УДК 539.3

ОБ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНЬОРИНИ

Терещенко В. Я.

Предлагается алгоритм решения задачи Синьорини [1] в постановке односторонней вариационной задачи для граничного функционала в зоне возможного контакта [2]. Алгоритм основан на двойственной постановке задачи на максимин лагранжиана, для решения которой используется декомпозиционный подход в следующем смысле: при решении задачи на минимум (с фиксированными множителями Лагранжа) применяется процесс Ритца на базисных функциях, удовлетворяющих линейному ограничению задачи — дифференциальному уравнению в области; задача на максимум при ограничениях выпуклости на множители Лагранжа решается методом спуска (обобщение метода Франка—Вулфа). Построенный алгоритм может рассматриваться как вариант известного алгоритма нахождения седловых точек Удзавы—Эрроу—Гурвица [3, 4]. Исследуется сходимость алгоритма. Проводится численный анализ алгоритма на примере классической контактной задачи о внедрении штампа в упругую полуплоскость при аппроксимации границы контакта изопараметрическими граничными элементами. Сравнительная эффективность алгоритма связана с понижением размерности решаемой граничной задачи и в возможности использования для реализации решения вычислительного аппарата метода граничных элементов.

1. Решение обобщенной задачи Синьорини в области $G \subset E_3$ с достаточно гладкой границей S сводится [2] к решению вариационной задачи для граничного функционала

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{S_1} \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)\,\varphi\,ds + \int_{S_1} \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,\varphi\,ds \tag{1.1}$$

по границе возможного контакта $S_1 \subset S$ с единичным вектором внутренней нормали (ν). Функционал $F(\varphi)$ определен на выпуклом замкнутом множестве [2]

$$\mathbf{V}^*(S_1) = \{\varphi \in \mathbf{W}_2^{*1/2}(S_1) \mid \varphi^{(\nu)}|_{S_1} \geqslant 0\} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{W}_2^{*1/2}(S_1) \subset \mathbf{W}_2^{1/2}(S_1)$ — подпространство следов на S_1 векторов перемещений $\varphi(x)$, $x \in \bar{G}$, удовлетворяющих линейным ограничениям вариационной задачи для $F(\varphi)$ в виде равенств

$$\mathbf{A}\varphi = 0 \text{ в } G, \quad \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)|_{S_2} = 0, \quad S_2 = S \mid S_1 \tag{1.3}$$

и условиям

$$\int_G \varphi\,dG = \int_G \operatorname{rot}\varphi\,dG = 0$$

(гладкость границы S здесь и далее предполагается такой, что имеет место теорема о следах). Для таких вектор-функций φ в силу формулы Бетти [5] имеем

$$\int_{S_1} \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)\,\varphi\,ds = 2\int_G W(\varphi)\,dG > 0, \quad \forall\varphi \neq 0$$

$$\int_{S_1} \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)\,\varphi\,ds = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$$

($W(\varphi)$ — квадратичная форма линейной теории упругости [5]), так что граничная норма в $\mathbf{W}_2^{*1/2}(S_1)$ принята равной [2]

$$(1.4)\qquad |\varphi| = \left\{\int_{S_1} \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)\,\varphi\, ds\right\}^{1/2}$$

В [2] доказана однозначная разрешимость задачи минимизации функционала (1.1) на множестве $\mathbf{V}^*(S_1)$ и установлено, что ее решение $\varphi_0 \in \mathbf{V}^*(S_1)$ является решением следующей односторонней граничной задачи для вектора перемещений φ_0:

$$(1.5)\qquad \begin{gathered} \mathbf{A}\varphi_0 = 0 \text{ в } G, \quad \varphi_0^{(\nu)}|_{S_1} \geqslant 0, \quad [\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0) + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)]_{S_1} \geqslant 0 \\ \varphi_0^{(\nu)}[\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0) + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)]_{S_1} = 0, \quad \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0)|_{S_2} = 0 \end{gathered}$$

Здесь и выше $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)$ — заданный вектор поверхностных напряжений в зоне возможного контакта S_1. Вектор перемещений $\mathbf{u}^*(x)$, $x \in \overline{G}$, который считается известным, является [2] решением вспомогательной смешанной задачи теории упругости с нулевым граничным условием для $\mathbf{u}^*$ в зоне возможного контакта. Механическая интерпретация задачи (1.5) соответствует задаче о равновесии упругого тела $\overline{G}$, опирающегося в точках границы S_1 на некоторую жесткую поверхность без трения и подверженного действию поверхностных напряжений $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)$ в зоне возможного контакта при отсутствии массовых сил.

В [2] к задаче минимизации функционала $F(\varphi)$ на $\mathbf{V}^*(S_1)$ сформулирована двойственная вариационная задача с использованием преобразования Юнга — Фенхеля — Моро [4] в терминах поверхностных напряжений в зоне возможного контакта. Трудность практической реализации решения этой задачи обуславливается трудностью построения в явном виде функционала двойственной задачи. Поэтому ниже для формулировки двойственной задачи используется метод множителей Лагранжа.

