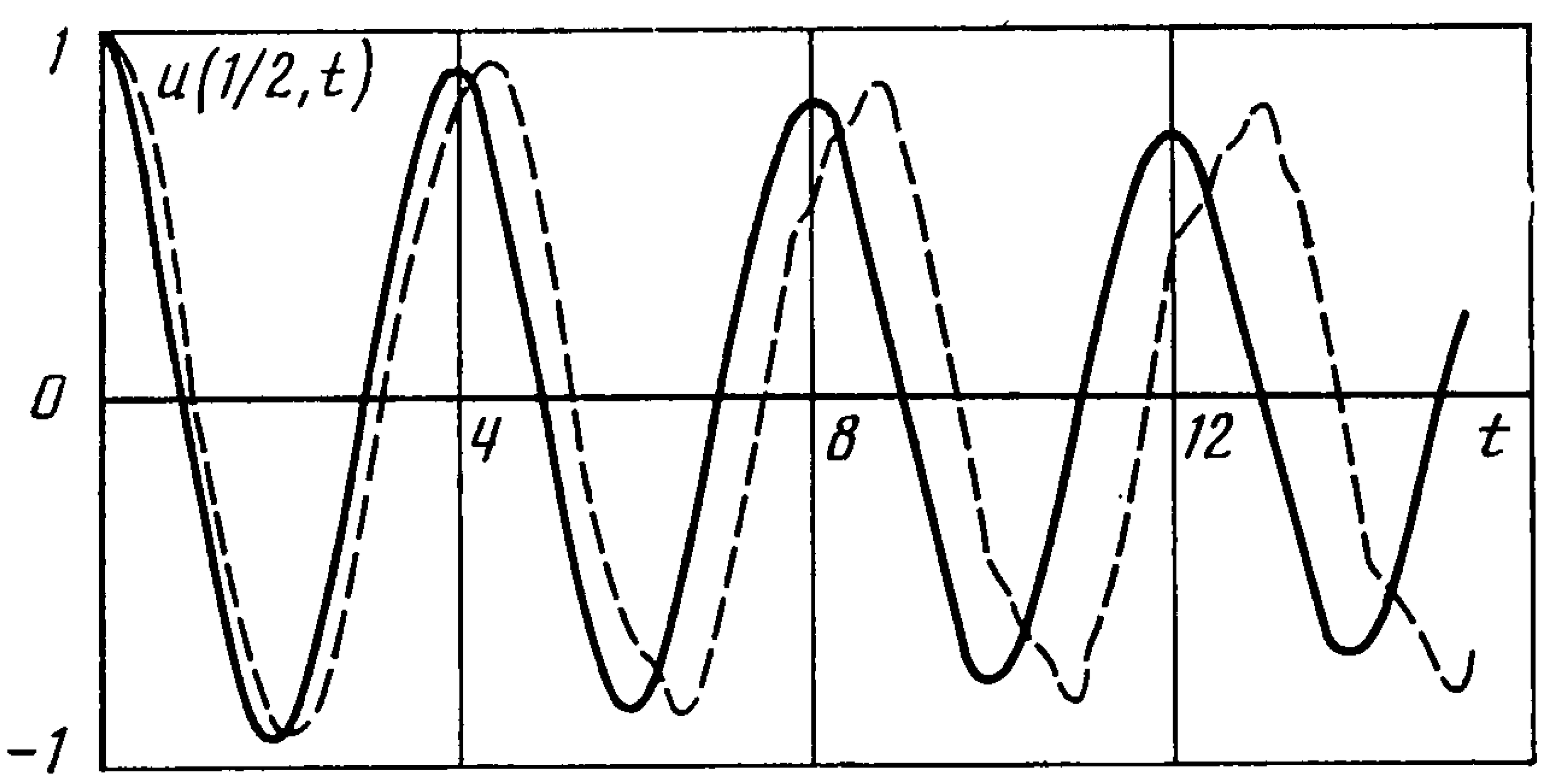

Кутта. При численных расчетах использованы следующие данные:

$$R(t-\tau) = \alpha \exp[-2\beta(t-\tau)], \quad \alpha = 2\beta = 0{,}05$$

$$f_0(x) = {}^8/_3\,(x - {}^1/_2 x^2), \quad g_0(x) = 0$$

Согласно (1.3), по методу замораживания системе (4.3) ставится в соответствие система дифференциальных уравнений, для решения которой применяем метод Рунге —

