

УДК 539.375

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О ТРЕЩИНАХ, ВЫТЯНУТЫХ ВДОЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

Гольдштейн Р. В., Корельштейн Л. Б.

Асимптотическими методами решается класс пространственных задач теории упругости о трещинах, вытянутых вдоль гладкой пространственной кривой. Построены два первых члена асимптотики скачков смещений и коэффициентов интенсивности напряжений, исследуется их зависимость от геометрии трещины. В качестве примера рассматривается задача о кольцевой трещине по цилиндрической поверхности, приводятся результаты ее асимптотического решения при разных видах нагрузок, в том числе с учетом налегания берегов.

Аналогичные более простые задачи о трещинах, вытянутых вдоль плоской кривой, рассмотрены в [1, 2].

1. Общие уравнения для вытянутой трещины. Рассмотрим однородное изотропное безграничное упругое пространство, содержащее трещину, вытянутую вдоль гладкой пространственной кривой $\mathbf{R} = \mathbf{R}(l)$, $l \in [-L, L]$ (последняя может быть замкнутой: $\mathbf{R}(-L) = \mathbf{R}(L)$). Введем касательный, нормальный и бинормальный орты $\mathbf{t}(l)$, $\mathbf{v}(l)$, $\mathbf{b}(l)$ к кривой \mathbf{R} , удовлетворяющие соотношениям Френе (штрих означает производную по l)

$$(1.1) \quad \mathbf{R}' = \mathbf{t}, \quad \mathbf{t}' = k\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}' = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{v}$$

где k , τ — кривизна и кручение кривой \mathbf{R} .

Допустимые формы трещин определим соотношениями

$$(1.2) \quad |l| \leq L, \quad |m_1| \leq \rho(l), \quad m_2 = 0$$

где координаты (m_1, m_2, l) задаются равенством

$$(1.3) \quad \mathbf{x}(m_1, m_2, l) = \mathbf{R} + \varepsilon [m_1 \boldsymbol{\alpha}^1(l) + m_2 \boldsymbol{\alpha}^2(l)]$$

ε — положительный малый параметр; ортонормированная тройка векторов $\boldsymbol{\alpha}^i(l)$ ($i = 1, 2, 3$) получается из тройки $\mathbf{v}(l)$, $\mathbf{b}(l)$, $\mathbf{t}(l)$ поворотом вокруг $\mathbf{t}(l)$ на угол $\varphi(l)$:

$$\boldsymbol{\alpha}^1 = \mathbf{v} \cos \varphi + \mathbf{b} \sin \varphi, \quad \boldsymbol{\alpha}^2 = -\mathbf{v} \sin \varphi + \mathbf{b} \cos \varphi, \quad \boldsymbol{\alpha}^3 = \mathbf{t}$$

функции $\rho(l)$ и $\varphi(l)$ достаточно гладкие, причем $\rho/L = O(1)$. Для незамкнутых трещин будем также требовать, чтобы $\rho(L) = \rho(-L) = 0$ (для замкнутых просто $\rho(L) = \rho(-L)$).

Заданная соотношениями (1.2) трещина представляет собой при малых ε узкую полоску прямолинейного сечения, вытянутую вдоль средней линии $\mathbf{R}(l)$, причем функции $\rho(l)$ и $\varphi(l)$ описывают соответственно изменение ширины трещины и ее ориентации относительно сопровождающего трехгранника \mathbf{t} , \mathbf{v} , \mathbf{b} . В частности, допускаются поворот, изгибание и закручивание поверхности трещины. При этом орты $\boldsymbol{\alpha}^3$ и $\boldsymbol{\alpha}^1$ задают продольное и поперечное направления на поверхности трещины, а $\boldsymbol{\alpha}^2$ — направление нормали к поверхности трещины на ее средней линии (при $m_1 = 0$). Тройка векторов $\boldsymbol{\alpha}^i$ при движении вдоль \mathbf{R} поворачивается по следующему

закону (который легко получить из (1.1)):

$$\alpha^{i'} = \mathbf{A} \times \alpha^i, \quad \mathbf{A} = A_i \alpha^i, \quad A_1 = k \sin \varphi, \quad A_2 = k \cos \varphi, \\ A_3 = \tau + \varphi'$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование). Компоненты $A_i(l)$ ($i = 1, 2, 3$) имеют смысл соответственно скоростей изгиба, поворота «в своей плоскости» и закручивания поверхности трещины.