2. Далее, для упрощения изложения, будем рассматривать задачу Синьорини для скалярного эллиптического оператора второго порядка с симметричной билинейной $B(u, v)$ и положительно-определенной квадратичной формой $B(v)$ (см. [1], с. 115), при этом результаты естественным образом распространяются и на постановку задачи Синьорини для оператора линейной теории упругости п. 1.

Ограничение выпуклости задается замкнутым выпуклым множеством скалярных функций (подобно (1.2)), определенных на всей границе области

$$V^*(S) = \{v \in W_2^{*1/2}(S) \mid v|_S \geqslant 0\}$$

где $W_2^{*1/2}(S) \subset W_2^{1/2}(S)$ — подпространство следов на S скалярных функций v, удовлетворяющих уравнению $Av = 0$ в G; норма в подпространстве $W_2^{*1/2}(S)$ определяется [6] выражением (подобно (1.4))

$$(2.1)\qquad \|v\|_{1/2,\,S} = \left\{\int \partial_{\nu_A} v v\, ds\right\}^{1/2}$$

(здесь и далее, если не оговорено противное, интегрирование ведется по границе S); $\partial_{\nu_A} = \partial/\partial\nu_A$ — дифференцирование по направлению конормали ν_A (индекс A в дальнейшем опускается).

Задача Синьорини в постановке, изложенной в [1], может быть сведена, аналогично [2], к задаче минимизации на множестве $V^*(S)$ функционала

$$(2.2)\qquad F_0(\varphi) = {}^1/_2\int \partial_\nu \varphi\varphi\, ds + \int \partial_\nu u^* \varphi\, ds$$

Решение $\varphi_0 \in V^*(S)$ вариационной задачи для функционала $F_0(\varphi)$ есть решение следующей односторонней граничной задачи (подобно (1.5)):

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} &A\varphi_0 = 0 \text{ в } G, \quad \varphi_0|_S \geqslant 0, \quad [\partial_\nu\varphi_0 + \partial_\nu u^*]_S \geqslant 0 \\ &\varphi_0[\partial_\nu\varphi_0 + \partial_\nu u^*]_S = 0 \end{aligned}$$

Так как $F_0(\varphi)$ — строго выпуклый функционал, а $V^*(S)$ — выпуклое замкнутое множество в $W_2^{*1/2}(S)$, то задача нахождения

$$(2.4)\qquad \inf_{\varphi \in V^*(S)} F_0(\varphi)$$

однозначно разрешима [7].

Перейдем к формулировке двойственной задачи и приведем (с доказательством или без него) утверждения, соответствующие теоремам эквивалентности и существования седловой точки [7].

Пусть

$$\Lambda(S) = \{\lambda \mid \lambda \in W_2^{-1/2}(S),\ \lambda \geqslant 0\}$$

— множество множителей Лагранжа, таких, что

$$\sup_{\lambda \in \Lambda(S)} \langle -\lambda, \varphi \rangle = \begin{cases} 0, & \varphi \in V^*(S) \\ +\infty, & \varphi \notin V^*(S) \end{cases}$$

где $\langle , \rangle$ — отношение двойственности на $W_2^{*1/2}(S) \times W_2^{-1/2}(S)$.

Тогда задача определения (прямая формулировка)

$$(2.5)\qquad \inf\nolimits_\varphi \sup\nolimits_\lambda \{F_0(\varphi) + \langle -\lambda, \varphi \rangle\}$$

эквивалентна (что проверяется непосредственно) исходной задаче (2.4).

Здесь и далее запись $\inf_\varphi$, $\sup_\lambda$ означает:

$$\operatorname*{Inf}_{\varphi \in W_2^{*1/2}(S)}, \qquad \sup_{\lambda \in \Lambda(S)}$$

Следуя [7] (с. 214—216), можно показать, что двойственной к задаче (2.5) будет задача определения

$$(2.6)\qquad \sup\nolimits_\lambda \inf\nolimits_\varphi \{F_0(\varphi) + \langle -\lambda, \varphi \rangle\}$$

и седловая точка $\{\varphi_0, \lambda_0\} \in W_2^{*1/2}(S) \times \Lambda(S)$ лагранжиана

$$(2.7)\qquad L(\varphi, \lambda) = F_0(\varphi) - \langle \lambda, \varphi \rangle$$

определяется условием

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} &F_0(\varphi_0) - \langle \lambda, \varphi_0 \rangle \leqslant F_0(\varphi_0) - \langle \lambda_0, \varphi_0 \rangle \leqslant F_0(\varphi) - \langle \lambda_0, \varphi \rangle \\ &\forall \varphi \in W_2^{*1/2}(S), \quad \forall \lambda \in \Lambda(S) \\ &\varphi_0 \geqslant 0, \quad \lambda_0 \geqslant 0 \Rightarrow \langle \varphi_0, \lambda_0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

для доказательства которого используется теорема Хана—Банаха [7].