В формулах (4.2) удерживалось пять первых гармоник (расчеты показали, что дальнейшее увеличение количества членов не оказывает существенного влияния на амплитуду колебаний стержня). На фигуре представлена форма колебаний срединной точки стержня при значениях $\gamma = 0$ (сплошная линия) и $\gamma = 0{,}05$ (штриховая линия).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент: Фан, 1971. 279 с.
2. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Ташкент: Фан. 1974. 216 с.
3. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в нелинейной теории вязкоупругости // Механика полимеров. 1974. № 2. С. 221—229.
4. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука. 1976. 152 с.
5. *Бадалов Ф. Б.* Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Фан. 1980. 221 с.
6. *Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высш. шк. 1985. 392 с.

Ташкент

Поступила в редакцию
17.IV.1985

УДК 539.3 : 534.1

ФРОНТЫ СТАЦИОНАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ПАМЯТЬЮ И ТЕОРЕМЫ ФАКТОРИЗАЦИИ

Локшин А. А.

Изучаются непрерывные и разрывные одномерные волны стационарного профиля в нелинейно-наследственных стержнях, причем ядро наследственности не предполагается регулярным (т. е. допускается существование у ядра сингулярности — интегрируемой особенности при $t \to +0$). Найдены соответствующие прифронтовые асимптотики. Как известно [1], в линейной ситуации в наследственных средах с сингулярными ядрами сильные разрывы распространяться не могут. Поэтому сама возможность существования решений с сильными разрывами в нелинейном сингулярном случае не вполне тривиальна.

Формулируется гипотеза о возможности распространения солитонообразных решений для случая, когда ядро наследственности удовлетворяет некоторым дополнительным ограничениям. Исследование волн стационарного профиля сводится к нахождению ненулевых решений нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа, не имеющих правой части. Приводятся две новые теоремы о факторизации нелинейных волновых операторов с памятью и родственная им теорема об асимптотической факторизации уравнения Клейна — Фока — Гордона. Эти теоремы позволяют обобщить результаты работы на широкий класс определяющих соотношений.

Работа продолжает исследования [2—6]. Волны стационарного профиля [3] соответствовали случаю экспоненциального ядра наследственности, что позволяло свести задачу об определении формы такой волны к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Более общая ситуация рассмотрена в [6], где анонсирован и частично доказан ряд результатов о волнах стационарного профиля для регулярных ядер. Факторизационные теоремы, приводимые ниже, основываются на результатах работ [7, 8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейный наследственно-упругий стержень плотности $\rho = \mathrm{const}$, в котором деформация ε и непряжение σ связаны соотношением

$$(1.1)\qquad (1-\gamma R^{\smile})\,\varepsilon = A\sigma + \gamma B\sigma^2; \qquad R^{\smile}\varepsilon \equiv \int_{-\infty}^{t} R(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau$$

где $A > 0$, $0 < \gamma \ll 1$. При этом предполагается, что функция $R(t)$, определенная на полуоси $t > 0$, неотрицательна, убывает и интеграл от нее по всей полуоси конечен. Как было показано в [2,7], волна напряжений, распространяющаяся вправо в таком стержне, описывается следующим одноволновым уравнением:

$$(1.2)\qquad (1-k\gamma\sigma)\,\partial_t\sigma + (1-{}^1\!/_2\gamma R^{\smile})\,\partial_x\sigma = 0;\quad k = -B/A,\quad x = y\sqrt{A\rho}$$

(y — лагранжева координата точек стержня). Условие на разрыве в координатах t, x имеет вид $1/U = 1 - k\gamma\,[\sigma^2]/(2\,[\sigma])$. Здесь U — скорость фронта в указанных координатах , квадратные скобки обозначают взятие разрыва на фронте. Для определенности предполагаем ниже, что $k > 0$. В случае $R^{\smile} \equiv 0$ это условие соответствует опрокидыванию волны растяжения (движущейся вправо) по ходу ее движения.

