Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 6, 1987

УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГОСТЬ РЕГУЛЯРНО НЕОДНОРОДНОГО ИСКРИВЛЕННОГО СЛОЯ С ВОЛНИСТЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.

Рассматривается искривленный неоднородный анизотропный слой переменной толщины, имеющий волнообразные поверхности. Считается, что упругие, теплофизические характеристики материала слоя и форма его верхней и нижней поверхностей имеют периодическую структуру с единой ячейкой периодичности (ЯП). При этом период структуры сравним по величине с толщиной слоя, которая полагается много меньшей, чем другие линейные размеры тела и радиусы кривизны его срединной поверхности.

На основе общей схемы осреднения процессов в периодических средах [1, 2] развит метод, позволивший выполнить переход от пространственной квазистатической задачи термоупругости к системе уравнений термоупругости для осредненной оболочки, эффективные упругие и теплофизические коэффициенты которой определяются из решения локальных задач на ЯП. Используются результаты авторов, полученные для статической теории упругости в [3]. Для определения температурных слагаемых, входящих в уравнения движения, произведено осреднение задачи теплопроводности.

Построенная модель позволяет исследовать термоупругие деформации, напряжения и распределение температуры в оболочках и пластинах из композиционных или пористых материалов с различным видом подкреплений периодической структуры (вафельных, ребристых, гофрированных) в армированных и сетчатых оболочках и пластинах. В предельном случае «гладких» поверхностей и однородного материала получаются уравнения термоупругости пологих анизотропных оболочек и уравнения теплопроводности анизотропных оболочек в предположении о линейном законе распределения температуры по толщине.

1. Исследуемое тело имеет периодическую структуру с ячейкой периодичности (ЯП) Ω_ε, которая в ортогональной системе безразмерных координат $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ [3] задается неравенствами

$$\{0 < \alpha_1 < \varepsilon h,\ 0 < \alpha_2 < \varepsilon h,\ \gamma^- < \gamma < \gamma^+\}$$

$$\gamma^\pm = \pm\frac{\varepsilon}{2} \pm \varepsilon h F^\pm\left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon h}, \frac{\alpha_2}{\varepsilon h}\right)$$

Безразмерный малый параметр ε определяет толщину слоя, h характеризует отношение размеров ЯП к толщине слоя и принимается постоянной порядка единицы. Функции $F^\pm$ задают форму верхней и нижней поверхностей $S^\pm$.

Физические компоненты тензора деформаций e_{ij} и вектора перемещений u_i связаны соотношениями Коши [3]. Уравнения движения в квазистатической постановке совпадают с уравнениями равновесия [3], в которые время входит в качестве параметра. Напряжения связаны с деформациями и приращением температуры θ соотношениями Дюгамеля — Неймана [4, 5]

$$\sigma_{ij} = c_{ijmn}e_{mn} - c_{ijmn}\alpha_{mn}^\theta\theta \tag{1.1}$$

где c_{ijmn} — коэффициенты упругости, α_{mn}^θ — температурные коэффициенты линейного расширения и сдвига. Здесь и далее по одинаковым индексам производится суммирование, причем $i, j, m, n = 1, 2, 3$; $\mu, \nu, \beta, \delta = 1, 2$.

Компоненты вектора потока тепла q_i связаны с температурой законом Фурье [4, 6]

$$(1.2)\qquad q_i = -\lambda_{i\mu}\frac{1}{H_\mu}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_\mu} - \lambda_{i3}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma}, \qquad H_\mu = A_\mu(1 + k_\mu\gamma)$$

где λ_{ij} — коэффициенты теплопроводности, H_μ — коэффициенты Ламе, A_μ — коэффициенты первой квадратичной формы, k_μ — главные кривизны срединной поверхности, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Уравнение баланса тепла без учета термоупругого рассеяния энергии при деформации можно записать в виде [4, 6]

$$(1.3)\qquad -f + c_v\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(H_2q_1)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(H_1q_2)}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial(H_1H_2q_3)}{\partial\gamma}\right]$$

(f — плотность внутренних источников тепла, c_v — объемная теплоемкость).

На поверхностях $S^\pm$ $(\gamma = \gamma^\pm)$ выполняются силовые и тепловые условия

$$(1.4)\qquad \sigma_{i\mu}H_\mu^{-1}n_\mu^\pm + \sigma_{i3}n_3^\pm = \pm p_i^\pm \qquad (\gamma = \gamma^\pm)$$

$$(1.5)\qquad q_\mu H_\mu^{-1}n_\mu^\pm + q_3n_3^\pm = \pm a_S^\pm\theta \mp g_S^\pm \quad (\gamma = \gamma^\pm)$$

$$\left(\mathbf{n}^\pm = \left\{-\frac{\partial\gamma^\pm}{\partial\alpha_1}, -\frac{\partial\gamma^\pm}{\partial\alpha_2}, 1\right\}\left[1 + \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial\gamma^\pm}{\partial\alpha_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial\gamma^\pm}{\partial\alpha_2}\right)^2\right]^{-1/2}\right)$$

где $p_i^\pm$ — компоненты внешних нагрузок, $a_S^\pm$ — коэффициенты теплоотдачи, $g_S^\pm$ — внешние потоки тепла, $n_i^\pm$ — компоненты единичных нормалей $\mathbf{n}^\pm$ к поверхностям $S^\pm$.