Из (2.8) следует, что имеют место соотношения

$$(2.9)\qquad \min\nolimits_\varphi \max\nolimits_\lambda L(\varphi, \lambda) = \max\nolimits_\lambda \min\nolimits_\varphi L(\varphi, \lambda) = F_0(\varphi_0)$$

где значение $F_0(\varphi_0) = -{}^1/{}_2 S \partial_\nu \varphi_0 \varphi_0 ds$ находится из обобщенного уравнения Эйлера—Лагранжа $F_0'(\varphi_0, \psi) = 0$, $\forall \psi \in W_2^{*1/2}(S)$ для функционала $F_0(\varphi)$ и (2.2). Интерпретация неравенств (2.8) показывает, что аргумент φ_0 седловой точки $\{\varphi_0, \lambda_0\}$ — решение задачи (2.3).

Действительно, из правого неравенства в (2.8) следует, что производная (по Фреше) от $L(\varphi, \lambda_0)$ обращается в нуль в точке φ_0, что для достаточно регулярных функций φ и λ дает

$$(2.10)\qquad \int \partial_\nu \varphi_0 \psi\, ds + \int \partial_\nu u^* \psi\, ds - \int \lambda_0 \psi\, ds = 0, \quad \forall \psi \in W_2^{*1/2}$$

Отсюда следует $\partial_\nu \varphi_0 + \partial_\nu u^* = \lambda_0 \geqslant 0$; из левого неравенства в (2.8) следует неравенство

(2.11) $\quad \langle \lambda, \varphi_0 \rangle \geqslant \langle \lambda_0, \varphi_0 \rangle, \quad \forall \lambda \geqslant 0$

Поэтому, так как $\langle \lambda_0, \varphi_0 \rangle = 0$, то $\varphi_0 \geqslant 0$ и $\varphi_0 [\partial_\nu \varphi_0 + \partial_\nu u^*] = 0$.

Таким образом, условия на границе в (2.3) выполняются, удовлетворение же уравнению $A\varphi_0 = 0$ в G следует из принадлежности следа $\varphi_0 |_S \in W_2^{*1/2}(S)$. Отметим также, что вытекающее из (2.10) равенство $\partial_\nu \varphi_0 + \partial_\nu u^* = \lambda_0$ дает интерпретацию множителя Лагранжа λ_0, которая имеет определенный механический смысл в задаче Синьорини для оператора линейной теории упругости (см. ниже).

В дальнейшем будем заниматься решением двойственной задачи (2.6) в виде

(2.12) $\quad \max_\lambda \min_\varphi L(\varphi, \lambda)$

3. Предлагается следующий алгоритм решения задачи (2.12).

1°. При фиксированном $\lambda > 0$ ($\lambda \neq \partial_\nu u^*$) решается задача $\min_\varphi L(\varphi, \lambda)$, которая приводится к решению вариационного уравнения вида (2.10)

(3.1) $$\int \partial_\nu \varphi_\lambda \psi \, ds + \int \partial_\nu u^* \psi \, ds - \int \lambda \psi \, ds = 0, \quad \forall \psi \in W_2^{*1/2}(S)$$

Приближенное решение по Ритцу

(3.2) $$\varphi_{\lambda n} \equiv \varphi_n(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda) \beta_i(x), \quad x \in G$$

строится на координатных функциях в виде потенциалов двойного слоя

$$\beta_i(x) = -(4\pi)^{-1} \int_S \frac{\partial}{\partial \nu} \Gamma(x, y) \psi_i(y) \, ds_y, \quad i = 1, 2, \ldots$$

где $\{\psi_i\}$ — последовательность достаточно гладких, линейно независимых функций, определенных в точках $y \in S$; предполагается полнота $\{\psi_i\}$ в $L_2(S)$. Функции $\beta_i(x)$ являются допустимыми функциями задачи $\min_\varphi L(\varphi, \lambda)$, в силу известных [8] свойств граничных потенциалов, а именно:

$$A\beta_i(x) = 0, \ \forall x \in G, \ \beta_i |_S = \psi_i(y), \ \forall y \in S$$

Следовательно, $\beta_i |_S \in W_2^{*1/2}(S)$ и приближенное решение (3.2) в точках границы S имеет вид

$$\varphi_n(\lambda, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda) \psi_i(y)$$

Систему линейных уравнений для определения коэффициентов a_i (при каждом фиксированном $\lambda > 0$, $\lambda \neq \partial_\nu u^*$) получаем из (3.1)

(3.3) $$\sum_{i=1}^{n} a_i \int \partial_\nu \psi_i \psi_k \, ds = -\int \partial_\nu u^* \psi_k \, ds + \int \lambda \psi_k \, ds,$$
$$k = 1, \ldots, n$$

Матрица этой системы с элементами

$$\int \partial_\nu \psi_i \psi_k \, ds = \int \partial_\nu \beta_i \beta_k \, ds = [\beta_i, \beta_k]_{1/2, S}$$

где $[,]_{1/2, S}$ — скалярное произведение в $W_2^{*1/2}(S)$, соответствующее норме (2.1), симметрична и положительно определена. Следовательно, система (3.3) однозначно разрешима. Таким образом, реализуется первая часть алгоритма.