2. Непрерывные стационарные волны. Представляет интерес вопрос о том, существуют ли в рассматриваемой одномерной среде волны, которые распространяются вправо по невозмущенной области, не изменяя своей формы. Для волн, не содержащих сильных разрывов, поставленный вопрос сводится к вопросу о том, существуют ли у уравнения (1.2) решения вида $\sigma = f(t - x/c)$, $c > 0$, где $f(z) = 0$ при $z < 0$. Как известно, возмущения бесконечно малой амплитуды распространяются по невозмущенной среде с мгновенно-упругой скоростью (в координатах t, x — с единичной скоростью). Поэтому следует искать требуемое непрерывное решение уравнения (1.2) в виде $\sigma = f(t - x)$. Подставляя это выражение в (1.2), интегрируя и переобозначая переменную $z = t - x$ через t, приходим к автомодельному интегральному уравнению

$$(2.1)\qquad kf^2(t) = \int_0^t R(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

(постоянная интегрирования оказывается равной нулю, так как $f(t) = 0$ при $t < 0$). Ясно, что если у уравнения (2.1) есть хотя бы одно ненулевое решение $f(t)$, то будет существовать сразу целое семейство решений вида $f(t - t_0)$. Из этого семейства, очевидно, всегда можно выбрать решение, не обращающееся тождественно в нуль при сколь угодно малых $t > 0$.

Лемма 1. Пусть у уравнения (2.1) существует ограниченное, монотонно возрастающее решение $f(t)$, $t > 0$, не равное тождественно нулю на сколь угодно малом промежутке вида $0 < t < \delta$. Тогда функция $f(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$, бесконечно дифференцируема при $t > 0$, $f(0) = 0$ и $f(t) > 0$ при $t > 0$. Кроме того

$$(2.2)\qquad f(t) \to f(\infty) = \frac{I}{k},\quad t\to\infty;\quad I \equiv \int_0^\infty R(t)\,dt$$

$$(2.3)\qquad \frac{1}{2k}\sqrt{R(t)}\int_0^t R(t)\,dt \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{k}\int_0^t R(t)\,dt$$

Доказательства требуют фактически только неравенства (2.3). Для их установления достаточно оценить правую часть в (2.1) сверху и снизу соответственно через $f(t)\int R(t)\,dt$ и $R(t)\int f(t)\,dt$. Бесконечная дифференцируемость $f(t)$ при $t > 0$ вытекает из положительности $f(t)$ при $t > 0$ и того, что правая часть в (2.1) имеет порядок гладкости, на единицу превосходящий порядок гладкости левой части. Последнее, очевидно, возможно лишь при условии бесконечной дифференцируемости обеих частей в формуле (2.1).

Теорема 1. Ненулевое решение $f(t)$ уравнения (2.1), упоминаемое в лемме 1, существует.

Доказательство этой теоремы проведем в два этапа.

1°. Пусть

$$R(t) = Ct^{\alpha-1},\ 0 < t < t_0;\ t_0 > 0,\ C > 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1 \tag{2.4}$$

Видно, что функция

$$f(t) = C\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+1)\,(k\Gamma(2\alpha+1))^{-1}t^{\alpha},\ 0 \leqslant t < t_0 \tag{2.5}$$

является на полуинтервале $[0, t_0)$ точным решением (2.1) с ядром (2.4). Построим теперь нулевое приближение к решению на $[0, \infty)$ следующим образом. Будем считать, что $f_0(t)$ имеет вид (2.5) при $0 \leqslant t < t_0$, а при $t \geqslant t_0$ положим $f_0(t) = I/k$. Следующие приближения определим рекуррентным образом по формуле