В случае, когда на поверхностях $S^\pm$ происходит конвективный теплообмен, в (1.5) полагаем ($\theta_S^\pm$ — температура окружающей среды)

$$(1.6)\qquad g_S^\pm = a_S^\pm\theta_S^\pm$$

2. Введем новые координаты и запишем ЯП Ω в виде

$$\{0 < y_1 < 1,\ \ 0 < y_2 < 1,\ z^- < z < z^+\},\ \ z^\pm = \pm{}^1/_2 \pm hF^\pm(y)$$

$$\left(y_1 = \frac{\alpha_1}{\varepsilon h},\ y_2 = \frac{\alpha_2}{\varepsilon h},\ z = \frac{\gamma}{\varepsilon},\ y = (y_1, y_2)\right)$$

Следуя постановке задачи, считаем, что упругие и теплофизические характеристики материала $c_{ijmn}(y, z)$, $\alpha_{mn}{}^\theta(y, z)$, $\lambda_{ij}(y, z)$, $c_v(y, z)$, $a_S^\pm(y)$ — периодические функции от y_1, y_2 с ЯП Ω. Функции $f(\alpha, t, y, z)$, $g_S^\pm(\alpha, t, y)$, а также внешние объемные $P(\alpha, t, y, z)$ и поверхностные $p_i^\pm(\alpha, t, y)$ силы могут зависеть как от α_1, α_2, t, так и от y_1, y_2 с той же ЯП.

Решение будем искать в форме асимптотических разложений [1, 2]

$$(2.1)\qquad u_i = u_i^{(0)}(\alpha, t) + \varepsilon u_i^{(1)} + O(\varepsilon^2)$$

$$(2.2)\qquad \theta = \theta_1 + z\theta_2,\ \ \theta_\nu = \theta_\nu^{(0)}(\alpha, t) + \varepsilon\theta_\nu^{(1)} + O(\varepsilon^2)$$

Здесь $u_i^{(l)}(\alpha, t, y, z)$, $\theta_\nu^{(l)}(\alpha, t, y, z)$ $(l = 1, 2, \ldots)$ — периодические функции от y_1, y_2 с ЯП Ω. Главный член разложения (2.2) отвечает линейному закону распределения температуры по толщине, который принимается при выводе уравнений теплопроводности для тонких пластин и оболочек [4, 7].

В [3] на основе разложения (2.1) произведено осреднение поставленной задачи в отсутствие теплового слагаемого в (1.1) и показано, что для напряжений справедливо следующее разложение по ε:

$$(2.3)\qquad \sigma_{ij} = \varepsilon\sigma_{ij}^{(1)} + O(\varepsilon^2)$$

Для главных членов разложения (2.3) получены осредненные уравнения

(2.4) $$\varepsilon^2 \mathbf{B}_\nu \langle \sigma_{\beta\delta}^{(1)} \rangle + p_\nu + \varepsilon \langle P_\nu \rangle = 0$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_\mu} (\varepsilon^3 \mathbf{B}_\mu \langle z\sigma_{\beta\delta}^{(1)} \rangle + p_\mu{}^* + \varepsilon \langle \gamma P_\mu \rangle) - \varepsilon^2 k_1 \langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle -$$

$$- \varepsilon^2 k_2 \langle \sigma_{22}^{(1)} \rangle + p_3 + \varepsilon \langle P_3 \rangle = 0$$

Здесь (V — объем Ω)

(2.5) $$p_i = \frac{1}{V} \int_0^1 \int_0^1 (\omega^+ p_i{}^+ + \omega^- p_i{}^-) \, dy_1 \, dy_2$$

$$p_\mu{}^* = \frac{1}{V} \int_0^1 \int_0^1 (\gamma^+ \omega^+ p_\mu{}^+ + \gamma^- \omega^- p_\mu{}^-) \, dy_1 \, dy_2$$

(2.6) $$\omega^\pm = \left[1 + \frac{1}{A_1{}^2} \left(\frac{\partial F^\pm}{\partial y_1} \right)^2 + \frac{1}{A_2{}^2} \left(\frac{\partial F^\pm}{\partial y_2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

(2.7) $$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{V} \int_\Omega \varphi \, dy_1 \, dy_2 \, dz$$

