phi(x + iH) + \overline{\Phi(x + iH)} + (x - iH)\,\Phi'(x + iH) + \Psi(x + iH) = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Верхними индексами плюс и минус отмечены значения функций на левом и правом берегах разреза соответственно при выборе положительного направления от точки $y = a$ к точке $y = b$.

Для сведения задачи к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) воспользуемся известным методом [1]. Исходя из граничного условия (1.2) и симметрии задачи введем следующее представление искомых функций:

$$\begin{gathered} \Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi} I_1(-iz), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) - izI_2(-iz) \\ I_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - z)^n}\,d\eta, \quad \varphi(\eta) = \frac{2\mu}{1 + \varkappa}\,\frac{d}{d\eta}\,[u^+(\eta) - u^-(\eta)] \end{gathered} \tag{1.4}$$

где функции Φ_0, Ψ_0 регулярны в сплошной полосе, $u^{\pm}(\eta)$ — смещения берегов разреза в направлении оси Ox, μ и $\varkappa$ — упругие постоянные [10]. Таким образом, $\varphi(\eta)$ — вещественная функция. Граничное условие (1.2)

[1] *Карпенко Л. Н.* Об одном приближенном методе решения сингулярного интегрального уравнения и его применении к задаче плоской теории упругости для областей со щелями: Автореф. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1965. 12с.

Варианты этого метода известны также по публикациям других авторов, например [8].

приводит к соотношению

$$2I_1(y) + \Phi_0(iy) + \overline{\Phi_0(iy)} + iy\Phi_0'(iy) - \Psi_0(iy) = p(y) \tag{1.5}$$

Граничные условия (1.3) позволяют выразить функции $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ через новую неизвестную функцию $\varphi(\eta)$, после чего (1.5) становится СИУ относительно $\varphi(\eta)$, решение которого должно удовлетворять также условию однозначности перемещений

$$\int_a^b \varphi(\eta)\,d\eta = 0 \tag{1.6}$$

Таким образом, для Φ_0, Ψ_0 получаем следующую граничную задачу:

$$\Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \bar{t}\Phi_0'(t) + \Psi_0(t) = -I_1(-it) - I_1(i\bar{t}) + \\ + i(t+\bar{t})\,I_2(-it), \quad t = x, \quad t = x + iH, \quad -\infty < x < \infty \tag{1.7}$$

2. Для решения задачи (1.7) применим преобразование Фурье

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi)\, e^{iz\xi}\, d\xi, \quad \Psi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi)\, e^{iz\xi}\, d\xi$$

Из граничных условий (1.7) находим

$$A(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \varphi(\eta)\,\alpha(\eta,\xi)\,d\eta, \quad B(\xi) = \\ = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \varphi(\eta)\,\beta(\eta,\xi)\,d\eta$$

$$\alpha(\eta,\xi) = \{(1 - e^{-2H\xi})[(2\eta\xi - 1)e^{H\xi} + e^{-(H-2\eta)\xi}] + \\ + 2H\xi e^{-H\xi}[(2H\xi - 2\eta\xi - 1)e^{2\eta\xi} + 1]\}\,\gamma(\eta,\xi), \qquad \xi > 0$$

$$\alpha(\eta,\xi) = -e^{H\xi}\alpha(H-\eta, -\xi), \qquad \xi < 0$$

$$\beta(\eta,\xi) = -\alpha(\eta,-\xi) + \xi\frac{\partial}{\partial\xi}\alpha(\eta,\xi) + \begin{cases} e^{-\eta\xi}, & \xi > 0 \\ -(1 + 2\eta\xi)\,e^{\eta\xi}, & \xi < 0 \end{cases}$$

$$\gamma(\eta,\xi) = e^{-(H+\eta)\xi}[(1 - e^{-2H\xi})^2 - 4H^2\xi^2 e^{-2H\xi}]^{-1}$$