2°. Решается задача $\max_\lambda L(\varphi_\lambda, \lambda)$, где $L(\varphi_\lambda, \lambda) = \min_\varphi L(\varphi, \lambda)$ и $\varphi_\lambda \equiv \varphi(\lambda)$ — аргумент седловой точки при фиксированном множителе Лагранжа $\lambda > 0$; $\varphi_\lambda \in W_2^{*^1/_2}(S)$.

Вычислим $L(\varphi_\lambda, \lambda)$. Из (3.1) при $\psi = \varphi_\lambda$ получим

(3.4) $$\int \partial_\nu \varphi_\lambda \varphi_\lambda \, ds = \int \lambda \varphi_\lambda \, ds - \int \partial_\nu u^* \varphi_\lambda \, ds$$

Тогда из (2.7) имеем

$$L(\varphi_\lambda, \lambda) = {}^1/_2 \int \partial_\nu \varphi_\lambda \varphi_\lambda \, ds + \int \partial_\nu u^* \varphi_\lambda \, ds - \int \lambda \varphi_\lambda \, ds =$$
$$= -{}^1/_2 \int \partial_\nu \varphi_\lambda \varphi_\lambda \, ds = \min_\varphi L(\varphi, \lambda)$$

Таким образом, с учетом равенства (3.4) двойственная задача (2.12) приводится к задаче минимизации

(3.5) $$\max_\lambda L(\varphi_\lambda, \lambda) = \max_\lambda \left\{ -{}^1/_2 \left(\langle \lambda, \varphi_\lambda \rangle - \int \partial_\nu u^* \varphi_\lambda \, ds \right) \right\} =$$
$$= -{}^1/_2 \min_\lambda \left(\langle \varphi_\lambda, \lambda \rangle - \int \partial_\nu u^* \varphi_\lambda \, ds \right)$$

где φ_λ определяются из вариационного уравнения (3.1) для множества $\{\lambda\}$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq \partial_\nu u^*$.

Обозначим

$$\Phi(\lambda) = \langle \lambda, \varphi_\lambda \rangle - \int \partial_\nu u^* \varphi_\lambda \partial s \quad (\Phi(\lambda) \not\equiv 0)$$

В силу (3.4) (при достаточной регулярности λ) имеем

$$\Phi(\lambda) = \int \partial_\nu \varphi_\lambda \varphi_\lambda \, ds = \| \varphi_\lambda \|^2_{1/_2, S} > 0, \quad \forall \varphi_\lambda \neq 0$$

(см. (2.1)), т. е. $\Phi(\lambda)$ — строго выпуклый функционал и $\Lambda(S)$ — выпуклое замкнутое множество [7] в двойственном пространстве $W_2^{-1/_2}(S)$. Следовательно, задача $\min_\lambda \Phi(\lambda)$ однозначно разрешима.

Можно установить, что $\min_\lambda \Phi(\lambda) = \Phi(\lambda_0)$.

Действительно, для функций $L(\varphi_\lambda, \lambda)$ при $\varphi_\lambda = \varphi_0$ из левого неравенства в (2.8) следует, что $\max_\lambda L(\varphi_0, \lambda)$, а значит (в силу (3.5)), и $\min_\lambda \Phi(\lambda)$ достигается в точке $\lambda_0 \in \Lambda(S)$ и равен

$$\Phi(\lambda_0) = \int \partial_\nu \varphi_0 \varphi_0 \, ds$$

В итоге, с учетом множителя $-{}^1/_2$ в (3.5) получим

$$\max_\lambda \min_\varphi L(\varphi, \lambda) = -{}^1/_2 \int \partial_\nu \varphi_0 \varphi_0 \, ds = F_0(\varphi_0)$$

что соответствует (2.9).

Для решения задачи $\max_\lambda L(\varphi_\lambda, \lambda)$, которая приводится к задаче $\min_\lambda \Phi(\lambda)$, используется алгоритм метода спуска — обобщение метода Франка — Вулфа для случая выпуклых ограничений $\lambda > 0$ ([7], с. 130). Переход от итерации λ_m к λ_{m+1} осуществляется следующим образом: при выборе начального приближения $\lambda^{(0)} > 0$

(3.6) $$\lambda_{m+1} = \lambda_m + \rho_m \mu_m, \quad \lambda_m > 0, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Пусть для $\lambda = \lambda_m > 0$ построены согласно п. 1° приближения по Ритцу $\{\varphi_{\lambda_m n}\}_{n=1,2,\ldots}$. Для того чтобы пара $\{\varphi_{\lambda_m n}, \lambda_m\}$ являлась приближенной седловой точкой $L(\varphi, \lambda)$, необходимо выполнение неравенства (аналогичного (2.11))

(3.7) $$\langle \lambda_m, \varphi_{\lambda_m n} \rangle \leqslant \langle \lambda, \varphi_{\lambda_m n} \rangle, \quad \forall \lambda \in \Lambda(S)$$