(2.8) $$\mathbf{B}_1 (\varphi_{\mu\nu}) = \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial (A_2 \varphi_{11})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 \varphi_{21})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varphi_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varphi_{22} \right] (1 \leftrightarrow 2)$$

Осредненные напряжения и их моменты, входящие в (2.4), связаны с деформациями срединной поверхности слоя следующими соотношениями упругости [3]:

(2.9) $$\langle z^l \sigma_{\beta\delta}^{(1)} \rangle = \langle z^l b_{\beta\delta}^{\mu\nu} \rangle \omega_{\mu\nu} + \langle z^l b_{\beta\delta}^{*\mu\nu} \rangle \tau_{\mu\nu} \qquad (l = 0, 1)$$

(2.10) $$\omega_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v_2 + \frac{1}{\varepsilon} k_1 w \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{1}{2} \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{v_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{v_2}{A_2} \right) \right], \quad \omega_{3\mu} = \frac{1}{A_\mu} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \alpha_\mu}$$

$$\tau_{11} = - \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2{}^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right)$$

Функции v_μ, w из (2.10) определяют главные члены в разложении вектора перемещений (2.1):

(2.11) $$u_\mu^{(0)} = 0, \quad u_3^{(0)} = w(\alpha, t), \quad u_\mu^{(1)} = v_\mu(\alpha, t) - \frac{z}{A_\mu} \frac{\partial w}{\partial \alpha_\mu}$$

Эффективные модули жесткости, входящие в (2.9) в качестве коэффициентов, определяются соотношениями

(2.12) $$b_{ij}^{n\nu} = \mathbf{L}_{ijm} U_m^{n\nu} + c_{ijn\nu}, \quad b_{ij}^{*\mu\nu} = \mathbf{L}_{ijm} V_m^{\mu\nu} + z c_{ij\mu\nu}$$

где $U_m{}^{n\nu}(\xi, z)$, $V_m{}^{\mu\nu}(\xi, z)$ — периодические по переменным $\xi_\mu = A_\mu y_\mu$ ($\xi = (\xi_1, \xi_2)$) с периодами A_μ соответственно решения локальных задач на ЯП [3]

(2.13) $$\begin{cases} \mathbf{D}_{im} U_m^{n\nu} = - C_{in\nu} \\ N_j^\pm (\mathbf{L}_{ijm} U_m^{n\nu} + c_{ijn\nu}) = 0 \quad (z = z^\pm) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{im} V_m^{\mu\nu} = - c_{i3\mu\nu} - z C_{i\mu\nu} \\ N_j^\pm (\mathbf{L}_{ijm} V_m^{\mu\nu} + z^\pm c_{ij\mu\nu}) = 0 \quad (z = z^\pm) \end{cases}$$

Здесь

$$\mathbf{L}_{ijm} = \frac{1}{h} c_{ijm\nu} \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} + c_{ijm3} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{D}_{im} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \mathbf{L}_{i\beta m} + \tag{2.14}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{L}_{i3m}, \quad C_{im\nu} = \frac{1}{h} \frac{\partial c_{i\beta m\nu}}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial c_{i3m\nu}}{\partial z}$$

$$\mathbf{N}^\pm = \left\{ \mp \frac{\partial F^\pm}{\partial \xi_1}, \mp \frac{\partial F^\pm}{\partial \xi_2}, 1 \right\} \tag{2.15}$$

Можно доказать, что добавление теплового слагаемого в (1.1) не приводит к изменению уравнений (2.4), но в соотношениях упругости (2.9) возникают слагаемые, связанные с тепловыми деформациями. В п. 3 выводятся соотношения, выражающие эти слагаемые через главные члены разложения температуры (2.2), в п. 4 получена осредненная система уравнений для определения этих функций.

3. Учитывая, что толщина слоя мала по сравнению с радиусами кривизны срединной поверхности, обозначим

$$k_\nu = \varepsilon k_\nu' (\alpha) \tag{3.1}$$

В соотношениях (1.1), (1.5) полагаем

$$\alpha^\theta_{mn} = \varepsilon \alpha_{mn} (y, z), \quad a_S^\pm = \varepsilon a^\pm (y), \quad g_S^\pm = \varepsilon g^\pm (\alpha, t, y) \tag{3.2}$$

Отметим, что асимптотика (3.1), (3.2) эквивалентна пренебрежению членами $k_\nu \gamma$ при выводе уравнений теплопроводности тонких оболочек [7] и определению приведенных теплофизических характеристик тонких пластин и оболочек [4, 7].

