Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 6, 1987

УДК 539.3

К ОБРАЩЕНИЮ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, К КОТОРЫМ ПРИВОДЯТСЯ НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Шерман Д. И.

Статья посвящена обращению и изучению некоторых специального вида сингулярных интегральных уравнений (наряду с подвижной особенностью присутствует и неподвижная особенность). Уравнения рассматриваемой структуры возникают при рассмотрении задач кручения однородных и кусочно-однородных стержней. Получены явные представления для решения уравнений и установлены ограничения на правую часть, при которых эти решения справедливы.

1. Рассмотрим сингулярные интегральные уравнения вида

$$\frac{2}{\pi i}\int \delta(t)\,K^{\mp}(t, t_0, \rho)\,dt = g(t_0), \quad -\rho < t_0 < \rho \tag{1.1}$$

$$K^{\mp}(t, t_0, \rho) = \frac{1}{t-t_0} \mp \frac{\rho}{tt_0-\rho^2}$$

Здесь и далее, если не оговорено противное, интегрирование ведется по прямолинейному отрезку $[-\rho, \rho]$; $\delta(t)$ — искомая плотность и $g(t_0)$ — заданная непрерывная функция по Гельдеру на том же отрезке. Отвечающие этим уравнениям формулы обращения таковы:

$$\delta(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int g(t)\,K^{\pm}(t, t_0, \rho)\,dt \tag{1.2}$$

В том, что эти формулы дают подлинное обращение соответственных уравнений (1.1), можно убедиться прямой проверкой, внеся указываемые значения $\delta(t_0)$ под знак интегралов в уравнениях (1.1) и выполнив затем некоторые положенные операции. Основой доказательства является процесс вычисления сингулярных интегралов (фактическое построение формул Пуанкаре — Бертрана для разрывных контуров).

2. Перейдем к рассмотрению сингулярного интегрального уравнения второго рода

$$\mu(t_0) - \lambda\int \mu(t)\,K^{+}(t, t_0, \rho)\,dt = f(t_0) \tag{2.1}$$

где λ — некоторый параметр, $f(t_0)$ — заданная гельдерова функция, а $\mu(t_0)$ — подлежащая определению плотность. Положив в нем

$$g(t_0) = \frac{1}{\lambda}[\mu(t_0) - f(t_0)]$$

и обратив полученное уравнение согласно формуле (1.2), получим

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi^2\lambda}\int \mu(t)\,K^{-}(t, t_0, \rho)\,dt = F(t_0) \tag{2.2}$$

$$F(t_0) = \frac{1}{\pi^2\lambda}\int f(t)\,K^{-}(t, t_0, \rho)\,dt$$

Умножив уравнение (2.2) на $\pi^2\lambda^2$ и вычтя его почленно из первоначального уравнения (2.1), придем к такому особому уравнению:

$$(\pi^2\lambda^2 - 1)\,\mu(t_0) + 2\lambda\int \mu(t)\frac{dt}{t-t_0} = R(t_0) \tag{2.3}$$

$$R(t) = \pi^2\lambda^2 F(t) - f(t)$$

Решение уравнения (2.3) можно получить известным способом [1, 2].

Особое уравнение (2.1), взятое в более усложненной форме Трикоми, ранее изучалось самим Трикоми, а затем С. Г. Михлиным и А. В. Бицадзе [1, 3].

Заметим, что сходным же образом может быть изучено и сингулярное уравнение вида

$$\mu(t_0) - \lambda \int \mu(t) K^-(t, t_0, \rho)\, dt = f(t_0) \tag{2.4}$$

3. Определенный интерес для приложения представляет особое интегральное уравнение первого рода вида

$$\frac{1}{\pi i} \int \omega(t) L^+(t, t_0, \rho)\, dt = f(t_0), \quad -\rho < t_0 < \rho \tag{3.1}$$

$$L^{\pm}(t, t_0, \rho) = \frac{1}{t - t_0} \pm \frac{1}{t - \rho^2/t_0}$$

Его решение, очевидно, дается формулой

$$\omega(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int f(t) L^-(t, t_0, \rho)\, dt \tag{3.2}$$

либо ей адекватной

$$\omega(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int [f(t) - f(t_0)] L^-(t, t_0, \rho)\, dt$$

откуда явствует непрерывность искомой плотности $\omega(t)$.