$$kf_j^2(t) = \int_0^t R(t-\tau)\, f_{j-1}(\tau)\, d\tau \tag{2.6}$$

(здесь при определении f_j через f_{j-1} берется положительное значение квадратного корня из правой части (2.6)). Можно доказать по индукции, что при сделанном выборе нулевого приближения $f_j(t) \equiv f_0(t)$ на полуинтервале $[0, t_0)$; $f_j(t) \to I/k$ при $t \to \infty$ и все функции $f_j(t)$ неотрицательны и монотонно возрастают. Кроме того, вычитая равенство (2.6) при $j = n - 1$ из аналогичного равенства при $j = n$ и представляя получающуюся левую часть в виде произведения $k(f_n + f_{n-1})(f_n - f_{n-1})$, по индукции можно показать, что при сделанном выборе f_0 будут справедливы неравенства $0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_{n-1}(t) \leqslant \ldots \leqslant f_0(t)$ при $t \geqslant 0$. Поэтому при $j \to \infty$ существует ненулевой предел функций $f_j(t)$, который обозначим $f(t)$ и который является искомым решением.

2°. Пусть теперь $R(t)$ — произвольная неотрицательная убывающая интегрируемая функция. Положим $R_n(t) = R(1/n)$ при $0 \leqslant t < 1/n$; $R_n(t) = R(t)$ при $t \geqslant 1/n$. Ясно, что $R_1(t) \leqslant R_2(t) \leqslant \ldots \leqslant R_n(t) \leqslant \ldots \leqslant R(t)$, причем все $R_n(t)$ — убывающие неотрицательные интегрируемые функции, каждая из которых удовлетворяет условию (2.4) соответственно с $C = R(1/n)$, $\alpha = 1$, $t_0 = 1/n$. В силу предыдущего при каждом n уравнение (2.1) с ядром $R_n(t)$ имеет монотонно возрастающее неотрицательное ненулевое решение $f_{(n)}(t)$, для которого имеет место предельное соотношение (см. лемму 1)

$$f_{(n)}(t) \to f_{(n)}(\infty) = \frac{1}{k}\int_0^\infty R_n(\tau)\, d\tau < \frac{1}{k}\int_0^\infty R(\tau)\, d\tau = \frac{I}{k}; \quad t \to \infty \tag{2.7}$$

Кроме того, по индукции можно доказать, что $0 < f_{(1)}(t) \leqslant \ldots \leqslant f_{(n)}(t) \leqslant \ldots$ Но из монотонного возрастания функций $f_{(n)}$ и из (2.7) следует, что все $f_{(n)}$ ограничены сверху одной постоянной I/k. Следовательно, при $n \to \infty$ существует предел последовательности функций $f_{(n)}$, который и является искомым решением $f(t)$.

Замечания 1°. Аналогичная теорема, очевидно, справедлива и для более общего уравнения $\varphi(f) = R^{\smile}f$, где φ — произвольная монотонно возрастающая функция от f, имеющая при $f = 0$ нуль второго порядка.

2°. Пусть $R(t) = Ce^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi_0)$ при $t \geqslant 0$, где $C > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\omega > 0$, $0 \leqslant \varphi_0 < \pi$. Тогда уравнение (2.1) приводится к дифференциальному уравнению второго порядка

$$(f^2)'' + 2\alpha(f^2)' - C_1\sin\varphi_0\cdot f' - C_1(\omega\cos\varphi_0 + \alpha\sin\varphi_0)\,f + (\alpha^2 + \omega^2)\,f^2 = 0$$

с начальными условиями

$$f(0) = 0,\ f'(0) = {}^1/_2 C_1\sin\varphi_0;\ C_1 = C/k$$

В частности, при $R(t) = C\sin\omega t$ уравнение (2.1) имеет решение

$$f(t) = C_2(1 - \cos(\omega t/2));\ C_2 = 2C/(3\omega k)$$

Гипотеза. Если отказаться от неотрицательности ядра $R(t)$ и предположить, что интеграл от него по полуоси $t > 0$ равен нулю, то уравнение (2.1) будет иметь солитонообразные решения.