Для главного члена разложения (2.3) из соотношений Коши [3] и (1.1), (2.1), (2.2) получим

$$\sigma^{(1)}_{ij} = \mathbf{L}_{ijm} u^{(2)}_m + c_{ijm\nu} \omega_{m\nu} + z c_{ij\mu\nu} \tau_{\mu\nu} - c_{ijmn} \alpha_{mn} (\theta^{(0)}_1 + z \theta^{(0)}_2) \tag{3.3}$$

Подставим (3.3) в разложенные по ε уравнения равновесия [3] и условия (1.4), приравняв нулю главные члены, получим

$$\mathbf{D}_{im} u^{(2)}_m = - C_{im\nu} \omega_{m\nu} - (c_{i3\mu\nu} + z C_{i\mu\nu}) \tau_{\mu\nu} + \mathrm{B}_i \theta^{(0)}_1 + (\beta_{i3} + z \mathrm{B}_i) \theta^{(0)}_2 \tag{3.4}$$

$$N_j^\pm [\mathbf{L}_{ijm} u^{(2)}_m + c_{ijm\nu} \omega_{m\nu} + z^\pm c_{ij\mu\nu} \tau_{\mu\nu} -$$

$$- \beta_{ij} (\theta^{(0)}_1 + z^\pm \theta^{(0)}_2)] = 0 \qquad (z = z^\pm)$$

$$\left(\beta_{ij} = c_{ijmn} \alpha_{mn}, \quad \mathrm{B}_i = \frac{1}{h} \frac{\partial \beta_{i\nu}}{\partial \xi_\nu} + \frac{\partial \beta_{i3}}{\partial z} \right)$$

Периодические по ξ_1, ξ_2 решения (3.4) можно представить в виде

$$u^{(2)}_m = U^{n\nu}_m \omega_{n\nu} + V^{\mu\nu}_m \tau_{\mu\nu} + S_m \theta^{(0)}_1 + S_m{}^* \theta^{(0)}_2 \tag{3.5}$$

где $U_m{}^{n\nu} (\xi, z)$, $V_m{}^{\mu\nu} (\xi, z)$ — решения локальных задач (2.13), а $S_m (\xi, z)$, $S_m{}^* (\xi, z)$ — периодические по ξ_1, ξ_2 решения задач

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{im} S_m = \mathrm{B}_i \\ N_j^\pm (\mathbf{L}_{ijm} S_m - \beta_{ij}) = 0 \qquad (z = z^\pm) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{im} S_m{}^* = \beta_{i3} + z \mathrm{B}_i \\ N_j^\pm (\mathbf{L}_{ijm} S_m{}^* - z^\pm \beta_{ij}) = 0 \qquad (z = z^\pm) \end{cases}$$

Обозначим

$$s_{ij} = \beta_{ij} - \mathbf{L}_{ijm} S_m, \quad s_{ij}{}^* = z \beta_{ij} - \mathbf{L}_{ijm} S_m{}^* \tag{3.7}$$

Из (3.3) при учете (3.5), (3.7), (2.12) получим

$$\sigma^{(1)}_{ij} = b^{\mu\nu}_{ij} \omega_{\mu\nu} + b^{*\mu\nu}_{ij} \tau_{\mu\nu} - s_{ij} \theta^{(0)}_1 - s_{ij}{}^* \theta^{(0)}_2 \tag{3.8}$$

Здесь учтено, что $b_{ij}^{3\nu} = 0$ [3].

Осредняя (3.8) по правилу (2.7), имеем

$$\langle\sigma_{ij}^{(1)}\rangle = \langle b_{ij}^{\mu\nu}\rangle \omega_{\mu\nu} + \langle b_{ij}^{*\mu\nu}\rangle \tau_{\mu\nu} - \langle s_{ij}\rangle \theta_1^{(0)} - \langle s_{ij}^*\rangle \theta_2^{(0)} \tag{3.9}$$

$$\langle z\sigma_{ij}^{(1)}\rangle = \langle zb_{ij}^{\mu\nu}\rangle \omega_{\mu\nu} + \langle zb_{ij}^{*\mu\nu}\rangle \tau_{\mu\nu} - \langle zs_{ij}\rangle \theta_1^{(0)} - \langle zs_{ij}^*\rangle \theta_2^{(0)}$$

Соотношения (3.9) представляют собой обобщение соотношений упругости (2.9) при учете тепловых напряжений. Отметим, что из (3.6), (3.7) следует: $\langle s_{3j}\rangle = \langle zs_{3j}\rangle = \langle s_{3j}^*\rangle = \langle zs_{3j}^*\rangle = 0$. Поэтому соотношения $\langle\sigma_{3j}^{(1)}\rangle = \langle z\sigma_{3j}^{(1)}\rangle = 0$, полученные в [3] и используемые при выводе уравнений (2.4), остаются справедливыми и при учете теплового слагаемого в (1.1).

Подставляя (3.9) в уравнения (2.4), получим систему трех разрешающих уравнений относительно функций v_μ, w, определяющих главные члены вектора перемещений (2.11). В эти уравнения войдут также функции $\theta_\mu^{(0)}(\alpha, t)$, которые необходимо определить из решения уравнения теплопроводности.