которое обеспечивает выполнение левой части соотношения (2.8), определяющего седловую точку. Правая же часть этого соотношения выполняется, так как $\varphi_{\lambda_m n}$ — приближенное решение по Ритцу задачи нахождения $\min_\varphi L(\varphi, \lambda_m)$. Выбор направления спуска μ_m и шага ρ_m в итерационном процессе (3.6) осуществляется согласно известным рекомендациям ([7], с. 227). Сначала определяется $\beta_m \in \Lambda(S)$, такое, что неравенство (3.7) выполняется в виде

$$\langle \varphi_{\lambda_m n}, \beta_m - \beta \rangle \leqslant 0, \quad \forall \beta \in \Lambda(S)$$

в частности, для $\beta = \lambda_m$. Затем вычисляется шаг

$$\rho_m = \min\{1, -c_0^{-1} \langle \varphi_{\lambda_m n}, \beta_m - \lambda_m \rangle\}, \quad c_0 > 0 \quad (\rho_m \neq 1)$$

где c_0 — достаточно большое фиксированное число. Таким образом, при направлении спуска $\mu_m = \beta_m - \lambda_m$ и шаге ρ_m согласно (3.6) получаем итерацию λ_{m+1}. Условие останова итерационного процесса (3.6), имеющее практический интерес для решения задачи Синьорини теории упругости п. 1, приводится в п. 5.

4. Перейдем к обоснованию предложенного алгоритма. Из приведенных в п. 3 построений следует, что для каждого фиксированного $\lambda \in \{\lambda\}$ приближения $\varphi_{\lambda n}$ вида (3.2) являются приближениями процесса Ритца задачи $\min_\varphi L(\varphi, \lambda)$. Действительно, достаточно проверить выполнение условий, которым подчиняются базисные функции в процессе Ритца ([5], с. 96). При этом следует учесть, что линейность интегрального оператора типа граничного потенциала двойного слоя и предполагаемая полнота в $L_2(S)$ последовательности $\{\psi_i\}$ обеспечивают свойства базисности в $L_2(S)$ последовательности $\{\beta_i\}$. Итак:

а) при любом n элементы $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ линейно независимы;

б) следы $\beta_i|_S$ являются элементами энергетического пространства функций $W_2^{*1/2}(S)$; действительно (см. п. 2), подпространство $W_2^{*1/2}(S)$, наделенное нормой (2.1), может рассматриваться как энергетическое пространство следов на S достаточно гладких функций, удовлетворяющих уравнению $A\varphi = 0$ в G;

в) последовательность $\{\beta_i|_S\}$ полна по норме в $W_2^{*1/2}(S)$ — это следует из полноты $\{\beta_i|_S\}$ в $L_2(S)$ и положительной определенности формы $\int \partial_\nu \varphi \varphi \partial s$ на основании известных результатов ([5], с. 366, теорема 1).

Согласно п. 2, $\min_\varphi L(\varphi, \lambda)$ (при фиксированном λ) достигается в точке $\varphi_\lambda \in W_2^{*1/2}(S)$. Тогда, используя результаты о сходимости (на основании пп. а) — в)) процесса Ритца из [5], можно утверждать, что имеет место сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_{\lambda n} - \varphi_\lambda\|_{1/2,\, S} = 0 \tag{4.1}$$

Согласно [7], итерационный процесс (3.6) решения задачи нахождения $\max_\lambda L(\varphi_\lambda, \lambda)$ является сходящимся, так что

$$\lim_{m\to\infty} \|\lambda_m - \lambda_0\|_{-1/2,\, S} = 0, \quad \|\cdot\|_{-1/2,\, S} = \|\cdot\|_{W_2^{-1/2}(S)} \tag{4.2}$$

λ_0 — аргумент седловой точки $\{\varphi_0, \lambda_0\}$.

На основании (4.1), (4.2) доказывается теорема сходимости алгоритма.

Теорема. Последовательности итераций $\{\lambda_m\}_{m=1,2,\ldots}$ соответствует семейство задач $\min_\varphi L(\varphi, \lambda_m)$ и множество приближенных решений $\{\varphi\}_{\lambda_m n} \equiv \{\varphi_n(\lambda_m, x)\}_{n,\, m=1,2,\ldots}$, таких, что для каждого фиксированного $\lambda = \lambda_m \in \{\lambda_m\}$ имеет место сходимость $\varphi_{\lambda_m n} \to \varphi_{\lambda_m}$ при $n \to \infty$ в смысле

(4.1). Тогда, если $\lambda_m \to \lambda_0$ при $m \to \infty$ в смысле (4.2), то $\varphi_{\lambda_m} \to \varphi_0$ при $m \to \infty$ по норме в $W_2^{*^1/_2}(S)$.

Доказательство. Из (2.10) при $\psi = \varphi - \varphi_0$ и из (3.1) при $\psi = \varphi - \varphi_{\lambda_m}$ получим соответственно два равенства. В первом равенстве положим $\varphi = \varphi_{\lambda_m}$, во втором — $\varphi = \varphi_0$ и вычтем эти равенства, тогда получим

$$\int (\partial_\nu \varphi_0 - \partial_\nu \varphi_{\lambda_m})(\varphi_0 - \varphi_{\lambda_m})\, ds = \int (\lambda_0 - \lambda_m)(\varphi_0 - \varphi_{\lambda_m})\, ds \tag{4.3}$$

В силу (2.1) левая часть (4.3) равна $\| \varphi_0 - \varphi_{\lambda_m} \|^2_{^1/_2,\, S}$.