Введенный выше класс трещин включает в себя ряд трещин на пространственных поверхностях, например вдоль дуг окружностей цилиндра или конуса, трещины вдоль винтовой линии и др., а также все рассматривавшиеся ранее плоские в плане, вытянутые трещины [1, 2].

Предположим, что на бесконечности нагрузка отсутствует, а к поверхностям трещины приложены усилия

$$\mathbf{p}^+(\mathbf{x}) = -\mathbf{p}^-(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_\varepsilon$$

где знаки плюс и минус относятся к «верхней» и «нижней» поверхностям, ограничивающим соответственно области $m_2 > 0$ и $m_2 < 0$. (Указанные краевые условия, как известно, соответствуют задаче о возмущении трещиной внешнего упругого поля в пространстве без трещины.) Определение упругих полей сводится к отысканию скачка смещений $\kappa(\mathbf{x})$ на поверхности трещины

$$(1.4) \quad \kappa(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^+(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^-(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_\varepsilon$$

Найдем асимптотику скачка смещений на поверхности трещины при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in G_\varepsilon$) — вектор нормали к поверхности G_ε

$$(1.5) \quad \mathbf{n}(m_1, l) = [d\mathbf{x}/dl \times \alpha^1(l)] / |d\mathbf{x}/dl \times \alpha^1(l)| = \\ = \alpha^2(l) - \varepsilon m_1 A_3(l) \alpha^3(l) + o(\varepsilon) \\ \mathbf{p}(m_1, m_2, l) = -\sigma_{ij}(m_1, m_2, l) n_j(m_1, l) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{p}(m_1, 0, l) = \mathbf{p}(m_1, l)$$

\mathbf{p} — вектор усилия.

Тогда ([3], формулы (12), (10)) из формулы Сомилианы следует, что

$$(1.6) \quad p_m(x) = \beta \{ (1 - \nu) n_s(x) [\varphi_{(mi)}(x),_{is} + \varphi_{(is)}(x),_{im}] + \\ + 2\nu [n_s(x) \varphi_{ii}(x),_{sm} + n_m(x) \varphi_{is}(x),_{is}] - n_s(x) \psi_{it}(x),_{istm} \} \\ \beta = 4\pi\mu^{-1} (1 - \nu), \quad \mathbf{x} \in G_\varepsilon$$

где μ , ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона среды; по индексам в круглых скобках проводится симметризация, а гармонический и би-гармонический потенциалы φ_{ij} и ψ_{ij} определяются формулами

$$(1.7) \quad \varphi_{ij}(x) = \iint_{G_\varepsilon} \kappa_i(x') n_j(x') |\Delta x|^{-1} dx', \quad \psi_{ij}(x) = \iint_{G_\varepsilon} \kappa_i(x') n_j(x') |\Delta x| dx' \\ \Delta x = x' - x, \quad \mathbf{x} \in G_\varepsilon$$

Найдем асимптотику интегродифференциального оператора, действующего на $\kappa(\mathbf{x})$ в (1.6), вблизи трещины в координатах m_1, m_2, l ($m_2 \neq 0$), а затем, устремляя $m_2 \rightarrow 0$, получим из (1.6) асимптотическое уравнение на $\kappa(m_1, l, \varepsilon)$. Очевидно, главный член асимптотики оператора должен соответствовать операторам плоской и антиплоской задач. Поэтому, если обозначить через p характерную величину нагрузки $|\mathbf{p}(m_1, l)|$, главный член раскрытия κ должен иметь порядок $\varepsilon p(l) p / \mu \sim \varepsilon L p / \mu$.

Определим, в каком порядке (по сравнению с главным членом асимптотики) сказывается взаимное влияние различных частей трещины (на-

ходящихся на расстоянии $\sim L$). После подстановки (1.7) в (1.6) и дифференцирования ядра интегралов в этом случае имеют порядок $\mu |\Delta x|^{-3} \sim \mu L^{-3}$ и интегрирование по области с площадью $\sim \varepsilon_0 L \sim \varepsilon L^2$ дает величину порядка $\varepsilon L^{-3} \times \varepsilon L^2 \times \varepsilon L p / \mu = \varepsilon^2 p$ — на два порядка меньше заданной нагрузки. Следовательно, взаимовлияние частей трещины должно сказываться лишь в 3-м члене асимптотики κ (по степеням ε). В данной работе ограничимся в общем случае отысканием двух первых членов асимптотики κ , которые в силу изложенного выше должны быть «локальными», т. е. зависеть в каждом сечении трещины $l = l_0$ только от геометрии и нагрузки в окрестности этого сечения.