4. Разложим по ε соотношения (1.2). С учетом (2.2), (3.1) получим

$$q_i = -\frac{\lambda_{i3}}{\varepsilon}\theta_2^{(0)} + q_i^{(0)} + \varepsilon q_i^{(1)} + O(\varepsilon^2) \tag{4.1}$$

$$q_i^{(l)} = -\lambda_{i\nu}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}(\theta_1^{(l+1)} + z\theta_2^{(l+1)}) - \lambda_{i3}\frac{\partial}{\partial z}(\theta_1^{(l+1)} + z\theta_2^{(l+1)}) -$$

$$-\lambda_{i\nu}\frac{1}{A_\nu}\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}(\theta_1^{(l)} + z\theta_2^{(l)}) \quad (l = 0, 1)$$

Введем обозначения дифференциальных операторов

$$\partial_1\varphi = \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial(A_2\varphi)}{\partial\alpha_1} \quad (1 \leftrightarrow 2) \tag{4.2}$$

Уравнение (1.3) при учете (2.2), (3.1), (4.1), (4.2) разлагаем по степеням ε^r $(r \leqslant 0)$ следующим образом:

$$\frac{1}{h}\frac{\partial q_\nu^{(0)}}{\partial\xi_\nu} + \frac{\partial q_3^{(0)}}{\partial z} = 0 \tag{4.3}$$

$$-f + c_v\left(\frac{\partial\theta_1^{(0)}}{\partial t} + z\frac{\partial\theta_2^{(0)}}{\partial t}\right) = \frac{\lambda_{3\mu}}{\varepsilon}\partial_\mu\theta_2^{(0)} - \partial_\mu q_\mu^{(0)} + \tag{4.4}$$

$$+(k_1' + k_2')\lambda_{33}\theta_2^{(0)} - \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\xi_\nu}\left(q_\nu^{(1)} + \lambda_{3\nu}k_\nu' z\theta_2^{(0)} - \frac{\lambda_{3\nu}}{\varepsilon^2}\theta_2^{(0)}\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(q_3^{(1)} - \frac{\lambda_{33}}{\varepsilon^2}\theta_2^{(0)}\right)$$

Условия (1.5) при учете (2.2), (3.1), (3.2), (4.1) при разложении по степеням ε^r $(r \leqslant 1)$ дают

$$N_i^\pm q_i^{(0)} = 0 \quad (z = z^\pm) \tag{4.5}$$

$$N_\nu^\pm\left(q_\nu^{(1)} + \lambda_{3\nu}k_\nu' z^\pm\theta_2^{(0)} - \frac{\lambda_{3\nu}}{\varepsilon^2}\theta_2^{(0)}\right) + \tag{4.6}$$

$$+N_3^\pm\left(q_3^{(1)} - \frac{\lambda_{33}}{\varepsilon^2}\theta_2^{(0)}\right) = \pm\omega^\pm[a^\pm(\theta_1^{(0)} + z^\pm\theta_2^{(0)}) - g^\pm] +$$

$$+N_i^\pm\lambda_{3i}\zeta^\pm\theta_2^{(0)} \quad (z = z^\pm)$$

$$\zeta^\pm = \frac{z^\pm}{(\omega^\pm)^2}\left[k_1'\left(\frac{\partial F^\pm}{\partial\xi_1}\right)^2 + k_2'\left(\frac{\partial F^\pm}{\partial\xi_2}\right)^2\right] \tag{4.7}$$

где $\omega^\pm$, $N_i^\pm$ определены формулами (2.6), (2.15). Члены, содержащие $\zeta^\pm$, связаны с разложением по ε компонент нормалей $\mathrm{n}^\pm$. Отметим, что присутствие слагаемых с отрицательными степенями ε в (4.4), (4.6) связано с учетом асимптотики термосопротивлений тонкого слоя в направлении оси γ [4, 7].

Введем обозначения

$$\mathbf{L}_i = \frac{\lambda_{i\nu}}{h}\frac{\partial}{\partial \xi_\nu} + \lambda_{i3}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \mathbf{D} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial \xi_\mu}\mathbf{L}_\mu + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{L}_3 \tag{4.8}$$

$$\Lambda_i = \frac{1}{h}\frac{\partial \lambda_{i\nu}}{\partial \xi_\nu} + \frac{\partial \lambda_{i3}}{\partial z}$$

Подставим выражение для $q_i^{(0)}$ из (4.1) в (4.3), (4.5). Получим

$$\mathbf{D}(\theta_1^{(1)} + z\theta_2^{(1)}) = -\Lambda_\mu \frac{1}{A_\mu}\frac{\partial \theta_1^{(0)}}{\partial \alpha_\mu} - (\lambda_{3\mu} + z\Lambda_\mu)\frac{1}{A_\mu}\frac{\partial \theta_2^{(0)}}{\partial \alpha_\mu} \tag{4.9}$$

$$N_i^\pm\left[\mathbf{L}_i(\theta_1^{(1)} + z\theta_2^{(1)}) + \frac{\lambda_{i\mu}}{A_\mu}\left(\frac{\partial \theta_1^{(0)}}{\partial \alpha_\mu} + z^\pm \frac{\partial \theta_2^{(0)}}{\partial \alpha_\mu}\right)\right] = 0 \quad (z = z^\pm)$$