Используя для правой части (4.3) обобщенное неравенство Шварца, получим неравенство

$$\| \varphi_0 - \varphi_{\lambda_m} \|_{^1/_2,\, S} \leqslant \| \lambda_0 - \lambda_m \|_{-^1/_2,\, S}$$

из которого, при выполнении (4.2), следует $\lim \| \varphi_0 - \varphi_{\lambda_m} \|_{^1/_2,\, S} = 0$ при $m \to \infty$.

Также имеет место сходимость $\varphi_{\lambda_m} \to \varphi_0$ при $m \to \infty$ по норме в соболевском классе функций $W_2^1(G)$, которому принадлежат обобщенные решения краевых задач для уравнений второго порядка.

Действительно, для функций, удовлетворяющих уравнению $A\varphi = 0$ в G, из формулы Грина и (2.1) следует равенство

$$B(\varphi) = \int \partial_\nu \varphi \varphi\, ds = \| \varphi \|^2_{^1/_2,\, S}$$

Для положительно-определенной квадратичной формы $B(\varphi)$ имеет место оценка [5]

$$B(\varphi) \geqslant c \| \varphi \|^2_{1,\, G}, \quad c > 0, \ \| \cdot \|_{1,\, G} = \| \cdot \|_{W_2^1(G)}$$

следовательно, из $\| \varphi \|^2_{^1/_2,\, S} \geqslant c \| \varphi \|^2_{1,\, G}$ и при $\| \varphi_0 - \varphi_{\lambda_m} \|_{^1/_2,\, S} \to 0$ $(m \to \infty)$ следует сходимость $\| \varphi_0 - \varphi_{\lambda_m} \|_{1,\, G} \to 0$ при $m \to \infty$.

Построенный алгоритм может рассматриваться как вариант известного (см., например, [3, 4]) алгоритма нахождения седловых точек лагранжианов Удзавы—Эрроу—Гурвица, так как при поочередном использовании приближений по Ритцу $\{\varphi_n\}_{n=1,\,2,\ldots}$ и итераций $\{\lambda_m\}_{m=1,2,\ldots}$ значение функционала $L(\varphi^*_{\lambda_m n}, \lambda_m)$ при $m, n \to \infty$ стремится к значению $L(\varphi_0, \lambda_0)$, где $\{\varphi_0, \lambda_0\}$ — седловая точка лагранжиана $L(\varphi, \lambda)$.

Отметим также, что в силу равенства $\lambda = \partial_\nu \varphi_{\lambda n} + \partial_\nu u^*$, которое следует из (3.1), где $\varphi_{\lambda_n}|_S = \Sigma a_i(\lambda) \psi_i(y)$, представляет определенный интерес разложение множителей λ по системе функций $\{\partial_\nu \psi_i\}$ при соответствующем обосновании. Подобный алгоритм построения приближенных значений седловой точки предложен и обоснован в [9].

Вообще говоря, возможности применения предложенного алгоритма ограничены краевыми задачами, для которых существует функция Грина, но если учесть, что функция Грина в явном виде требуется для получения решения в точках области по найденным граничным значениям, то возможной областью применения алгоритма являются контактные задачи линейной теории упругости, в которых необходимо найти распределение перемещений и напряжений в зоне контакта. Для таких задач достаточно выполнения условий, накладываемых на данные задачи, при которых существует [8] функция Грина, построение же ее в явном виде необязательно.

В связи с этим замечанием отметим, что отличный от изложенного алгоритм двойственности, использующий функцию Грина для интегральной связи контактного давления с перемещениями в зоне контакта, представлен в [10] для решения контактных задач теории упругости.

5. Изложенные в пп. 2—4 построения распространяются на обобщенную задачу Синьорини для оператора линейной теории упругости (в постановке, изложенной в п. 1, см. также [2]), которая сводится к задаче минимизации на множестве $\mathbf{V}^*(S_1)$ граничного функционала (1.1). Решение $\boldsymbol{\varphi}_0 \in \mathbf{V}^*(S_1)$ этой задачи удовлетворяет [2] вариационному неравенству

$$\int_{S_1} \mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi}_0)(\mathbf{v}-\boldsymbol{\varphi}_0)\,ds \geqslant -\int_{S_1} \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)(\mathbf{v}-\boldsymbol{\varphi}_0)\,ds, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^*(S_1)$$

Так как множество $\mathbf{V}^*(S_1)$ (см. (1.2)) есть [2] замкнутый выпуклый конус с вершиной в начале координат, то это неравенство равносильно [3] соотношениям

$$\int \mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi}_0)\,\mathbf{v}\,ds \geqslant -\int \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,\mathbf{v}\,ds, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^*(S_1)$$

$$\int \mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi}_0)\,\boldsymbol{\varphi}_0\,ds = -\int \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,\boldsymbol{\varphi}_0\,ds, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 \in \mathbf{V}^*(S_1)$$