3. Разрывные стационарные волны. Уравнение, аналогичное (2.1), описывающее разрывные волны стационарного профиля, распространяющиеся по невозмущенной среде, имеет вид

$$g(t)\,(g(t)-g(+0)) = A_0\int\limits_0^t R(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau;\qquad A_0 \equiv \frac{1-k\gamma g(+0)/2}{k} \tag{3.1}$$

При этом предполагается, что малый параметр γ достаточно мал для того, чтобы было $A_0 > 0$. Переменная t в (3.1) считается неотрицательной. Отметим нестандартный, самосогласованный характер уравнения (3.1): величина $g(+0)$, являющаяся «начальным условием» для функции $g(t)$, входит непосредственно в уравнение (3.1). Решению $g(t)$ уравнения (3.1) соответствует волна напряжений $\sigma = g(t - x/c)$, $c = (1 - k\gamma g(+0)/2)^{-1}$. Так как по предположению $k > 0$, то из условия устойчивости ударной волны следует, что должно быть $g(+0) > 0$. В дальнейшем для простоты вместо $g(+0)$ будем писать $g(0)$.

Лемма 2. Пусть у уравнения (3.1) при некотором $g(0) > 0$ существует ограниченное монотонно возрастающее решение $g(t)$, $t \geqslant 0$. Тогда

$$g(t) \to g(\infty) = g(0) + A_0 I,\quad t \to \infty \tag{3.2}$$

$$\frac{g(0)}{2} + \left(\frac{g^2(0)}{4} + A_0 g(0)\int\limits_0^t R(t)\,dt\right)^{1/2} \leqslant g(t) \leqslant g(0) + A_0\int\limits_0^t R(t)\,dt \tag{3.3}$$

причем функция $g(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$ и бесконечно дифференцируема при $t > 0$.

Доказательство. Соотношение (3.2) сразу следует из конечности интеграла от ядра $R(t)$ и из (3.1). Неравенства (3.3) можно получить оценивая правую часть в (3.1) сверху и снизу соответственно через $A_0\, g(t) \int R(t)\,dt$ и $A_0 g(0) \int R(t)\,dt$ (интегрирование ведется от нуля до t).

Теорема 2. Для каждого значения $g(0) > 0$ у уравнения (3.1) существует ограниченное монотонно возрастающее решение $g(t)$, $t \geqslant 0$.

Доказательство этой теоремы (как и доказательство теоремы 1) проводится в два этапа.

1°. Возьмем в качестве нулевого приближения к решению произвольную непрерывную монотонно возрастающую функцию $g_0(t)$, такую, что $g_0(0) = g(0)$ и $g_0(\infty) = g(0) + I/k$. Затем последовательные приближения определим по формуле

$$g_n(t)\,(g_n(t) - g(0)) = A_0\int\limits_0^t R(t-\tau)\,g_{n-1}(\tau)\,d\tau;\qquad t \geqslant 0 \tag{3.4}$$

(здесь при определении g_n через g_{n-1} выбирается больший из двух корней квадратного уравнения). Можно доказать сходимость построенных приближений на малом отрезке $0 \leqslant t \leqslant \delta$ к некоторой монотонно возрастающей функции $\varphi(t)$. Для этого достаточно установить при $0 \leqslant t \leqslant \delta$ неравенство $\max|g_m - g_{m-1}| \leqslant \varkappa \max|q_{m-1} - q_{m-2}|$, $0 < \varkappa < 1$; $m = 1, 2, \ldots$. Но это неравенство можно доказать вычитая (3.4) для $n = m - 1$ из (3.4) для $n = m$ и оценивая сверху интегральное слагаемое.

2°. Установим теперь существование решения на всей полуоси. Снова используем схему последовательных приближений (3.4), однако на этот раз в качестве нулевого приближения возьмем функцию $g_0(t) = \varphi(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \delta$; $g_0(t) = g(0) + I/k$ при $t > \delta$. Сходимость на всей полуоси $t \geqslant 0$ определяемых таким способом последовательных приближений следует из того, что все функции $g_n(t)$ монотонно возрастают, ограничены сверху общей постоянной, удовлетворяют доказываемым по индукции неравенствам $0 < g_n(t) \leqslant g_{n-1}(t) \leqslant \ldots \leqslant g_0(t)$, а на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \delta$ справедливо $g_n(t) \equiv \varphi(t)$ при всех n. Предельная функция $g(t)$ и является искомым решением уравнения (3.4). Теорема доказана.