Теперь можно записать

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b L(z,\eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta \tag{2.1}$$

$$\bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b N(z,\eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta$$

$$L(z,\eta) = -\int_0^\infty [e^{iz\xi}\alpha(\eta,\xi) - e^{-(H-iz)\xi}\alpha(H-\eta,\xi)]\,d\xi \tag{2.2}$$

$$N(z,\eta) = \int_0^\infty \{[(1 + iz\xi - i\bar{z}\xi)\,e^{iz\xi} + e^{-iz\xi}]\,\alpha(\eta,\xi) + \\ + [e^{iz\xi} + (1 - i\bar{z}\xi)\,e^{-iz\xi}]\,\alpha(\eta,-\xi) - e^{(-\eta+iz)\xi} + (1 - 2\eta\xi)\,e^{-(\eta+iz)\xi}\}\,d\xi$$

Подстановка соотношений (2.1) в (1.5) приводит к искомому СИУ. Подобные уравнения были получены рядом авторов [7—9], тем не менее никем не отмечено, что интегралы (2.2) (в работах других авторов они представлены в ином виде) сходятся медленно, что в ряде случаев не позволяет практически достичь приемлемой точности. Медленная сходимость этих интегралов вызвана наличием у подынтегральных функций слагаемых порядка $e^{-(\eta+y)\xi}$, $e^{-(2H-\eta-y)\xi}$ и т. п. Поэтому целесообразно выделить указанные слагаемые и проинтегрировать их в конечном виде, что привело к следующим выражениям:

(2.3)
$$L(z,\eta)=L_1(z,\eta)-L_1(iH-z,\,H-\eta),\quad N(z,\eta)=$$
$$=N_1(z,\eta)-N_1(iH-z,\,H-\eta)$$

$$L_1(z,\eta)=\frac{\eta+iz}{(\eta-iz)^2}+\int_0^\infty\{f(\eta,\xi)\,e^{-(H+iz)\xi}+g(\eta,\xi)\,e^{-(H-iz)\xi}\}\,d\xi$$

$$N_1(z,\eta)=-\frac{4}{\eta-iz}+\frac{4i(z-\bar z)\eta}{(\eta-iz)^3}+\frac{8\eta}{(\eta-iz)^2}-$$
$$-\int_0^\infty(\{f(\eta,\xi)[1-i(z-\bar z)\xi]+g(\eta,\xi)\}\,e^{-(H+iz)\xi}+$$
$$+\{f(\eta,\xi)+[1+i(z-\bar z)\xi]\,g(\eta,\xi)\}\,e^{-(H-iz)\xi})\,d\xi$$
$$f(\eta,\xi)=[1-e^{-2H\xi}+2H\xi\,(2\eta\xi-1)]\,\gamma(\eta,\xi)$$
$$g(\eta,\xi)=[(1-2\eta\xi)(1-e^{-2H\xi}+4H^2\xi^2)-2H\xi]\,\gamma(\eta,\xi)$$

Подстановка полученных выражений в (1.5) дает следующее СИУ:

(2.4)
$$\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\varphi(\eta)}{\eta-y}\,d\eta+\frac{1}{\pi}\int_a^b K(y,\eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta=p(y)$$
$$K(y,\eta)=M(y,\eta)-M(H-y,\;H-\eta)$$
$$M(y,\eta)=\frac{y^2+4y\eta-\eta^2}{(y+\eta)^3}+\frac{1}{2}\int_0^\infty M_1(y,\eta,\xi)\,d\xi$$
$$M_1(y,\eta,\xi)=g(\eta,\xi)[(3-2y\xi)\,e^{-(H+y)\xi}+e^{-(H-y)\xi}]+$$
$$+f(\eta,\xi)[e^{-(H+y)\xi}+(3+2y\xi)\,e^{-(H-y)\xi}]$$

Первое слагаемое в выражении для $M(y,\eta)$ соответствует регулярному ядру СИУ для трещины в полуплоскости [11], что и следовало ожидать.

При решении уравнения (2.4) следует учитывать условие однозначности перемещений (1.6).