Однако это значение $\omega(t)$ служит решением уравнения (3.1) лишь при обязательном соблюдении следующего условия, которому должна быть подчинена задаваемая функция $f(t)$:

$$\frac{1}{\pi i} \int f(t) \ln \frac{\rho - t}{\rho + t} \frac{dt}{t} = 0 \quad \left(\int \ln \frac{\rho - t}{\rho + t} \frac{dt}{t} = -\frac{\pi^2}{2} \right) \tag{3.3}$$

В подлинности решения (3.2) проще всего убедиться, совершив подстановку даваемой им плотности в исходное уравнение (3.1). Уравнение (3.1) в более общем случае (при наличии параметра) рассматривалось в [4]. Правда, непосредственный переход для значения параметра $\lambda = 1$, при котором получается уравнение (3.1), не представляется очевидным, однако использование формулы (2.1) из работы [5] также приводит к формуле (3.2).

Замечание 1. При $f(t) = t$ из (3.2) получим

$$\omega(t_0) = \left(t_0 - \frac{\rho^2}{t_0}\right) \left[\ln \frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0} - \pi i \right]$$

Как видно, плотность $\omega(t_0)$ непрерывна на замкнутом отрезке γ_0.

Положим теперь $f(t) = t^2$. По выполнении простых выкладок находим

$$\omega(t_0) = \frac{2\rho}{\pi i}\left(t_0 - \frac{\rho^2}{t_0}\right) + \left(t_0^2 - \frac{\rho^4}{t_0^2}\right) \left[\frac{1}{\pi i} \ln \frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0} - 1 \right]$$

Учитывая далее разложение вблизи $z = 0$ (со стороны $\operatorname{Im} z > 0$)

$$\ln \frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0} = \pi i - 2\frac{t_0}{\rho} + O(t_0^3)$$

убеждаемся в непрерывности $\omega(t_0)$ на отрезке γ_0.

Замечание 2. Для особого уравнения вида

$$\frac{1}{\pi i} \int \omega(t) L^-(t, t_0, \rho)\, dt = f(t_0) \tag{3.4}$$

искомое решение выглядит так:

$$\omega(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int f(t) L^+(t, t_0, \rho)\, dt \tag{3.5}$$

При $f(t_0) = 1$ имеем

$$\omega(t_0) = 2\left(\frac{1}{\pi i}\ln\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0} - 1\right) \tag{3.6}$$

Учитывая формулы

$$\frac{1}{\pi i}\int \ln\frac{\rho - t}{-\rho - t}\frac{dt}{t - t_0} = \frac{1}{2\pi i}\ln^2\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int \ln\frac{\rho - t}{-\rho - t}\frac{dt}{t - \rho^2/t_0} = \frac{1}{2\pi i}\ln^2\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0} - \frac{\pi i}{2}$$

убеждаемся, что функция $\omega(t)$, даваемая равенством (3.6), действительно удовлетворяет уравнению (3.4) (при $f(t_0) = 1$).

4. Рассмотрим теперь особое интегральное уравнение, которое по своей внешней структуре как бы мало отличается от только что разобранного уравнения (2.1); тем не менее по своим качественным свойствам оно, как вскоре убедимся, существенным образом разнится от него. Это уравнение выглядит так:

$$\omega(t_0) + \frac{B}{\pi i}\int \omega(t) L^+(t, t_0, \rho)\, dt = f(t_0) \quad (-\rho < t_0 < \rho) \tag{4.1}$$

