Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 539.3

ФУНКЦИИ ГРИНА ПРИ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Ольшанский В. П.

Рассматриваются несобственные интегралы Войновского — Кригера [1], выражающие прогибы бесконечной пластины и контактные реакции упругого полупространства при действии единичной нормальной силы. Путем из разложения методом Ватсона в степенные ряды с логарифмом получены элементарные формулы для вычисления указанных величин в окрестности точки приложения нагрузки. Результаты расчетов при помощи этих формул хорошо согласуются с результатами численного интегрирования квадратур [2]. Полученные аналитические представления функций Грина удобно использовать в качестве ядер интегральных уравнений при решении контактных задач взаимодействия тел, одно из которых усилено тонким покрытием.

При действии нормальной единичной силы в точке с координатами (x_1, y_1) на бесконечную пластину, лежащую без трения и сцепления на упругом полупространстве, прогибы w и контактные давления p в точке с координатами (x, y) выражаются интегралами [1, 3]

$$w = l^2 (2D)^{-1} w_0, \quad p = l^{-2} p_0 \tag{1}$$

$$w_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\lambda\rho)}{\lambda^3+1}\,d\lambda, \qquad p_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\lambda\rho)\,\lambda}{\lambda^3+1}\,d\lambda$$

$$\rho = l^{-1}((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2)^{1/2}, \quad D = Eh^3 (12(1-\nu^2))^{-1}$$

$$l = (2DE_0^{-1}(1-\nu_0^2))^{1/3}$$

Здесь E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона пластины толщиной h, E_0, ν_0 — характеристики упругого полупространства, $J_0(z)$ — функция Бесселя.

Для убыстрения сходимости из выражений w_0 и p_0 была выделена [4] медленно сходящаяся часть и представлена в табулированных функциях Томсона. При этом сохранились квадратуры в решении, но улучшилась их сходимость. В данной статье предлагается аналитическое вычисление несобственных интегралов, основанное на методе Ватсона, который оказался эффективным при вычислении интегралов Фурье, представляющих фундаментальные решения дифференциальных уравнений пологих оболочек [5, 6].

Рассмотрим подробно вычисление w_0. Воспользуемся интегральным представлением Меллина—Бернса для функций Бесселя ([7], с. 30). Положим в нем $\nu = 0$, $s = -z$, $c = -\sigma$ и преобразуем числитель подынтегральной функции, используя свойства гамма-функции [8]. Получим

$$J_0(\lambda\rho) = \frac{1}{4i}\int\limits_{\sigma+i\infty}^{\sigma-i\infty} \frac{(^1/_2\lambda\rho)^z\,dz}{\Gamma^2(1+{}^1/_2 z)\sin{}^1/_2\pi z} \tag{2}$$

$$-1 < \sigma < 0, \ \operatorname{Re} z \geqslant \sigma$$

Подставив (2) в (1), после перестановки порядка интегрирования и вычисления внутреннего интеграла при помощи таблиц [8] получаем

$$w_0 = \frac{1}{12i}\int\limits_{\sigma+i\infty}^{\sigma-i\infty} \frac{(^1/_2\rho)^z\,dz}{\Gamma^2(1+{}^1/_2 z)\sin{}^1/_2\pi z\sin{}^1/_3\pi(z+1)} \tag{3}$$

Значение интеграла (3) найдем по теории вычетов. Особые точки подынтегральной функции — полюсы первого и второго порядков. Простые полюсы расположены на вещественной оси при $z = 6m$, $z = 6m+4$ и $z = 6m+5$ $(m = 0, 1, 2 \ldots)$, кратные — при $z = 6m+2$. Вычислив вычеты в указанных точках, приходим к степенному ряду

$$w_0 = \frac{1}{6}\sum_{m=0}^\infty (-1)^m \left\{\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\frac{\eta^{6m}}{((3m)!)^2} - \frac{\eta^{6m+4}}{((3m+2)!)^2}\right] + \right. \tag{4}$$

$$\left. + \frac{3\eta^{6m+5}}{\Gamma^2(3m+{}^7/_2)} + \frac{6}{\pi}\frac{\eta^{6m+2}}{((3m+1)!)^2}[\ln\eta - \psi(3m+2)]\right\}$$

где $\eta = \rho/2$, $\psi(z)$—пси-функция, которую удобно вычислять по рекуррентной формуле

$$\psi(z+1) = \psi(z) + z^{-1}, \ \psi(1) \approx 0{,}577216$$

Интеграл p_0 вычисляется аналогично и представляется рядом

$$(5) \qquad p_0 = \frac{1}{12} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \frac{4}{\sqrt{3}} \left[\frac{\eta^{6m}}{((3m)!)^2} + \frac{\eta^{6m+2}}{((3m+1)!)^2} \right] - \frac{3\eta^{6m+1}}{\Gamma^2(3m+{}^3/_2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{6}{\pi} \frac{\eta^{6m+1}}{((3m+2)!)^2} [\ln \eta - \psi(3m+3)] \right\}$$

Так как $\lim \psi(z) = \infty$ при $z \to \infty$, то худшую сходимость в разложениях (4), (5) имеют слагаемые с пси-функцией. Поэтому исследуем сходимость рядов из этих членов. Учитывая рекуррентные соотношения для пси-функций и факториалов, получаем

$$\lim_{m \to \infty} \{\psi(3m+5+j)\,((3m+1+j)!)^2\,[\psi(3m+$$
$$+2+j)\,((3m+4+j)!\,)^2]^{-1}\} = 0, \ j = 1, \ 2$$

т. е. по признаку Даламбера ряды (4), (5) сходятся на всей числовой оси. Скорость сходимости достаточно высокая и удержание нескольких первых членов позволяет достичь хорошей точности при небольших η. Так, при $m \leqslant 3$ результаты расчетов по формулам (4), (5) и данные, полученные численным интегрированием квадратур [2], совпадают с точностью 0,001 при $\rho \leqslant 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз. 1963. 635 с.
2. *Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А.* Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат. 1973. 627 с.
3. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев: Одесса: Вища шк. 1982. 167 с.
4. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука. 1971. 287 с.
5. *Ольшанский В. П.* Фундаментальные решения уравнений пологих оболочек // Изв. вузов. Математика. 1980. № 6. С. 52—56.
6. *Ольшанский В. П.* Сингулярные решения уравнений пологих оболочек для сосредоточенной касательной нагрузки // ПМТФ. 1979. № 2. С. 139—144.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука. 1974. 295 с.
8. *Градштейн И. М., Рыжик И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1962. 1100 с.

Харьков

Поступила в редакцию
22.IX.1986

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЗАДАЧАХ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Бадалов Ф., Эшматов Х., Юсупов М.

Предложенный и обоснованный А. Н. Филатовым метод замораживания для систем интегродифференциальных уравнений (ИДУ) стандартного вида [1—4] применяется для систем ИДУ, встречающихся в динамических задачах вязкоупругости. Предлагается численный метод для систем ИДУ, основанный на использовании квадратурных формул. Для сравнения этого метода с другими известными методами (метод усреднения, метод замораживания) рассматривается конкретный пример. Далее методом замораживания в сочетании с численным методом Рунге — Кутта исследуется задача о продольных колебаниях вязкоупругого стержня в физически нелинейной постановке.