3. Формулы (1.4), (2.1), (2.3) позволяют по известной функции $\varphi(\eta)$ рассчитать распределение напряжений:

(3.1)
$$\sigma_x=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{2\eta+3iz+i\bar z}{2(\eta+iz)^2}\,\varphi(\eta)\,d\eta+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_a^b[E(z,\eta)-E(iH-z,\,H-\eta)]\,\varphi(\eta)\,d\eta$$
$$E(z,\eta)=-\operatorname{Re}\frac{\eta^2-2i\eta(z-\bar z)+z^2}{(\eta-iz)^3}+\frac{1}{2}\int_0^\infty M_1(y,\eta,\xi)\cos x\xi\,d\xi$$
$$\sigma_y=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{2\eta+i(z-\bar z)}{2(\eta+iz)^2}\,\varphi(\eta)\,d\eta+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_a^b[F(z,\eta)-E(iH-z,\,H-\eta)]\,\varphi(\eta)\,d\eta$$
$$F(z,\eta)=\operatorname{Re}\frac{3\eta^2-2i\eta(z-\bar z)+3z^2}{(\eta-iz)^3}+\frac{1}{2}\int_0^\infty M_{2-}(y,\eta,\xi)\cos x\xi\,d\xi$$
$$\tau_{xy}=-\operatorname{Re}\frac{x}{\pi}\int_a^b\frac{\varphi(\eta)}{(\eta+iz)^2}\,d\eta+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_a^b[G(z,\eta)-G(iH-z,\,H-\eta)]\,\varphi(\eta)\,d\eta$$

$$G(z,\eta)=2\,\mathrm{Im}\,\frac{\eta^2-i\eta(z-\bar z)+z^2}{(\eta-iz)^3}+\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty M_{2+}(y,\eta,\xi)\sin x\xi\,d\xi$$

$$M_{2\pm}(y,\eta,\xi)=f(\eta,\xi)[(1\pm 2y\xi)\,e^{-(H-y)\xi}-e^{-(H+y)\xi}]\pm$$
$$\pm\, g(\eta,\xi)[e^{-(H-y)\xi}-(1\mp 2y\xi)\,e^{-(H+y)\xi}]$$

4. Рассмотрим упругое равновесие полосы с центральной трещиной при растяжении постоянным напряжением $\sigma_y = p_0$, приложенным на бесконечности. В этом случае правая часть уравнения (2.4) $p(y) = -p_0$, а верхний предел интегрирования $b = H - a$. Пусть $(H - 2a)/2 = l$, где $2l$ — длина трещины, $\lambda = (H - 2a)/H = 2l/H$. Произведя в (2.4) замену переменных

$$H\xi = \sigma,\ \eta = l\tau + H/2,\ y = l\tau_0 + H/2,\ -1 < \tau,\ \tau_0 < 1 \tag{4.1}$$

перейдем к интегрированию на отрезке $[-1,1]$:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\tau_0}d\tau+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}K_1(\tau_0,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=-p_0 \tag{4.2}$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\varphi(\tau)\,d\tau=0,\quad K_1(\tau_0,\tau)=lK(y,\eta)$$

Ядро $K_1(\tau_0,\tau)$ будем находить численно при помощи квадратурной формулы Гаусса — Лягерра [12] с 15 узлами. При этом, как показал численный эксперимент, погрешность не превышает 0,001%.

Неизвестную функцию $\varphi(\tau)$ представим в виде

$$\varphi(\tau) = -p_0 u(\tau)/\sqrt{1-\tau^2} \tag{4.3}$$

($u(\tau)$ — новая неизвестная функция). Учитывая (4.3), применим к (4.2) квадратурную формулу типа Гаусса — Чебышева [13]. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $u_i \approx \approx u(\tau_i)$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i\left[\frac{1}{\tau_i-\tau_{0k}}+K_1(\tau_{0k},\tau_i)\right]=1\quad(k=1,2,\ldots,n-1) \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n}u_i=0$$

$$\tau_i=\cos\frac{2i-1}{2n}\pi\quad(i=1,2,\ldots,n)$$

$$\tau_{0k}=\cos\frac{\pi k}{n}\quad(k=1,2,\ldots,n-1)$$

Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине центральной прямолинейной трещины в полосе вычисляется следующим образом при помощи интерполяционной формулы:

$$k_1/(p_0\sqrt{\pi l}) = -u(1) \tag{4.5}$$

$$u(1)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^n\sqrt{\frac{1+\tau_i}{1-\tau_i}}\,u_i$$