Учитывая, что

$$\psi_{it}(\mathbf{x}),_{it} = \varphi_{ii} - \psi^*(\mathbf{x}), \quad \psi^*(\mathbf{x}) = \iint_{G_\varepsilon} (\Delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}')) (\Delta \mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}')) |\Delta \mathbf{x}|^{-1} d\mathbf{x}'$$

соотношение] (1.6) можно записать в виде

$$(1.8) \quad p_m = \beta \{ (1 - \nu) n_s [\varphi_{(mt), ts} + \varphi_{(st), tm}] + 2\nu n_m \varphi_{st, st} - \\ - (1 - 2\nu) n_s \varphi_{ii, sm} + n_s \psi_{, sm}^* \}, \quad \mathbf{x} \in G_\varepsilon$$

Как видно из (1.8), необходимо найти асимптотическое разложение φ_{ij} , ψ^* и оператора $\partial^2 / \partial x_i \partial x_j$ в координатах m_1, m_2, l при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для последнего можно показать, что

$$(1.9) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \varepsilon^{-2} \alpha_i^s \alpha_j^t \frac{\partial^2}{\partial m_s \partial m_t} + \varepsilon^{-1} \left[(-1)^{s+1} m_{3-s} A_3 a_{ij}^t \frac{\partial^2}{\partial m_s \partial m_t} + \right. \\ \left. + a_{ij}^t \frac{\partial^2}{\partial m_t \partial l} + (-1)^t (A_{3-t} \alpha_i^3 \alpha_j^3 - A_3 a_{ij}^t) \frac{\partial}{\partial m_t} \right] + O(1), \\ a_{ij}^t = \alpha_i^t \alpha_j^3 + \alpha_j^t \alpha_i^3$$

где s и t пробегает значения 1, 2.

Асимптотика интегралов φ_{ij} и ψ^* вычисляется с использованием составных асимптотических разложений подынтегральных функций аналогично [1, 2]. Эта асимптотика имеет довольно громоздкий вид; приведем только те ее члены, которые необходимы для вычисления первых двух членов асимптотики κ :

$$(1.10) \quad \varphi_{ij}(\mathbf{x})/\varepsilon = -\alpha_j^2 L_i(1) + \varepsilon [A_3 \alpha_j^3 L_i(m_1') + 1/2 A_3 \alpha_j^2 L_i(g_s)] + \\ + \varphi_{ij}^0(l) + \varepsilon \varphi_{ij}^1(m_1, m_2, l) + o(\varepsilon) \\ \psi^*(\mathbf{x})/\varepsilon = 2\alpha_i^3 K_i(g_s g_2) + \varepsilon [\alpha_i^3 \partial L_i(g_2)/\partial l - A_3 \alpha_i^3 L_i(g_1) - \\ - 2A_3 \alpha_i^3 K_i(m_1' g_2^2) + 1/2 A_s \alpha_i^3 L_i(g_s) + (-1)^s \alpha_i^t K_i(g_s g_t g_2)] + \\ + \psi_0^*(l) + \varepsilon \psi_1^*(m_1, m_2, l) + o(\varepsilon) \\ g_1 = m_1 - m_1', \quad g_2 = m_2; \quad \kappa_i = \kappa_i(m_1', l), \quad \forall f(m_1, m_1', m_2) \\ L_i(f) = \int \kappa_{if} \ln(g_1^2 + m_2^2) dm_1', \quad K_i(f) = \int \kappa_{if} (g_1^2 + m_2^2)^{-1} dm_1'$$

Здесь интегрирование ведется от $-\rho(l)$ до $\rho(l)$, φ_{ij}^0, ψ_0^* не зависят от m_1, m_2 , φ_{ij}^1, ψ_1^* зависят от m_1, m_2 линейно (эти слагаемые исчезнут при вычислении первых двух членов асимптотики при дифференцировании по формуле (1.8) с учетом (1.9)); s и t пробегает значения 1, 2.