где $B \neq \pm 1$ — некоторая постоянная. Поступая как в предыдущем случае, запишем это уравнение в виде

$$\frac{1}{\pi i}\int \omega(t) L^+(t, t_0, \rho)\, dt = \mu(t_0) \tag{4.2}$$

$$\mu(t_0) = \frac{1}{B}\left[-\omega(t_0) + f(t_0)\right] \tag{4.3}$$

т. е. свободный член прямым образом зависит от искомой плотности $\omega(t)$

Обратив уравнение (4.2) по формуле (3.2), будем иметь

$$\omega(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int \mu(t) L^-(t, t_0, \rho)\, dt \tag{4.4}$$

Между тем, как было установлено, это значение плотности $\omega(t_0)$ будет служить решением уравнения (4.2) лишь при соблюдении условия

$$\frac{1}{\pi i}\int \mu(t)\ln\frac{\rho - t}{\rho + t}\frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi i}\int \mu(t)\left[\ln\frac{\rho - t}{-\rho - t} - \pi i\right]\frac{dt}{t} = 0 \tag{4.5}$$

Можно добиться выполнения этого условия за счет подходящей фиксации постоянной, если таковая содержится в $f(t)$, а стало быть, и в $\mu(t)$. В этом убедимся установив, что

$$\int\left[\ln\frac{\rho - t}{-\rho - t} - \pi i\right]\frac{dt}{t} \neq 0 \tag{4.6}$$

Имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^\alpha \frac{dt}{t - z} &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi i\alpha}}\left[\left(\frac{\rho - z}{-\rho - z}\right)^\alpha - 1\right] = \\ &= \left[\frac{1}{2\pi i\alpha} + \frac{1}{2} + O(\alpha)\right]\left[\alpha\ln\frac{\rho - z}{-\rho - z} + \frac{\alpha^2}{2}\ln^2\frac{\rho - z}{-\rho - z} + \ldots\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{\rho - z}{-\rho - z} + \alpha\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\rho - z}{-\rho - z} + \frac{1}{4\pi i}\ln^2\frac{\rho - z}{-\rho - z}\right] + \\ &+ O(\alpha)^2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Сопоставляя в предшествующем интегральном соотношении (слева и справа) коэффициенты при членах, свободных от α, и затем содержащих первую степень α, последовательно найдем

$$\begin{aligned} &\int \frac{dt}{t - z} = \ln\frac{\rho - z}{-\rho - z} \\ &\frac{1}{2\pi i}\int \ln\frac{\rho - t}{-\rho - t}\frac{dt}{t - z} = \frac{1}{2}\ln\frac{\rho - z}{-\rho - z} + \frac{1}{4\pi i}\ln^2\frac{\rho - z}{-\rho - z} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Устремляя переменную z к нулю, получим

$$\int \ln \frac{\rho - t}{-\rho - t} \frac{dt}{t} = -\frac{\pi^2}{2}$$

откуда следует (4.6).

В развернутой форме соотношение (4.4) выглядит так:

$$B\omega(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int \omega(t) L^-(t, t_0, \rho)\, dt = \frac{1}{\pi i}\int f(t) L^-(t, t_0, \rho)\, dt$$

Надлежаще комбинируя это уравнение с исходным (4.1), придем опять к уравнению Карлемана

$$(1 + B^2)\,\omega(t_0) + \frac{2B}{\pi i}\int \frac{\omega(t)}{t - t_0}\, dt = g(t_0)$$

$$g(t_0) = f(t_0) + \frac{B}{\pi i}\int f(t) L^-(t, t_0, \rho)\, dt$$

Общее решение последнего уравнения получим в форме суммы слагаемых

$$\omega(t) = \omega_*(t) + \omega_0(t) \tag{4.9}$$

$$\omega_*(t_0) = \frac{1 + B^2}{1 - B^2} g(t_0) - \frac{2B}{(1 - B^2)^2}\left(\frac{\rho - t_0}{-\rho - t_0}\right)^{\lambda} \frac{1}{\pi i}\int g(t) \times$$

$$\times \left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{-\lambda} \frac{dt}{t - t_0}$$

$$\omega_0(t) = C\,\frac{1}{\rho - t}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{\lambda}$$