где u_i — решение системы уравнений (4.4). Результаты расчета по формуле (4.5) безразмерного КИН в вершине центральной трещины в полосе, растягиваемой на бесконечности постоянным нормальным напряжением p_0, приводятся ниже:

λ	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95
$k_1/(p_0\sqrt{\pi l})$	1,0060	1,0577	1,1867	1,4882	2,5796	3,667

Погрешность вычислений, во всех случаях не превышавшая 0,1%, контролировалась путем сравнения результатов расчетов, полученных при различной точности алгебраической аппроксимации интегрального уравнения (4.2), которая определяется порядком n соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (4.4).

Результаты для $\lambda \leqslant 0{,}7$ с точностью до 0,007% совпадают с данными работ [4, 7]. Отличие от результатов, представленных в [3, 8], в том же диапазоне λ достигает 0,8; 0,6% соответственно. Проведенный контроль погрешности вычислений позволяет считать полученные результаты наиболее точными.

Аналогично тому, как это сделано выше, может быть рассмотрена задача об эксцентрично расположенной внутренней трещине.

5. Рассмотрим упругое равновесие полосы с краевой трещиной для двух типов нагрузки на бесконечности: растяжение постоянным напряжением $\sigma_y = p_{01}$ или изгиб моментом M. В этом случае правая часть уравнения (2.4) $p(y) = -p_{01}$ или $p(y) = -p_{02}(1 - 2y/H)$, где $p_{02} = 6M/(dH^2)$, d — толщина пластины, которую положим равной единице. Пусть $a = 0$, $b = l$, где l — длина трещины, $\lambda = l/H$. Произведя в (2.4) замену переменных

$$H\xi = \sigma,\ \eta = l\tau,\ y = l\tau_0,\ -1 < \tau,\ \tau_0 < 1 \tag{5.1}$$

перейдем к интегрированию на отрезке [0,1]. В результате получим соотношения, аналогичные (4.2), при соответствующем изменении пределов интегрирования и замене $-p_0$ на $p(\tau_0)$.

Ядро $K_1(\tau_0, \tau)$ будем вычислять так же, как в п. 4.

Полученное СИУ решим численным методом [14], который особенно эффективен при рассмотрении пересекающихся трещин, либо выходящих на границу тела. С этой целью неизвестную функцию $\varphi(\tau)$ представим в виде

$$\varphi(\tau) = -p_{0r}\sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}}\,u_r(\tau) \tag{5.2}$$

где $u_r(\tau)$ — новые неизвестные функции ($r = 1$ для растяжения, $r = 2$ для изгиба). Хотя множитель $\sqrt{\tau/(1-\tau)}$ в представлении (5.2) не вполне описывает поведение искомой функции в точке $\tau = 0$, однако, как показано в работе [14], его использование позволяет эффективно получать численное решение СИУ подобных задач.

Применим квадратурную формулу полуоткрытого типа [14]. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $u_{rj} \approx u_r(\tau_j)$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j u_{rj}\left[\frac{1}{\tau_j - \tau_{0k}} + K_1(\tau_{0k}, \tau_j)\right] = \begin{cases} 1, & r = 1 \\ 1 - 2\lambda\tau_{0k}, & r = 2 \end{cases} \tag{5.3}$$

$$A_j = \frac{1}{n}\sin^2\frac{j\pi}{2n}\quad (j = 1, 2, \ldots, n-1),\quad A_n = \frac{1}{2n}$$

$$\tau_j = \sin^2\frac{j\pi}{2n}\quad (j = 1, 2, \ldots, n),\quad \tau_{0k} = \sin^2\frac{2k-1}{4n}\pi$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

КИН в вершине краевой прямолинейной трещины, расположенной в полосе, вычисляется следующим образом:

$$k_{Ir}/(p_{0r}\sqrt{\pi l}) = -\sqrt{2}\,u_r(1)\quad (r = 1, 2) \tag{5.4}$$

Значения $u_r(1) \approx u_{rn}$ при использовании указанного метода определяются непосредственно из решения системы линейных алгебраических уравнений (5.3), а не при помощи интерполяционной формулы типа второй формулы (4.5), являющейся дополнительным источником погрешностей. В этом заключается одно из преимуществ данного метода.

