

где  $\eta = \rho/2$ ,  $\psi(z)$ —пси-функция, которую удобно вычислять по рекуррентной формуле

$$\psi(z+1) = \psi(z) + z^{-1}, \quad \psi(1) \approx 0,577216$$

Интеграл  $p_0$  вычисляется аналогично и представляется рядом

$$(5) \quad p_0 = \frac{1}{12} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \frac{4}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\eta^{6m}}{((3m)!)^2} + \frac{\eta^{6m+2}}{((3m+1)!)^2} \right] - \frac{3\eta^{6m+1}}{\Gamma^2(3m+3/2)} + \frac{6}{\pi} \frac{\eta^{6m+1}}{((3m+2)!)^2} [\ln \eta - \psi(3m+3)] \right\}$$

Так как  $\lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z) = \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ , то худшую сходимость в разложениях (4), (5) имеют слагаемые с пси-функцией. Поэтому исследуем сходимость рядов из этих членов. Учитывая рекуррентные соотношения для пси-функций и факториалов, получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \{ \psi(3m+5+j) ((3m+1+j)!)^2 [\psi(3m+2+j) ((3m+4+j)!)^2]^{-1} \} = 0, \quad j = 1, 2$$

т. е. по признаку Даламбера ряды (4), (5) сходятся на всей числовой оси. Скорость сходимости достаточно высокая и удержание нескольких первых членов позволяет достичь хорошей точности при небольших  $\eta$ . Так, при  $m \leq 3$  результаты расчетов по формулам (4), (5) и данные, полученные численным интегрированием квадратур [2], совпадают с точностью 0,001 при  $\rho \leq 4$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз. 1963. 635 с.
2. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат. 1973. 627 с.
3. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев: Одесса: Вища шк. 1982. 167 с.
4. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука. 1971. 287 с.
5. Ольшанский В. П. Фундаментальные решения уравнений пологих оболочек // Изв. вузов. Математика. 1980. № 6. С. 52—56.
6. Ольшанский В. П. Сингулярные решения уравнений пологих оболочек для сосредоточенной касательной нагрузки // ПМТФ. 1979. № 2. С. 139—144.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука. 1974. 295 с.
8. Градштейн И. М., Рыжик И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1962. 1100 с.

Харьков

Поступила в редакцию  
22.IX.1986

УДК 539.3

#### О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЗАДАЧАХ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Бадалов Ф., Эшматов Х., Юсупов М.

Предложенный и обоснованный А. Н. Филатовым метод замораживания для систем интегродифференциальных уравнений (ИДУ) стандартного вида [1—4] применяется для систем ИДУ, встречающихся в динамических задачах вязкоупругости. Предлагается численный метод для систем ИДУ, основанный на использовании квадратурных формул. Для сравнения этого метода с другими известными методами (метод усреднения, метод замораживания) рассматривается конкретный пример. Далее методом замораживания в сочетании с численным методом Рунге — Кутты исследуется задача о продольных колебаниях вязкоупругого стержня в физически нелинейной постановке.

1. Рассмотрим систему ИДУ вида

$$(1.1) \quad T_i'' + \omega_i^2 T_i = f_i(t) + \mu X_i \left( t, T_1, \dots, T_n, \int_0^t \varphi_i(t, \tau, T_1(\tau), \dots, T_n(\tau)) d\tau \right) \\ T_i(0) = T_{0i}, \quad T_i'(0) = T_{0i}'$$

Здесь  $T_i(t)$  — искомые функции аргумента  $t$ ,  $\mu > 0$  — малый параметр,  $f_i$ ,  $X_i$  и  $\varphi_i$  — заданные непрерывные функции в области изменения аргументов; индекс  $i$  всюду принимает значения  $1, 2, \dots, n$ .