(интегрирование здесь по S_1). Из второго соотношения в силу (1.4) следует $-\int \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,\varphi_0^{(\nu)} ds \geqslant 0$. Так как $\varphi_0^{(\nu)}|_{S_1} \geqslant 0$, то это неравенство выполняется, если заданный вектор напряжений в зоне контакта удовлетворяет условию $t^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)|_{S_1} < 0$, что соответствует условию разрешимости вариационной задачи для функционала (1.1) на множестве $\mathbf{V}^*(S_1)$ [1]:

$$\int_{S_1} \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\,\boldsymbol{\rho}\,ds \leqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in \mathbf{R} \cap \mathbf{V}^*(S_1)$$

где $\mathbf{R}$ — подпространство жестких перемещений — ядро квадратичной формы линейной теории упругости $2\int_G W(\boldsymbol{\varphi})\,dG$, и знак равенства в этом условии имеет место, если только $\boldsymbol{\rho}$ — вектор двусторонних перемещений точек границы контакта S_1.

Механическая интерпретация множителя Лагранжа λ_0 (см. п. 2) следует из равенства $\mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi}_0) + \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) = \lambda_0$. Именно, так как $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*) < 0$ и $\lambda_0 \geqslant 0$ (см. (2.8)), то λ_0 — интенсивность распределенной опорной нормальной реакции в точках множества (априори неизвестного) $S_1^\circ \subset S_1$, в которых контакт тела с опорной поверхностью существует и $\varphi_0^{(\nu)}|_{S_1^\circ} = 0$.

Исследуем возможности построенного в пп. 3, 4 алгоритма с точки зрения определения напряжений в зоне возможного контакта S_1. Пусть для некоторого $\lambda = \lambda_m > 0$ построены приближения по Ритцу $\{\varphi_{\lambda_m n}\}_{n=1,2,\ldots}$ решения задачи $\min_\varphi L_\lambda^\tau(\varphi, \lambda_m)$ из вариационного уравнения вида (3.1), в котором производные $\partial_\nu\boldsymbol{\varphi}_\lambda$ и $\partial_\nu\mathbf{u}^*$ — соответственно векторы поверхностных напряжений $\mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi}_\lambda)$ и $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)$. Покажем, что последовательность $\{\mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi}_{\lambda_m n})\}_{\substack{m=1,2,\ldots\\ n=1,2,\ldots}}$ сходится при $n, m \to \infty$ в смысле $W_2^{-1/2}(S_1)$ к $\mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi}_0)$ — вектору напряжений в зоне контакта S_1, который соответствует точному решению $\varphi_0 \in V^*(S_1)$ односторонней вариационной задачи для функционала (1.1). Действительно, согласно (4.1), для каждого λ_m имеет место $|\boldsymbol{\varphi}_{\lambda_m n} - \boldsymbol{\varphi}_{\lambda_m}| \to 0$ при $n \to \infty$, где норма определяется согласно (1.4). Тогда в силу теоремы вложения $W_2^{*1/2}(S) \subset W_2^{-1/2}(S)$ и оценки [2, 6] $\|\mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi})\|_{-1/2, S_1} \leqslant c_1 |\boldsymbol{\varphi}|_{1/2, S_1}$, $c_1 > 0$ имеем $\|\mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi}_{\lambda_m n}) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\boldsymbol{\varphi}_{\lambda_m})\|_{-1/2, S_1} \to 0$ при $n \to \infty$. Далее, так как имеет место равенство $\lambda_0 - \lambda_m = \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_{\lambda_m})$, то из (см. (4.2)) $\| \lambda_0 - \lambda_m \|_{-1/2,\, S_1} \to 0$ при $m \to \infty$ следует также сходимость

$$\| \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_0) - \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_{\lambda_m}) \| \xrightarrow[-1/2,\, S_1]{} 0.$$

Примечание. Некоторые осложнения технического характера вызывает условие $\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)|_{S_2} = 0$ (см. (1.3)), которому должны быть подчинены допустимые функции вариационной задачи для функционала (1.1). Но если этот функционал взять в виде (первый интеграл по всей S):

$$F_1(\varphi) = \frac{1}{2} \int\limits_S \mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi)\, \varphi\, ds + \int\limits_{S_1} \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}^*)\, \varphi\, ds$$

то указанное условие является естественным условием минимизации $F_1(\varphi)$.