Предполагая, что

$$(1.11) \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^0(m_1, l) + \varepsilon \mathbf{p}^1(m_1, l) + o(\varepsilon), \quad \mathbf{x} \in G_\varepsilon$$

и учитывая (1.8) и вид асимптотик (1.9), (1.10), ищем асимптотику $\kappa(m_1, l, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$(1.12) \quad \kappa(m_1, l, \varepsilon) = \varepsilon [\kappa^0(m_1, l) + \varepsilon \kappa^1(m_1, l) + o(\varepsilon)]$$

Подставляя асимптотики (1.9)–(1.12) в (1.8), определяя пределы интегралов K и L при $m_2 \rightarrow 0$ (для этого последние выражаются через свертки обобщенных функций, зависящих от параметра m_2) и приравнивая члены одного порядка по ε , получим интегродифференциальные уравнения для κ^0, κ^1 . При их записи будем использовать ортонормированную тройку зависящих от ε векторов $\gamma^1(m_1, l) = \alpha^1(m_1, l)$, $\gamma^2(m_1, l) = \mathbf{n}(m_1, l)$, $\gamma^3(m_1, l) = \gamma^1 \times \gamma^2$, определяющих в каждой точке поверхности трещины соответственно поперечное, нормальное к поверхности и продольное направления. (Заметим, что из-за закручивания трещины, вообще говоря, $\gamma^2(m_1, l) \neq \alpha^2(l)$ и $\gamma^3(m_1, l) \neq \alpha^3(l)$ при $m_1 \neq 0$.)

Если ввести величины $\kappa_i^0(m_1, l)$, $\kappa_i^1(m_1, l)$ так, что

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \kappa(m_1, l, \varepsilon) &= \varepsilon [\kappa_i^0(m_1, l) + \varepsilon \kappa_i^1(m_1, l)] \gamma^i(m_1, l) + o(\varepsilon^2) \\ \text{т. е. } \kappa_i^0 &= (\kappa^0, \alpha^i) \text{ и } \kappa_i^1 = (\kappa^1, \alpha^i), \kappa_j^1 = \\ &= (\kappa^1, \alpha^j) - (-1)^j \varepsilon m_1 A_3 (\kappa^0, \alpha^{5-j}) \quad (j=2, 3), \end{aligned}$$

и аналогичным образом — величины $p_i^0(m_1, l)$, $p_i^1(m_1, l)$, то искомые интегродифференциальные уравнения запишутся в виде

$$(1.14) \quad \begin{aligned} 2(1 - \nu \delta_{i3}) P(\kappa_i^0)_{, m_1 m_1} &= \beta p_i^0 \\ 2(1 - \nu \delta_{i3}) P(\kappa_i^1)_{, m_1 m_1} &= \beta p_i^1 + H_{ij}(\kappa_j^0) \end{aligned}$$

где операторы P и H_{ij} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= \int_{-\rho(l)}^{\rho(l)} \varphi(m_1', l) \ln |m_1 - m_1'| dm_1' \\ H_{ii} &= (1 - \nu \delta_{i3}) A_2 P_{, m_1}, \quad H_{12} = -H_{21} = (1 - 4\nu) A_1 P_{, m_1} \\ H_{23} &= -H_{32} = -2A_3 P_{, m_1}, \quad H_{13} = -H_{31} = -2\nu P_{, m_1 l} \end{aligned}$$

Полученные соотношения (1.14) при $m_1 \ll \rho(l)$ представляют собой, как и следовало ожидать, уравнения плоской и антиплоской задач для прямолинейной трещины и могут быть последовательно решены в квадратурах. В частном случае плоской в плане трещины ($\varphi = \tau = A_1 = A_3 = 0$) уравнения (1.14) совпадают (с точностью до рассматриваемого порядка) с полученными ранее уравнениями [1, 2]. В соответствии со сказанным ранее уравнения (1.14) обладают свойством «локальности».

Можно проверить также (используя (1.14) и симметричность или антисимметричность интегродифференциальных операторов $P_{, m_1}, P_{, m_1 m_1}, P_{, m_1 l}$ в смысле скалярного произведения в $L_2(G)$, что вид операторов H_{ij} (в частности, коэффициенты $(1 - \nu \delta_{i3}) A_2$ в диагональных членах, а также симметрия (антисимметрия) недиагональных членов) обеспечивает справедливость теоремы Бетти в первых двух членах асимптотики. Это дополнительно подтверждает правильность уравнений (1.14).

Представляя (аналогично [1, 2]) решение уравнений (1.14) в виде

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \kappa &= 2\varepsilon (1 - \nu + \nu \delta_{i3}) \mu^{-1} \sqrt{\rho^2(l) - m_1^2} Q_i(l, m_1, \varepsilon) \gamma^i(m_1, l) + \\ &+ o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

для коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) нормальной, поперечной и продольной мод $K_1^\pm, K_2^\pm, K_3^\pm$ получаем

$$(1.16) \quad \begin{aligned} K_1^\pm / K^0 &= Q_2^\pm + o(\varepsilon), \quad K_2^\pm / K^0 = \pm Q_1^\pm - \varepsilon (1 - \nu)^{-1} \rho' Q_3^\pm + o(\varepsilon), \\ K_3^\pm / K^0 &= \pm Q_3^\pm + \varepsilon (1 - \nu) \rho' Q_1^\pm + o(\varepsilon), \quad K_i^\pm = K_i(\pm \rho(l), l, \varepsilon), \\ Q_i^\pm &= Q_i(\pm \rho(l), \varepsilon) \quad K^0 = \sqrt{\pi \varepsilon \rho(l)} \end{aligned}$$

Появление в (1.16) членов с $\rho'(l)$ вызвано тем, что для трещины с изменяющейся шириной ($\rho'(l) \neq 0$) направление вдоль контура трещины не совпадает с направлением вектора $\gamma^3 (\pm \rho(l), l)$.

Исходя из соотношений (1.14), (1.16) и учитывая геометрический смысл величин A_i , можно качественно описать зависимость скачков смещений и КИН от «локальных» параметров геометрии и нагрузки: изменение нагрузки и ширины трещины при движении вдоль трещины приводит к взаимодействию продольной и поперечной мод; поворот трещины в своей плоскости — к перераспределению скачков смещений и коэффициентов интенсивности напряжений по сечению трещины (отдельно для каждой моды); изгибание поверхности — к взаимодействию нормальной и поперечной мод; закручивание поверхности — к взаимодействию продольной и поперечной мод.

Приведем асимптотические формулы скачков смещений и КИН для некоторых типичных случаев нагрузок. Согласно (1.15), (1.16), для этого достаточно дать выражения для Q_i .

Трещина под действием внутреннего давления p . В этом случае $p(m_1, l) = p n(m_1, l)$ и из (1.20), (1.21) получаем

$$(1.17) \quad Q_1 = 1/4 (1 - 4\nu) A_1^*, \quad Q_2 = p + 1/4 A_2^*, \quad Q_3 = 1/2 A_3^*, \quad A_i^* = \varepsilon p m_1 A_i$$

Таким образом (в отличие от плоской в плане трещины), под действием внутреннего давления возникают не только нормальные, но и сдвиговые скачки смещений, причем величина и даже знак поперечных скачков смещения из-за наличия в (1.17) множителя $(1 - 4\nu)$ существенно зависит от коэффициента Пуассона ν .

Трещина с ненагруженными берегами в поле напряжений, вызванном некоторыми нагрузками на бесконечности. В этом случае напряженно-деформированное состояние упругой среды представляется в виде суммы двух упругих решений: напряженно-деформированного состояния при отсутствии трещины (с тензором напряжений $\sigma^\infty(x)$ и возмущения, вызываемого приложенными к берегам трещины усилиями $p = \sigma^\infty n$). Учитывая, что при $x \in G_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \sigma^\infty(x) &= \sigma^\infty(R(l) + \varepsilon m_1 \alpha^1(l)) = \sigma^\infty(R(l)) + \varepsilon m_1 \sigma_{,1}^\infty(R(l)) + o(\varepsilon) \\ p(x) &= \sigma^\infty(R(l)) \alpha^2(l) + \varepsilon m_1 \sigma_{,1}^\infty(R(l)) \alpha^2(l) - \varepsilon m_1 A_3 \sigma^\infty(R(l)) \alpha^3(l) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

(где производные берутся в местной декартовой системе координат, определяемой ортами $\alpha^i(l)$), из (1.16), (1.17) получаем

$$(1.18) \quad \begin{aligned} Q_i(m_1, l, \varepsilon) &= \sigma_{2i}^\infty(R(l)) + 1/2 \varepsilon m_1 Q_i^*(l) \\ Q_1^*(l) &= \sigma_{12,1}^\infty - \nu (1 - \nu)^{-1} \sigma_{23,3}^\infty + 1/2 (1 - 4\nu) A_1 \sigma_{22}^\infty - A_3 \sigma_{33}^\infty \\ Q_2^*(l) &= \sigma_{22,1}^\infty + 1/2 A_2 \sigma_{22}^\infty - 1/2 A_2 \sigma_{12}^\infty + 1/2 (1 - 4\nu) A_1 \sigma_{12}^\infty - A_3 [\sigma_{33}^\infty + \\ &+ (2 - \nu) (1 - \nu)^{-1} \sigma_{23}^\infty] \\ Q_3^*(l) &= \sigma_{23,1}^\infty - \nu \sigma_{12,3}^\infty + 1/2 A_2 \sigma_{23}^\infty + A_3 (2 \sigma_{22}^\infty - \sigma_{33}^\infty) \end{aligned}$$

В последних трех равенствах значения компонент напряжений и их производных вычисляются в точке $R(l)$.