При помощи подстановки

$$(1.2) \quad T_i(t) = C_{1i} \cos \omega_i t + C_{2i} \sin \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t f_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau$$

приведем систему (1.1) к стандартному виду. Применяя к полученной системе процедуру замораживания [1—4] и учитывая соотношения (1.2), после дифференцирования получим

$$(1.3) \quad T_i'' + \omega_i^2 T_i = f_i(t) + \mu X_i \left\{ t, T_1, \dots, T_n, \int_0^t \varphi_i \left( t, t - \tau, T_1(t) \cos \omega_1 \tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\omega_1} T_1'(t) \sin \omega_1 \tau - \frac{1}{\omega_1} \int_{t-\tau}^t f_1(s) \sin \omega_1(t - \tau - s) ds, \dots, T_n(t) \cos \omega_n \tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\omega_n} T_n'(t) \sin \omega_n \tau - \frac{1}{\omega_n} \int_{t-\tau}^t f_n(s) \sin \omega_n(t - \tau - s) ds \right) d\tau \right\} \\ T_i(0) = T_{0i}, \quad T_i'(0) = T_{0i}'$$

Таким образом, по методу замораживания системе (1.1) ставится в соответствие система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида (1.3). Очевидно, что исследовать систему (1.3) проще, чем систему ИДУ вида (1.1). Более того, к системе (1.3) можно применить известные методы численного интегрирования.

Вид системы (1.3) дает возможность, не приводя исходную систему ИДУ к стандартному виду, выполнять действие замораживания.

2. Теперь для системы (1.1) предложим численный метод, основанный на использовании квадратурных формул. Запишем эту систему в интегральной форме. Полагая затем  $t = t_m$ ,  $t_j = jh$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  $m = 1, 2, \dots$  ( $h = \text{const}$ ) и заменяя интегралы некоторыми квадратурными формулами, для вычисления значения  $T_{mi} = T_i(t_m)$  получим следующую приближенную формулу:

$$(2.1) \quad T_{mi} = T_{0i} \cos \omega_i t_m + \frac{1}{\omega_i} T_{0i}' \sin \omega_i t_m + \frac{1}{\omega_i} \sum_{j=0}^{m-1} A_j f_i(t_j) \sin \omega_i(t_m - t_j) + \\ + \frac{\mu}{\omega_i} \sum_{j=0}^{m-1} B_j X_i \left( t_j, T_{j1}, \dots, T_{jn}, \sum_{k=0}^j C_k \varphi_i(t_j, t_k, T_{k1}, \dots, T_{kn}) \right) \times \\ \times \sin \omega_i(t_m - t_j), \quad m = 1, 2, \dots$$

где  $A_j$ ,  $B_j$  и  $C_k$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ;  $k = 0, 1, \dots, j$ ;  $m = 1, 2, \dots$  — числовые коэффициенты, не зависящие от выборов подынтегральных функций и принимающие различные значения в зависимости от использованных квадратурных формул.

Вид подынтегральных функций дает возможность, используя заданные начальные условия, находить из формулы (2.1) последовательно числовые значения искомой функции. Погрешность предложенного метода совпадает с погрешностью, получаемой при использовании квадратурных формул и имеет тот же порядок малости относительно шага интерполяции.

3. Для сравнения метода замораживания с некоторыми другими методами рассмотрим задачу Коши

$$(3.1) \quad T'' + \omega^2 T = f(t) + \omega^2 \int_0^t R(t - \tau) T(\tau) d\tau \\ T(0) = T_0, \quad T'(0) = T_0'$$

Покажем, что к уравнениям вида (3.1) сводятся многие задачи вязкоупругости. Как известно [5], динамические задачи линейной теории вязкоупругости после применения по пространственным переменным методов типа Бубнова — Галеркина (конечных элементов) приводятся к системам ИДУ вида

$$(3.2) \quad Mu'' + Gu = F(t) + G \int_0^t R(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

( $M$  — матрица масс системы,  $G$  — матрица жесткости,  $R(t)$  — ядра релаксации). Если матрицу узловых перемещений  $u(t)$  представить в виде линейных комбинаций собственных векторов соответствующих упругих задач, т. е. [6]

$$u(t) = T_1(t) W_1 + T_2(t) W_2 + \dots$$

$$W_i^T M W_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j), \end{cases} \quad W_j^T G W_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \omega_i^2 & (i = j) \end{cases}$$

то из (3.2), опуская индексы, получим (3.1).