Решение (4.9) представим в виде

$$\theta_1^{(1)} = W_\mu \frac{1}{A_\mu}\frac{\partial \theta_1^{(0)}}{\partial \alpha_\mu}, \qquad z\theta_2^{(1)} = W_\mu^* \frac{1}{A_\mu}\frac{\partial \theta_2^{(0)}}{\partial \alpha_\mu} \tag{4.10}$$

где $W_\mu(\xi, z)$, $W_\mu^*(\xi, z)$ — периодические по ξ_ν с периодами A_ν решения задач

$$\begin{cases} \mathbf{D}W_\mu = -\Lambda_\mu \\ N_i^\pm(\mathbf{L}_i W_\mu + \lambda_{i\mu}) = 0 \qquad (z = z^\pm) \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}W_\mu^* = -\lambda_{3\mu} - z\Lambda_\mu \\ N_i^\pm(\mathbf{L}_i W_\mu^* + z^\pm\lambda_{i\mu}) = 0 \quad (z = z^\pm) \end{cases}$$

Обозначим

$$l_{i\mu}(\xi, z) = \mathbf{L}_i W_\mu + \lambda_{i\mu}, \; l_{i\mu}^*(\xi, z) = \mathbf{L}_i W_\mu^* + z\lambda_{i\mu} \tag{4.12}$$

Из (4.1), (4.10), (4.12) получим

$$q_i^{(0)} = -l_{i\nu}\frac{1}{A_\nu}\frac{\partial \theta_1^{(0)}}{\partial \alpha_\nu} - l_{i\nu}^* \frac{1}{A_\nu}\frac{\partial \theta_2^{(0)}}{\partial \alpha_\nu} \tag{4.13}$$

Осредним уравнение (4.4), пользуясь соотношениями (4.6) и периодичностью по y_ν

$$-\varepsilon\langle f\rangle + \varepsilon\langle c_v\rangle \frac{\partial \theta_1^{(0)}}{\partial t} + \varepsilon\langle zc_v\rangle \frac{\partial \theta_2^{(0)}}{\partial t} = \langle \lambda_{3\mu}\rangle \partial_\mu \theta_2^{(0)} - \varepsilon\partial_\mu\langle q_\mu^{(0)}\rangle - \tag{4.14}$$

$$- J_0\theta_1^{(0)} - [J_1 - (k_1 + k_2)\langle \lambda_{33}\rangle + \varepsilon Z_0]\,\theta_2^{(0)} + G_0$$

$$J_r = \frac{1}{V}\int_0^1\int_0^1 [(z^+)^r \omega^+ a_S^+ + (z^-)^r \omega^- a_S^-]\, dy_1\, dy_2 \quad (r = 0, 1, 2) \tag{4.15}$$

$$G_r = \frac{1}{V}\int_0^1\int_0^1 [(z^+)^r \omega^+ g_S^+ + (z^-)^r \omega^- g_S^-]\, dy_1\, dy_2 \quad (r = 0, 1)$$

$$Z_r = \frac{1}{V}\int_0^1\int_0^1 [(z^+)^r N_i^+\lambda_{3i}(y, z^+)\zeta^+ - (z^-)^r N_i^-\lambda_{3i}(y, z^-)\zeta^-]\, dy_1\, dy_2$$

Для получения второго уравнения осредним соотношение (4.4), предварительно умноженное на z, пользуясь умноженными на $z^\pm$ соотношениями (4.6) и периодичностью по y_ν. Ограничиваясь линейным законом распределения температуры по толщине слоя [4, 7], получим

$$
\begin{aligned}
(4.16)\qquad & -\varepsilon\langle zf\rangle+\varepsilon\langle zc_v\rangle\frac{\partial\theta_1^{(0)}}{\partial t}+\varepsilon\langle z^2c_v\rangle\frac{\partial\theta_2^{(0)}}{\partial t}=\langle z\lambda_{3\mu}\rangle\,\partial_\mu\theta_2^{(0)}-\\
& -\varepsilon\partial_\mu\langle zq_\mu^{(0)}\rangle-J_1\theta_1^{(0)}-\\
& -\left[J_2-(k_1+k_2)\langle z\lambda_{33}\rangle+\frac{\langle\lambda_{33}\rangle}{\varepsilon}+\varepsilon Z_1\right]\theta_2^{(0)}+G_1
\end{aligned}
$$