Если внешнее поле напряжений однородно ($\sigma^\infty(x) = \sigma^\infty = \text{const}$), имеем

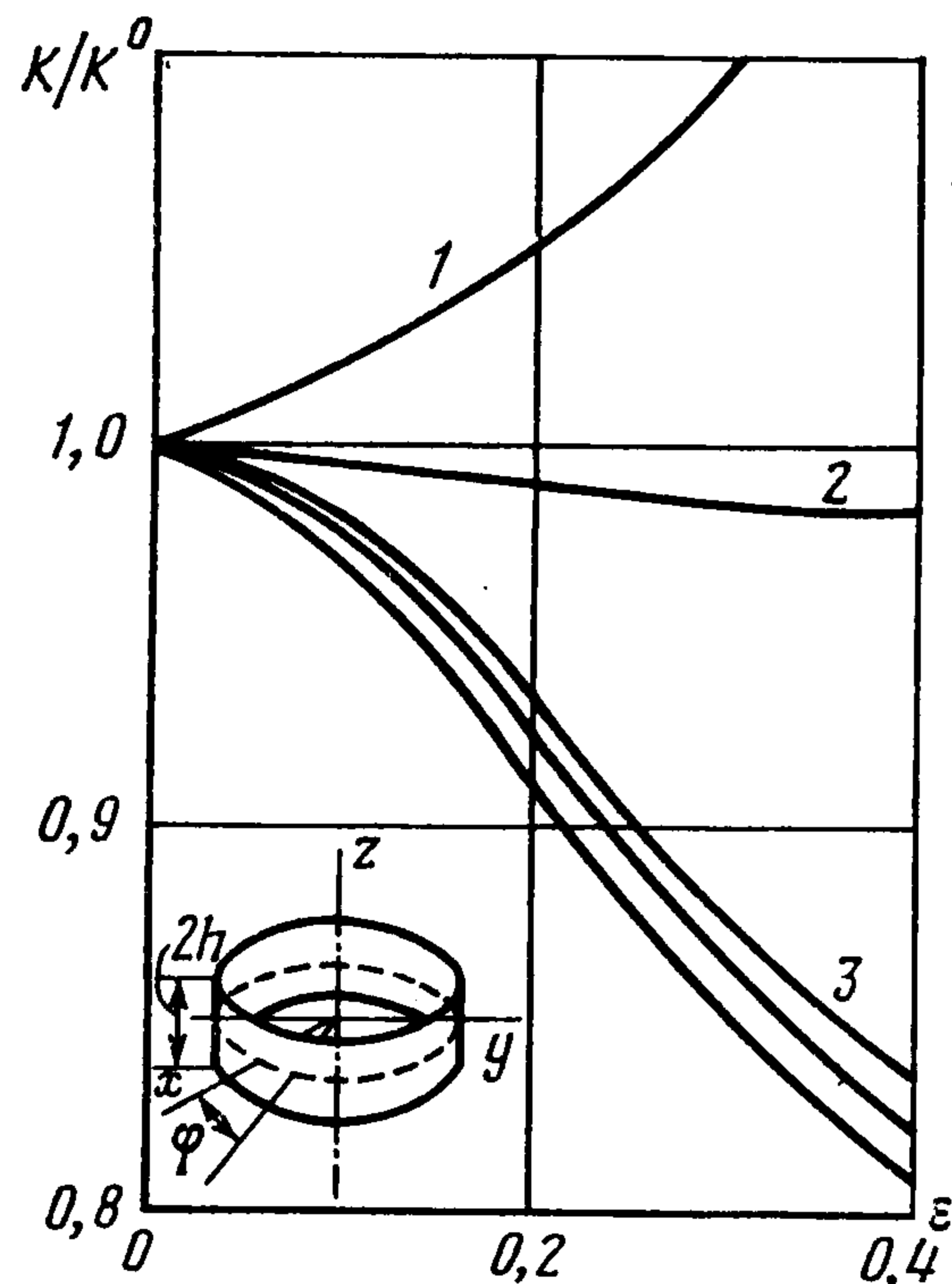
$$(1.19) \quad \begin{aligned} Q_1^* &= 1/2 (1 - \nu)^{-1} \{ (1 - 3\nu) A_2 \sigma_{12}^\infty + (1 - 3\nu + 4\nu^2) A_1 \sigma_{22}^\infty - \\ &- 2\nu A_1 \sigma_{33}^\infty + 2A_3 [\nu \sigma_{13}^\infty - (1 - \nu) \sigma_{33}^\infty] \} \\ Q_2^* &= 1/2 A_2 \sigma_{22}^\infty - 1/2 (1 - 4\nu) A_2 \sigma_{12}^\infty - A_3 [\sigma_{33}^\infty + (2 - \nu) (1 - \nu)^{-1} \sigma_{23}^\infty] \\ Q_3^* &= 1/2 (1 + 2\nu) A_2 \sigma_{23}^\infty - \nu A_1 \sigma_{13}^\infty + A_3 [\nu \sigma_{11}^\infty + (2 - \nu) \sigma_{22}^\infty - \sigma_{33}^\infty] \end{aligned}$$