Согласно (1.3), для уравнения (3.1) соответствующее дифференциальное уравнение можно записать в следующей форме:

$$T'' + \omega \Gamma_s(t) T' + \omega^2 [1 - \Gamma_c(t)] T = f(t) -$$

$$- \omega \int_0^t R(\tau) d\tau \int_{t-\tau}^t f(s) \sin \omega(t-\tau-s) ds$$

$$T(0) = T_0, \quad T'(0) = T_0'$$

$$\left( \Gamma_s(t) = \int_0^t R(s) \sin \omega s ds, \Gamma_c(t) = \int_0^t R(s) \cos \omega s ds \right)$$

По методу усреднения [1—4] уравнению (3.1) ставится в соответствие дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$T'' + 1/2 \omega \Gamma_s(\infty) T' + \omega^2 [1 - \Gamma_c(\infty)] T = f(t) + \omega (D_s \sin \omega t + D_c \cos \omega t) -$$

$$- \frac{\omega}{2} \int_0^t f(\tau) [\sin \omega(t-\tau) - \cos \omega(t-\tau)] d\tau$$

$$T(0) = T_0, \quad T'(0) = T_0'$$

$$\begin{cases} D_s \\ D_c \end{cases} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \int_0^p D(t) \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} \omega t dt$$

$$D(t) = \int_0^\infty R(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} \sin \omega(t-\tau-s) ds$$

Теперь для уравнения (3.1) применим метод, предложенный в п. 2. Запишем это уравнение в интегральной форме, и формула (2.1) примет вид

$$T_m = T_0 \cos \omega t_m + \frac{1}{\omega} T_0' \sin \omega t_m +$$

$$+ \frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{m-1} A_j f(t_j) \sin \omega(t_m - t_j) + \omega \sum_{j=0}^{m-1} B_j F(t_m, t_j) T_j, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$F(t, \tau) = \int_0^{t-\tau} R(s) \sin \omega(t-\tau-s) ds, \quad F(t, t) = 0$$

где  $A_j, B_j$  ( $j = 0, 1, \dots, m-1$ ) — коэффициенты квадратурной формулы Симпсона.

Рассмотрим уравнение (3.1) при таких данных:

$$f(t) = a \sin \theta t, \quad R(t-\tau) = \alpha \exp[-2\beta(t-\tau)]$$

$$\alpha = 2\beta = 0,05 \text{ 1/с}, \quad a = 240 \text{ кг/см}^2, \quad \theta = 2\omega$$

$$\omega^2 = 350 \text{ 1/с}^2, \quad T_0 = 0,05 \text{ см}, \quad T_0' = 0$$

При принятых  $f(t)$ ,  $R(t)$  и начальных данных уравнение (3.1) имеет следующее точное решение:

$$\begin{aligned} T(t) &= \exp(-\beta t) [(T_0 - \beta q) \cos \lambda t + (\beta \lambda^{-1} T_0 + e) \sin \lambda t] + \\ &+ r \sin \theta t + \beta q \cos \theta t, \quad q = 1/2 a \lambda^{-1} (q_+ - q_-) \\ e &= 1/2 a \lambda^{-1} (e_+ - e_-), \quad r = 1/2 a \lambda^{-1} (e_+ + e_-) \\ e_{\pm} &= (\lambda \pm \theta) q_{\pm}, \quad q_{\pm} = [(\lambda \pm \theta)^2 + \beta^2]^{-1}, \quad \lambda = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \end{aligned}$$

Ниже приведены точное решение уравнения (3.1) ( $T$ ) и приближенные решения, полученные методом усреднения ( $T_a$ ), методом замораживания ( $T_b$ ) и методом, основанным на использовании квадратурных формул, предложенным в п. 2 ( $T_c$ )

$t$	0	2	4	6	8
$T \cdot 10^4$	500	380	44,8	-531	-1344
$T_a \cdot 10^4$	500	424	181,6	-273	-961
$T_b \cdot 10^4$	500	377	38,9	-539	-1353
$T_c \cdot 10^4$	500	380	43,3	-533	-1345

Видно, что для рассматриваемой задачи метод замораживания и метод, основанный на использовании квадратурных формул, дают более точные результаты по сравнению с методом усреднения.