В уравнения (4.14), (4.16) входят члены $\langle q_\mu^{(0)}\rangle$, $\langle zq_\mu^{(0)}\rangle$, для которых из (4.13) следует

$$
(4.17)\qquad \langle z^r q_\mu^{(0)}\rangle=-\langle z^r l_{\mu\nu}\rangle\frac{1}{A_\nu}\frac{\partial\theta_1^{(0)}}{\partial\alpha_\nu}-\langle z^r l_{\mu\nu}^{*}\rangle\frac{1}{A_\nu}\frac{\partial\theta_2^{(0)}}{\partial\alpha_\nu}\qquad(r=0,1)
$$

Подставляя (4.17) в (4.14), (4.16), получим систему двух разрешающих уравнений относительно функций $\theta_\mu^{(0)}(\alpha, t)$, определяющих по формулам (2.2), (4.1), (4.13), (3.8) главные члены в разложениях температуры, вектора потока тепла и напряжений, связанных с тепловыми деформациями. Если толщина меняется достаточно плавно, то членами Z_0, Z_1 в уравнениях можно пренебречь.

Отметим, что, как и в [3], все эффективные коэффициенты, входящие в соотношения (3.9), (4.17), выражаются через функции $A_\mu(\alpha)$, входящие в координаты ξ_ν, и следовательно, могут зависеть от α_δ даже в случае первоначально однородного материала.

5. Уравнения (2.4), (4.14), (4.16) при учете соотношений (3.9), (4.17) представляют собой уравнения квазистатической нестационарной задачи термоупругости для осредненной оболочки, эффективные упругие и теплофизические характеристики которой (коэффициенты в (3.9), (4.17)) определяются из решения локальных задач на ЯП (2.13), (3.6), (4.11). Все эти задачи однотипны и имеют единственные с точностью до произвольных слагаемых периодические по ξ_ν решения [1, 5]. Постоянные слагаемые при дифференцировании в (2.12), (3.7), (4.12) пропадают.

Для формулировки краевой задачи к полученным уравнениям надо добавить граничные условия на контуре Г, ограничивающем срединную поверхность слоя, а также начальное распределение температуры. Пренебрегая пограничным эффектом [1], граничные условия на механические переменные можно задать в виде, принятом в теории тонких оболочек [7—9], пользуясь главными членами вектора перемещений (2.11) и осредненными напряжениями (3.9).

Получим граничные и начальные условия для задачи теплопроводности. Пусть на краевой поверхности слоя Σ, представляющей собой линейчатую поверхность, для которой контур Г является направляющей, а нормали к срединной поверхности — образующими, выполняются условия

$$
(5.1)\qquad q_\mu n_\mu^\Gamma=a_\Sigma\theta-g_\Sigma(\alpha,\gamma,t)\quad(\alpha\in\Gamma)
$$

(a_Σ — коэффициент теплоотдачи, g_Σ — внешний поток тепла, n_μ^Γ — компоненты внешней единичной нормали к поверхности Σ). В случае граничного условия третьего рода $g_\Sigma=a_\Sigma\theta_\Sigma$. Вместо условия (5.1) на поверхности Σ может быть задано граничное условие первого рода

$$
(5.2)\qquad \theta=\theta_\Sigma(\alpha,\gamma,t)\qquad(\alpha\in\Gamma)
$$

Начальное распределение температуры

$$
(5.3)\qquad \theta\,|_{t=0}=\theta_0(\alpha,y,z)
$$

Осредним соотношения (5.1)—(5.3), сохраняя в них только главные члены разложений температуры и вектора потока тепла. В случае граничных условий второго или третьего рода

$$(5.4)\qquad \left(-\frac{1}{\varepsilon}\langle z^r\lambda_{\mu 3}\rangle\theta_2^{(0)}+\langle z^r q_\mu^{(0)}\rangle\right)n_\mu{}^\Gamma=\langle z^r a_\Sigma\rangle\theta_1^{(0)}+ + \langle z^{r+1}a_\Sigma\rangle\theta_2^{(0)}-\langle z^r g_\Sigma\rangle\qquad (r=0,1,\alpha\in\Gamma)$$

В случае граничного условия первого рода

$$(5.5)\qquad \langle z^r\rangle\theta_1^{(0)}+\langle z^{r+1}\rangle\theta_2^{(0)}=\langle z^r\theta_\Sigma\rangle\qquad (r=0,1,\alpha\in\Gamma)$$

Начальные условия

$$(5.6)\qquad (\langle z^r\rangle\theta_1^{(0)}+\langle z^{r+1}\rangle\theta_2^{(0)})|_{t=0}=\langle z^r\theta_0\rangle\qquad (r=0,1)$$

Локальные задачи на ЯП обобщаются на случай кусочно-гладких функций, моделирующих композиционный или пористый материал. В этом случае на поверхностях разрывов добавляются условия непрерывности, аналогичные условиям для локальной задачи (2.13), приведенным в [3]. Отметим, что эти условия отвечают идеальному контакту и, учитывая специфику решаемых задач, их можно записать иначе [1, 5].