Формулы (1.18), (1.19) показывают, в частности, что при закручивании поверхности трещины на скачки смещений и КИН начинают оказывать влияние и компоненты σ_{13}^∞ , σ_{11}^∞ , σ_{33}^∞ внешнего напряжения, которые не возмущают плоские в плане трещины.

2. Осесимметричная задача о трещине по цилиндрической поверхности. Для проверки полученных выше асимптотических формул и уточнения влияния кривизны поверхности трещины на напряженно-деформированное состояние была более подробно рассмотрена задача об осесимметричной трещине по цилиндрической поверхности под действием осесимметричных нагрузок (фигура). В цилиндрической системе координат r, φ, z поверхность трещины определяется соотношениями $|z| < h, r = R$, при этом

$$k(l) = 1/R, \rho(l) = R, \varepsilon = h/R, A_1(l) = k(l), A_2 = A_3 = 0$$

$$m_1 = z\varepsilon^{-1}, \alpha^1 = e_z, \alpha^2 = e_r, \alpha^3 = e_\varphi$$



компоненты нагрузок $p_1 = p_z, p_2 = p_r, p_3 = p_\varphi$ и скачков смещений $\kappa_1 = \kappa_z, \kappa_2 = \kappa_r, \kappa_3 = \kappa_\varphi$ считаются зависящими только от координаты z . В этом случае, проводя интегрирование по φ в (1.7) и устремляя в (1.6) $r \rightarrow R$, можно получить точные одномерные интегродифференциальные уравнения задачи. Основная, наиболее громоздкая часть вычислений при выводе указанных уравнений осуществлялась с использованием ЭВМ при помощи алгоритмического языка REDUCE-3, позволяющего проводить алгебраические преобразования в символьном виде. В результате получаются уравнения следующего вида (интегрирование по z' ведется в пределах от $-h$ до h):

$$(2.1) \quad \int K_{33}(z-z') \kappa_3'(z') dz' = 2\pi D \mu^{-1} p_3(z)$$

$$\int K_{ij}(z-z') \kappa_j'(z') dz' = \frac{D}{2} \beta p_i(z) \quad (i, j=1, 2)$$

$$K_{11}(z) = [(\zeta^{-1} - \zeta) E + \zeta K] \zeta_1, \quad K_{33}(z) = [(\zeta^{-1} + 16\zeta) E - 8\zeta K + 16\zeta^3 (E - K)] \zeta_1^3$$

$$K_{22}(z) = \{[\zeta^{-1} + (11 - 16\nu) \zeta + (28 - 32\nu) \zeta^3] E + [(1 + 8\nu) \zeta - (16 - 24\nu) \zeta^3] K + 16(1 - \nu) \zeta^5 (E - K)\} \zeta_1^3$$

$$K_{21}(z) = -K_{12}(z) = \{[4 - 8\nu + (14 - 16\nu) \zeta^2] E - [1 - 4\nu + (10 - 12\nu) \zeta^2] K + 8(1 - \nu) \zeta^4 (E - K)\} \zeta_1^3$$

$$D = 2R, \quad \zeta = z/D, \quad \zeta_1 = 1 / \sqrt{1 + \zeta^2}$$

($K = K(\zeta_1), E = E(\zeta_1)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода).

Сравнивая уравнения (2.1) и асимптотические уравнения, получающиеся для данного случая из (1.14), видим, что они полностью согласуются. Кроме того, как и следовало ожидать из соображений симметрии, задачи для нормально-поперечной и продольной нагрузок разделились.

Уравнения (2.1) для частного случая кольцевой трещины при осесимметричных нагрузках позволяют уточнить асимптотики решения (1.15), (1.16) при малых ε , построив соответствующие степенные разложения (по ε) с любым количеством членов. Для этого достаточно перейти в (2.1) к переменной m_1 , разложить левую и правую части по ε , приравнять члены

одинакового порядка и последовательно решить полученные интегродифференциальные уравнения.