4. Стабилизирующиеся волны. Из (3.1), (3.2) ясно, что $g(\infty) > f(\infty) = I/k$. Поэтому можно сделать следующие качественные выводы о поведении на больших временах решений уравнения (1.2) при начальных и граничных условиях, задаваемых ниже (Θ — функция Хевисайда):

$$x = 0,\ \sigma = \sigma_0\Theta(t)\ (\sigma_0 > 0);\quad t \leqslant 0,\ x > 0,\ \sigma(t, x) = 0 \tag{4.1}$$

1°. Если $\sigma_0 > I/k$, то при $t \to \infty$ решение задачи (1.2), (4.1) стремится к разрывной волне стационарного профиля, распространяющейся по невозмущенной среде: $\sigma = g(t - x/c) + \text{const}$). Скорость фронта c и величина разрыва на фронте $g(0)$ определяются при этом из равенств $1/c = 1 - k\gamma g(0)/2$ и $\sigma_0 = g(\infty) \equiv I/k + g(0)(1 - \gamma I/2)$. Таким образом, нелинейный эффект опрокидывания оказывается здесь сильнее, чем сглаживание за счет релаксации.

2°. Если $\sigma_0 = I/k$, то при $t \to \infty$ решение задачи (1.2), (4.1) стремится к непрерывной стационарной волне вида $\sigma = f(t - x + \text{const})$. Можно сказать, что в этом случае нелинейные и релаксационные эффекты взаимно уравновешиваются.

3°. Если $0 < \sigma_0 < I/k$, то, как следует из полученных выше результатов, не существует решения ни одного из автомодельных уравнений (2.1), (3.1), стремящегося на бесконечности к σ_0. Можно показать, однако, что и в этом случае профиль волны стабилизируется, но предельным оказывается профиль волны, распространяющейся по возмущенной среде.

5. Теоремы факторизации. В основу изложенной теории было положено одноволновое уравнение (2.1), содержащее квадратичную нелинейность. Это уравнение было получено в [2, 7] как асимптотическое при $\gamma \to 0$. Из приводимой ниже теоремы следует, что: а) существует определяющее соотношение, для которого уравнение (2.1) является не асимптотическим, а точным; б) уравнение (2.1) допускает естественное обобщение на случай нелинейности общего вида. Можно показать, что все результаты пп.2 — 4 переносятся на случай нелинейности общего вида.

Теорема 3. Пусть имеет место определяющее соотношение

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} (1 + R^{\vee}) \sqrt{a'(\sigma)}\, (1 + R^{\vee}) \sqrt{a'(\sigma)}\, \sigma_t'\, dt$$

Тогда динамическое уравнение для напряжений

$$\partial_t^2 \int_{-\infty}^{t} (1 + R^{\vee}) \sqrt{a'(\sigma)}\, (1 + R^{\vee}) \sqrt{a'(\sigma)}\, \sigma_t'\, dt - \frac{1}{\rho} \partial_y^2 \sigma = 0$$

точно факторизуется следующим образом:

$$\left\{\partial_t (1 + R^{\vee}) \sqrt{a'(\sigma)} \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_y\right\} \left\{(1 + R^{\vee}) \sqrt{a'(\sigma)}\, \partial_t \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_y\right\} \sigma = 0 \tag{5.1}$$

(одновременно выбираются верхние или нижние знаки). Одноволновые уравнения, отвечающие факторизации (5.1), имеют вид

$$(1 + R^{\vee}) \sqrt{a'(\sigma)}\, \partial_t \sigma \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_y \sigma = 0$$

Иной подход к данной проблеме содержится в [5].

Определяющее соотношение, использованное в теореме 3, устроено довольно сложно. Можно предложить еще одно, более простое определяющее соотношение наследственного типа (также содержащее нелинейность общего вида), для которого факторизация соответствующего волнового оператора тоже оказывается возможной. Однако в отличие от (5.1) эта факторизация будет не точной, а асимптотической с равномерно малой невязкой.