6. Рассмотрим предельный для рассматриваемой постановки задачи случай «гладкой» ($F^\pm\equiv 0$) однородной оболочки. Как показано в [3], уравнения (2.4) и соотношения (2.9), (2.10) сводятся в этом случае к уравнениям и соотношениям упругости, принятым в теории тонких пологих оболочек [7—9]. При этом усилия и моменты связаны с осредненными напряжениями следующим образом (по β не суммировать):

$$(6.1)\qquad N_\beta=\varepsilon^2\langle\sigma_{\beta\beta}^{(1)}\rangle,\quad S_{12}=\varepsilon^2\langle\sigma_{12}^{(1)}\rangle$$

$$M_\beta=\varepsilon^3\langle z\sigma_{\beta\beta}^{(1)}\rangle,\quad H_{12}=\varepsilon^3\langle z\sigma_{12}^{(1)}\rangle$$

Уравнения (4.14), (4.16) принимают вид

$$(6.2)\qquad -\varepsilon\langle f\rangle+\varepsilon c_v\frac{\partial\theta_1^{(0)}}{\partial t}=\lambda_{3\mu}\partial_\mu\theta_2^{(0)}+\varepsilon\left(\lambda_{\mu\nu}-\frac{\lambda_{3\mu}\lambda_{3\nu}}{\lambda_{33}}\right)\partial_\mu\left(\frac{1}{A_\nu}\frac{\partial\theta_1^{(0)}}{\partial\alpha_\nu}\right)-$$

$$-(a_S{}^++a_S{}^-)\theta_1^{(0)}-\left[\frac{1}{2}(a_S{}^+-a_S{}^-)-(k_1+k_2)\lambda_{33}\right]\theta_2^{(0)}+g_S{}^++g_S{}^-$$

$$-12\varepsilon\langle zf\rangle+\varepsilon c_v\frac{\partial\theta_2^{(0)}}{\partial t}=\varepsilon\left(\lambda_{\mu\nu}-\frac{\lambda_{3\mu}\lambda_{3\nu}}{\lambda_{33}}\right)\partial_\mu\left(\frac{1}{A_\nu}\frac{\partial\theta_2^{(0)}}{\partial\alpha_\nu}\right)-$$

$$-6(a_S{}^+-a_S{}^-)\theta_1^{(0)}-3\left(a_S{}^++a_S{}^-+\frac{4\lambda_{33}}{\varepsilon}\right)\theta_2^{(0)}+\frac{1}{2}(g_S{}^+-g_S{}^-)$$

В случае конвективного теплообмена на поверхностях $S^\pm$ величины $g_s^\pm$ определяются из (1.6).

Соотношения (6.2) представляют собой систему уравнений теплопроводности анизотропной оболочки в предположении о линейном законе распределения температуры по ее толщине:

$$(6.3)\qquad \theta=\theta_1^{(0)}(\alpha,t)+\varepsilon^{-1}\gamma\theta_2^{(0)}(\alpha,t)$$

Из (6.3) получим выражения для интегральных характеристик температуры [4, 7]:

$$(6.4)\qquad T=\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}\theta d\gamma=\theta_1^{(0)},\qquad T^*=\frac{6}{\varepsilon^2}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}\gamma\theta\,d\gamma=\frac{\theta_2^{(0)}}{2}$$

Уравнения (6.2) при учете (6.4) совпадают с известными в двух частных случаях аналогичными уравнениями теплопроводности: для однородной изотропной оболочки [7] и анизотропной пластины [4].

Из решения локальных задач (3.6) в изотропном случае с учетом (3.2) получим для отличных от нуля коэффициентов (3.7)

$$(6.5)\qquad s_{11}=s_{22}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\alpha^\theta E}{1-\nu},\qquad s_{11}{}^*=s_{22}{}^*=zs_{11}$$

где α^θ — температурный коэффициент линейного расширения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Из (3.9), (6.1), (6.4), (6.5) вытекают соотношения, связывающие тепловые напряжения с интегральными характеристиками температуры (6.4), совпадающие с принятыми в теории термоупругости тонких пластин и оболочек [4, 7, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н. С.*, *Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352 с.
2. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир. 1984. 472 с.
3. *Каламкаров А. Л.*, *Кудрявцев Б. А.*, *Партон В. З.* Задача об искривленном слое из композиционного материала с волнистыми поверхностями периодической структуры // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 68—75.
4. *Подстригач Я. С.*, *Ломакин В. А.*, *Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука. 1984. 368 с.
5. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984. 336 с.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука. 1973. 536 с.
7. *Подстригач Я. С.*, *Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наук. думка. 1978. 344 с.
8. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 446 с.
9. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 1962. 431 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.V.1986