Реализация предложенного алгоритма рассматривалась на примере классической контактной плоской задачи о внедрении (без учета трения) абсолютно жесткого штампа в упругую полуплоскость. При этом вектор нормального напряжения в зоне контакта $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$, который в постановке односторонней граничной задачи (1.5) считается известным и должен удовлетворять условию $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})|_{S_1} < 0$ (здесь вектор $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$ не связывается с постановкой вспомогательной смешанной задачи теории упругости для вектора перемещений u^* см. п. 1), задавался так: $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) = -\mathbf{p}$, где $\mathbf{p}(y) > 0$ — функция контактного нормального давления под штампом с определенной геометрией поверхности штампа в области контакта при действии на штамп силы $P = \int \mathbf{p}(y)\, dy$, где интегрирование производится по ширине $2a$, симметричной относительно оси штампа возможной зоны контакта [11]. При некоторых формах поверхности, ограничивающей основание штампа, функции $\mathbf{p}(y)$, полученные методами теории функций комплексного переменного, приведены в [11]. При заданном векторе $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) = -\mathbf{p}$ в постановке указанной выше контактной задачи численный анализ изложенного в п. 3 алгоритма при решении этой задачи сводится к анализу стремления к нулю интеграла

$$\langle \varphi_{\lambda_m n}, \lambda_m \rangle = \int\limits_{S_1} \varphi_{\lambda_m n} (\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_{\lambda_m n}) - \mathbf{p})\, ds \tag{5.1}$$

при увеличении числа итераций m и числа n приближений по Ритцу.

Теоретически сходимость $\langle \varphi_{\lambda_m n}, \lambda_m \rangle \to \langle \varphi_0, \lambda_0 \rangle = 0$ при $m, n \to \infty$ имеет место, так как из сходимости $\varphi_{\lambda_m n} \to \varphi_{\lambda_m}$, $\forall \lambda_m \in \Lambda(S_1)$ в смысле (4.1) и сходимости $\lambda_m \to \lambda_0$ в смысле (4.2), а также сходимости $\varphi_{\lambda_m} \xrightarrow[m \to \infty]{} \varphi_0$ в смысле $W_2^{*1/2}(S_1)$ (см. теорему п. 4) следует указанная выше сходимость в смысле отношения двойственности на $W_2^{*1/2}(S_1) \times W_2^{-1/2}(S_1)$.

При построении приближений по Ритцу граница контакта S_1 аппроксимировалась изопараметрическими криволинейными граничными элементами (ГЭ) второго порядка. Построение и обоснование гранично-элементной аппроксимации вариационной задачи для граничного функционала вида (1.1) с использованием базисных функций типа граничных потенциалов двойного слоя приведено в [12].

Условие останова итерационного процесса задавалось так:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \int\limits_{\Delta s_i} \varphi^{(i)}_{\lambda_m n} [\mathbf{t}^{(\nu_i)}(\varphi^{(i)}_{\lambda_m n}) - \mathbf{p}]\, ds_i \right| < \varepsilon \tag{5.2}$$

где ε — заданное положительное число, определяющее требуемую точность итерационного процесса по λ_m при фиксированном числе n ГЭ Δs_i.

Для кругового штампа, ограниченного в пределах возможной зоны контакта S_1 кривой $f(y) = y^2/(2R)$ (в предположении, что радиус основания штампа велик по сравнению с размерами площадки контакта), функция заданного контактного давления $\mathbf{p}(y)$ была взята из [11, с. 65]. При принятой наибольшей (по оси симметрии штампа) глубине внедрения штампа $h = 0{,}02R$ и соответствующей полуширине возможной зоны контакта $a = 0{,}2R$ рассматривалось два варианта разбиения границы контакта на ГЭ. При шести элементах и при $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$ в условии (5.2) наибольшая (в точке $y = 0$, лежащей на оси симметрии штампа) погрешность значений $\mathbf{p}$ и $\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_{\lambda_m n})$ составила

$\delta = 16\%$ ($m = 14$). При двенадцати элементах получены следующие значения погрешности: при $\varepsilon = 5\cdot10^{-2}$ $\delta \approx 14{,}5\%$ ($m = 18$); при $\varepsilon = 1\cdot10^{-2}$ $\delta \approx 8\%$ ($m = 29$); при $\varepsilon = 1\cdot10^{-3}$ $\delta \approx 1{,}5\%$ ($m = 55$); расчеты производились на ЕС-1022. Установлено, что увеличение числа итераций m в большей степени влияет на уменьшение δ, чем увеличение числа n ГЭ.

Рассмотренный пример является, по сути, проверочным для предложенного алгоритма, в том смысле, что решение $\mathbf{p}(y)$ контактной задачи методом теории функций комплексного переменного [11] сравнивается с решением $\mathbf{t}^{(\nu)}(\varphi_{\lambda n})$ этой задачи как односторонней вариационной задачи для граничного функционала (1.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир. 1974. 159 с.
2. *Терещенко В. Я.* Об одном подходе к исследованию задачи Синьорини, использующем идеи двойственности // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 116—123.
3. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир. 1979. 399 с.
4. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир. 1979. 574 с.
5. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука. 1970. 512 с.
6. *Терещенко В. Я.* Ортогональные разложения на границе области в эллиптических краевых задачах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 3. С. 476—486.
7. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир. 1973. 244 с.
8. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир. 1966. 351 с.
9. *Терещенко В. Я.* Об эффективном алгоритме минимизации обобщенных функционалов Трефтца линейной теории упругости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 292—298.
10. *Кравчук А. С.* Решение контактных задач с известной функцией Грина // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 283—288.
11. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат. 1953. 264 с.
12. *Терещенко В. Я.* О некоторых формулировках метода граничных элементов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 616—627.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
12.XI.1985