Теорема 4. Пусть имеет место определяющее соотношение

$$\varepsilon(t) = a(\sigma(t)) + \gamma \int_{-\infty}^{t} d(\sigma(\tau))\, d\tau, \qquad 0 < \gamma \ll 1$$

Тогда соответствующее динамическое уравнение для напряжений

$$\partial_t^2 a(\sigma) + \gamma \partial_t b(\sigma) - \rho^{-1} \partial_y^2 \sigma = 0$$

может быть асимптотически факторизовано следующим образом:

$$\left\{\partial_t \sqrt{a'(\sigma)} + \frac{\gamma}{2} \beta'(\sigma) \mp \frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_y\right\} \left\{\sqrt{a'(\sigma)}\, \partial_t \sigma + \frac{\gamma}{2} \beta(\sigma) \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_y \sigma\right\} = O(\gamma^2) \tag{5.2}$$

$$\beta(\sigma) \equiv (a'(\sigma))^{-1/4} \int_0^{\sigma} (a'(\eta))^{-1/4}\, b'(\eta)\, d\eta$$

где величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном σ и обращается в нуль при $\sigma = 0$. Одноволновые уравнения, отвечающие факторизации (5.2), имеют вид

$$\sqrt{a'(\sigma)}\, \partial_t \sigma + \frac{\gamma}{2} \beta(\sigma) \pm \frac{1}{\sqrt{\rho}} \partial_y \sigma = 0$$

Приведем для полноты еще одну теорему факторизации, родственную теоремам 3 и 4.

Теорема 5. Уравнение Клейна — Фока — Гордона

$$\partial_t^2 w - \partial_y^2 w + \gamma g(w) = 0,\ 0 < \gamma \ll 1$$

может быть асимптотически факторизовано следующим образом:

$$\{\partial_t + {}^1/_2\gamma 1^{\smile} g'(w) \mp \partial_y\}\{\partial_t w + {}^1/_2\gamma 1^{\smile} g(w) \pm \partial_y w\} = O(\gamma^2) \tag{5.3}$$

Здесь $1^{\smile}$ — оператор интегрирования по dt от $-\infty$ до t, а величина $O(\gamma^2)$ равномерно мала при ограниченном w и обращается в нуль при $w = 0$. Одноволновые уравнения, соответствующие факторизации (5.3), имеют вид

$$\partial_t w + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{-\infty}^{t} g(w(\tau))\, d\tau \pm \partial_y w = 0$$

Доказательство теорем 3—5 сводится к перемножению операторных скобок в (5.1) — (5.3). При этом необходимо учитывать порядок сомножителей-операторов (оператор, стоящий правее, действует раньше).

Автор благодарит Н. В. Зволинского за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Локшин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ. 1982. 151 с.
2. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука. 1977. 287 с.
3. *Nigul U.* Asymptotic analysis of the pulse shape evolution and of the inverse problem of acoustic evaluation in case of the nonlinear herediatary medium // Proc. IUTAM Sympos. on Nonlinear Waves. Tallinn. 1982 / Ed. by U. Nigul J. Engelbrecht. B.e.a.: Springer. 1983. P. 255—272.
4. *Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус. 1984. 154 с.
5. *Нигул У. К.* Применение модифицированных ядер при описании волн деформации в линейных и нелинейных вязкоупругих средах // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллин: Валгус. 1985. С. 147—160.
6. *Нигул И. У., Нигул У. К.* Одномерные продольные волны стационарного профиля в нелинейных средах с затухающей памятью // Проблемы нелинейной акустодиагностики. Таллин: Валгус. 1986. С. 83—94.
7. *Локшин А. А.* Нелинейная ударная волна в наследственной среде и точная факторизация нелинейного волнового оператора // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 104—108.
8. *Локшин А. А., Сагомонян Е. А.* Факторизация нелинейного волнового оператора и нелинейный аналог метода ВКБ в теории распространения упругих волн // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 95—97.

Москва

Поступила в редакцию
15.II.1986