Здесь $\omega_*(t)$ — решение неоднородного уравнения, а $\omega_0(t)$ — решение соответствующего однородного уравнения, причем C — некая (определяемая далее) постоянная и параметр

$$\lambda = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{1 - B}{1 + B}\right)^2 = \frac{1}{\pi i}\ln\frac{1 - B}{1 + B} = \tag{4.10}$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{\pi i}\ln\left|\frac{1 - B}{1 + B}\right|, \quad |\alpha| < \pi \quad (B \neq \pm 1)$$

На основании формулы (4.3), (4.9) придадим условию разрешимости уравнения (4.1) такой вид:

$$C\frac{1}{\pi i}\int \frac{1}{\rho - t}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{\lambda}\left[\ln\frac{\rho - t}{-\rho - t} - \pi i\right]\frac{dt}{t} = \tag{4.11}$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int [-\omega_*(t) + f(t)]\left[\ln\frac{\rho - t}{-\rho - t} - \pi i\right]\frac{dt}{t}$$

(ясно, что для вещественных значений B надо положить $\alpha = 0$). Чуть ниже будет установлено, что интеграл в последнем равенстве, служащий коэффициентом при постоянной C, отличен от нуля. Это позволит определить значение C, обеспечивающее соблюдение условия (4.5), а затем подсчитать плотность (4.9), разрешающую исходное уравнение (4.1).

Перейдем к вычислению интеграла

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{\rho - t}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{\lambda}\left[\ln\frac{\rho - t}{-\rho - t} - \pi i\right]\frac{dt}{t}$$

Этот интеграл расчленим на пару отдельных интегралов — по числу слагаемых, содержащихся в квадратных скобках (каждый из них надо понимать в смысле главного значения).

Второй из названных интегралов вычислим по теории вычетов. Получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{\rho - t}\left(\frac{\rho - t}{-\rho - t}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2i\rho}e^{i\pi\lambda}\operatorname{ctg}\pi\lambda$$

Дифференцируя последнее равенство по параметру λ, получаем

$$I(\lambda) = -\frac{\pi}{2i\rho}\frac{e^{i\pi\lambda}}{\sin^2 \pi\lambda}$$

Как видим, интеграл $I(\lambda)$ отличен от нуля и, следовательно, постоянная C может быть определена из формулы (4.11) (при указанном формулой (4.10) значении параметра λ).

Замечание 3. Небезынтересны сами по себе особые уравнения такой сравнительно упрощенной структуры:

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \mu(t) M^{\mp}(t, t_0)\, dt = f(t_0), \quad M^{\mp}(t, t_0) = \frac{1}{t - t_0} \mp \frac{1}{t + t_0} \tag{4.12}$$

Их решения имеют соответственно следующий вид:

$$\mu(t) = \frac{1}{\pi i}\int_2^\infty f(t_0) M^{\pm}(t, t_0)\, dt_0 \tag{4.13}$$

Чтобы убедиться, что значения плотностей $\mu(t)$, даваемые последними формулами, действительно являются решениями сингулярных уравнений (4.12), следует совершить прямую подстановку плотностей (4.13) в соответственные исходные уравнения и фактически проверить выполнение соотношений

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty M^{\mp}(t, t_0)\, dt \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty f(t_1) M^{\pm}(t_1, t)\, dt_1 = f(t_0)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Об интегральном уравнении F. Tricomi // Докл. АН СССР (ДАССР). 1948. Т. 59. № 6. С. 1053—1056.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задач теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Физматгиз. 1962. 599 с.
3. *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. мат. ин-та АН СССР. 1953. Т. 41. С. 3—60.
4. *Шерман Д. И.* По поводу одного особого интегрального уравнения и его применения в некоторых задачах теории упругости // Изв. АН АрмССР. Механика. 1969. Т. 22. № 3. С. 3—8.
5. *Шерман Д. И.* О некоторых типах особых интегральных уравнений, встречающихся в приложениях // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 519—530.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз. 1963. 639 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.XII.1986