4. Рассмотрим задачу о продольных колебаниях вязкоупругого стержня. Связь между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  примем в виде

$$\sigma = E \left\{ \varepsilon - \gamma \varepsilon^3 - \int_0^t R(t - \tau) [\varepsilon(\tau) - \gamma \varepsilon^3(\tau)] d\tau \right\}$$

где  $R(t)$  — ядро релаксации,  $\gamma$  — коэффициент нелинейности, зависящий от материала стержня,  $E$  — модуль упругости. Подставляя это выражение в уравнение колебаний, вводя безразмерные параметры ( $u(x, t)$  — перемещение,  $\rho$  — плотность материала стержня)

$$u/l, \quad x/l, \quad t (\rho l^2/E)^{-1/2}, \quad R(t) \cdot (\rho l^2/E)^{1/2}$$

и сохраняя при этом прежние обозначения, получим (штрих означает производную по  $x$ )

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u'' &= u'' - \int_0^t R(t - \tau) u''(x, \tau) d\tau - 3\gamma (u')^2 u'' + \\ &+ 3\gamma \int_0^t R(t - \tau) (u'(x, \tau))^2 u''(x, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Дополним уравнение (4.1) начальными условиями

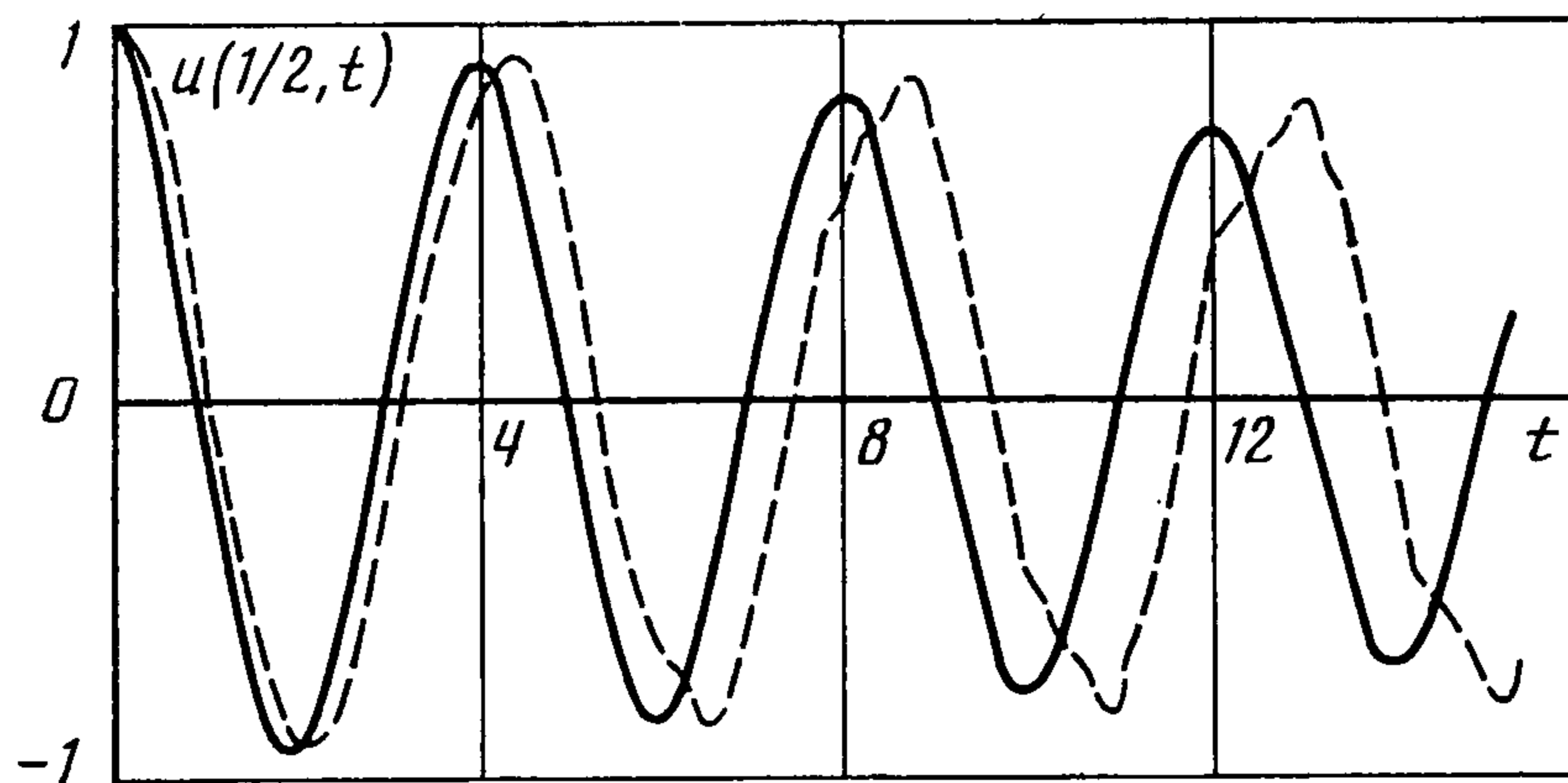
$$u(x, 0) = f_0(x), \quad u'(x, 0) = g_0(x)$$