В таблице приведены результаты расчета по формуле (5.4) безразмерного КИН в вершине краевой трещины в полосе под действием на бесконечности соответственно постоянного растягивающего напряжения p_{01} (верхняя часть таблицы) или изгибающего момента M (нижняя часть), а также результаты других авторов. Погрешность вычислений контролировалась так же, как и в случае центральной трещины. Все вычисления были проведены с удвоенной точностью на ЭВМ серии ЕС. Все приведенные цифры верны.

Источник	$\lambda = 0{,}05$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95
[5]	1,14	1,19	1,67	2,83	6,38	34,6	99,3
[6]	1,140	1,189	1,660	2,826			
[8]		1,189	1,659	2,820	6,340	33,92	90,66
[9]	1,14	1,19	1,66	2,83	6,38	34,8	102
(5.4)	1,1399	1,1892	1,6599	2,825	6,36	34,6	99,4
[5]	1,07	1,04	1,11	1,48	2,72	12,5	
[8]		1,047	1,123	1,494	2,717	12,19	31,26
[9]	1,07	1,04	1,13	1,50	2,73	12,4	
(5.4)	1,0709	1,0472	1,1242	1,4973	2,726	12,5	34,4

Видно, что расхождение результатов для краевой трещины, полученных разными авторами, достигает более 10%. Полученные здесь результаты хорошо согласуются с данными [9]. Проведенный контроль погрешности вычислений позволяет считать полученные результаты наиболее точными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исида М.* Коэффициенты интенсивности напряжения при растяжении пластины с эксцентрично расположенной трещиной // Прикл. механика (Тр. Америк. о-ва инж.-механ.). Сер. Е. 1966. Т. 3. № 3. С. 225—227.
2. *Гольдштейн Р. В., Рысков И. Н., Салганик Р. Л.* Центральная поперечная трещина в упругой полосе // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 97—104.
3. *Sneddon I. N., Srivastav R. P.* The stress field in the vicinity of a Griffith crack in a strip of finite width // Intern. J. Engng. Sci. 1971. V. 9. No. 5. P. 479—488.
4. *Isida M.* Methods of laurant series expansion for internal crack problems // Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Leyden: Noordhoff. 1973. P. 56—130.
5. *Benthem J. P., Koiter W. T.* Asymptotic approximations to crack problems // Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Leyden: Noordhoff. 1973. P. 131—178.
6. *Keer L. M., Freedman J. M.* Tensile strip with edge cracks // Intern. J. Engng Sci. 1973. V. 11. No. 12. P. 1265—1275.
7. *Krenk S.* On the elastic strip with an internal crack // Intern. J. Solids and Struct. 1975. V. 11. No. 6. P. 693—708.
8. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка. 1976. 443 с.
9. *Cardew G. E., Howard I. C.* An edge-crack in an elastic strip and related problems in fracture mechanics and viscous flow. // Intern. J. Engng Sci. 1976. V. 14. No. 4. P. 403—414.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
11. *Карпенко Л. Н.* О методе расчета напряженного состояния в окрестности неглубокой выработки, пройденной по вертикальному угольному пласту // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. 1965. № 4. С. 3—8.
12. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз. 1962. 500 с.
13. *Карпенко Л. М.* Про зображення функцій за допомогою многочленів Якобі та обчислення деяких інтегралів типу Коші // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. математики та механіки. 1971. № 13. С. 74—79.
14. *Boiko A. V., Karpenko L. N.* On some numerical methods for the solution of the plane elasticity problem for bodies with cracks by means of singular integral equations// Intern. J. Fracture. 1981. V. 17. No. 4. P. 381—388.

Киев

Поступила в редакцию 17.III.1987