Считая один конец стержня закрепленным, а другой — свободным, будем искать решение уравнения (4.1), удовлетворяющее граничным условиям задачи, в виде

$$(4.2) \quad u(x, t) = \sum_{k=1, 3, \dots, 2N-1}^{2N-1} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1) и применяя процедуру Бубнова — Галеркина, для нахождения искомым функций  $T_k(t)$  ( $k = 1, 3, \dots, 2N - 1$ ) имеем следующую систему ИДУ:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} T_k'' + \omega_k^2 T_k &= \omega_k^2 \int_0^t R(t - \tau) T_k(\tau) d\tau + \gamma \varphi_k(T_1, T_3, \dots, T_{2N-1}) - \\ &- \gamma \int_0^t R(t - \tau) \varphi_k(T_1(\tau), T_3(\tau), \dots, T_{2N-1}(\tau)) d\tau \\ \omega_k &= 1/2 k\pi, \quad \varphi_k(T_1, T_3, \dots, T_{2N-1}) = \frac{3\pi^4}{8} \int_0^1 \left[ \sum_{m=1, 3, \dots, 2N-1}^{2N-1} m T_m(t) \cos \frac{m\pi x}{2} \right]^2 \times \\ &\times \left[ \sum_{m=1, 3, \dots, 2N-1}^{2N-1} m^2 T_m(t) \sin \frac{m\pi x}{2} \right] \sin \frac{k\pi x}{2} dx \end{aligned}$$



Кутта. При численных расчетах использованы следующие данные:

$$R(t - \tau) = \alpha \exp[-2\beta(t - \tau)], \quad \alpha = 2\beta = 0,05$$

$$f_0(x) = \frac{8}{3}(x - \frac{1}{2}x^2), \quad g_0(x) = 0$$

Согласно (1.3), по методу замораживания системе (4.3) ставится в соответствие система дифференциальных уравнений, для решения которой применяем метод Рунге —

В формулах (4.2) удерживалось пять первых гармоник (расчеты показали, что дальнейшее увеличение количества членов не оказывает существенного влияния на амплитуду колебаний стержня). На фигуре представлена форма колебаний срединной точки стержня при значениях  $\gamma = 0$  (сплошная линия) и  $\gamma = 0,05$  (штриховая линия).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент: Фан, 1971. 279 с.
2. Филатов А. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Ташкент: Фан. 1974. 216 с.
3. Филатов А. Н. Асимптотические методы в нелинейной теории вязкоупругости // Механика полимеров. 1974. № 2. С. 221—229.
4. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука. 1976. 152 с.
5. Бадалов Ф. Б. Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Фан. 1980. 221 с.
6. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высш. шк. 1985. 392 с.

Ташкент

Поступила в редакцию  
17.IV.1985

УДК 539.3 : 534.1

### ФРОНТЫ СТАЦИОНАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ПАМЯТЬЮ И ТЕОРЕМЫ ФАКТОРИЗАЦИИ

Локшин А. А.

Изучаются непрерывные и разрывные одномерные волны стационарного профиля в нелинейно-наследственных стержнях, причем ядро наследственности не предполагается регулярным (т. е. допускается существование у ядра сингулярности — интегрируемой особенности при  $t \rightarrow +0$ ). Найдены соответствующие прифронтовые асимптотики. Как известно [1], в линейной ситуации в наследственных средах с сингулярными ядрами сильные разрывы распространяться не могут. Поэтому сама возможность существования решений с сильными разрывами в нелинейном сингулярном случае не вполне тривиальна.

Формулируется гипотеза о возможности распространения солитонобразных решений для случая, когда ядро наследственности удовлетворяет некоторым дополнительным ограничениям. Исследование волн стационарного профиля сводится к нахождению ненулевых решений нелинейных интегральных уравнений вольтерровского