Описанным способом с использованием ЭВМ были получены асимптотики скачков смещений и КИН для узких трещин для ряда видов нагрузок, имеющие вид разложений по четным или нечетным степеням ε с коэффициентами, зависящими от $\lambda = \ln(16/\varepsilon)$, ν и $M = m_1/R$ (в явном виде получено от трех до пяти членов асимптотики). Уравнения (2.1) решались также численно методом механических квадратур. При сравнении результатов, полученных численно и рассчитанных по асимптотическим формулам, расхождения в диапазоне $0 \leq \varepsilon \leq 0,3$ составили не более 1—2%, что указывает на высокую точность асимптотических формул. Наблюдается также хорошее согласие полученных результатов с приведенными в [4] (расхождение не более 2—3%, что находится в пределах точности расчетов).

Опишем поведение КИН (определенное в результате расчетов) для некоторых видов нагрузок.

В случае постоянной продольной нагрузки $p_\varphi(z) = p_\varphi = \text{const}$ безразмерный КИН K_3/K_3^0 ($K_3^0 = p_\varphi \sqrt{\pi h}$) существенно возрастает с ростом ε (фигура, кривая 1). При нагружении постоянным внутренним давлением $p_r(z) = p_r = \text{const}$ ($p_z(z) = 0$) коэффициент K_1/K_1^0 ($K_1^0 = p_r \sqrt{\pi h}$) с увеличением ε , напротив, убывает, причем тем быстрее, чем больше ν (фигура, кривые 3; верхняя, средняя и нижняя кривые соответствуют $\nu = 0,1, 0,3$ и $0,5$). При этом K_2/K_1^0 много меньше единицы, возрастает по абсолютной величине с увеличением ε и существенно зависит от ν (что согласуется с (1.17)).

В случае постоянной нагрузки по z , решая уравнения (2.1) относительно κ_r, κ_z при заданных $p_z(z) = p_z = \text{const}$, $p_r(z) = 0$, получим ненулевое раскрытие κ_r , являющееся нечетной функцией по z , а следовательно, отрицательное в некоторой области; такое решение имеет физический смысл, только если трещина была предварительно раскрыта или нагружена дополнительным раскрывающим воздействием (в противном случае необходимо учитывать взаимодействие налегающих берегов трещины). Интересно отметить, что для рассматриваемого решения K_2/K_2^0 ($K_2^0 = p_z \sqrt{\pi h}$) практически не зависит от ε и ν (фигура, кривая 2).

Построим приближенное решение для случая постоянной нагрузки по z с учетом налегания берегов трещин в предположении отсутствия трения между ними. Задача при этом ставится следующим образом: требуется найти при $|z| \leq h$ функции $\kappa_r(z)$, $\kappa_z(z)$, $p_r(z)$, удовлетворяющие первым двум уравнениям (2.1) (с $p_z(z) = p_z = \text{const}$) и условиям

$$(2.2) \quad \kappa_r(z) \geq 0, \quad p_r(z) \geq 0, \quad \kappa_r(z) p_r(z) = 0$$

(Нормальное усилие $p_r(z)$ возникает из-за налегания берегов.) Приближенное решение при малых ε ищем в виде

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \kappa_z(m_1, \varepsilon) &= \varepsilon [\kappa_z^0(m_1) + \varepsilon^2 \kappa_z^2(m_1) + o(\varepsilon^2)] \\ p_r(m_1, \varepsilon) &= \varepsilon p_r^1(m_1) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Положение зоны налегания зависит от знаков p_z и $1-4\nu$, далее для определенности будем считать $p_z > 0$ и $\nu > 0,25$ (для остальных случаев приближенное решение строится аналогично). Уравнения (1.14), (2.2), (2.3) дают

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \kappa_z^0 &= 2(1-\nu) \mu^{-1} p_z^0 \sqrt{R^2 - m_1^2} \\ 2P(\kappa_r^1), m_1 m_1 &= \beta p_r^1 - \beta p_z (1-4\nu) m_1 / (2R) \\ \kappa_r^1 &\geq 0, \quad p_r^1 \geq 0, \quad \kappa_r^1 p_r^1 = 0 \end{aligned}$$

Второе и третье соотношения (2.4) определяют задачу о плоской прямолинейной трещине с налеганием берегов, решение которой, как известно, единственно. Это решение несложно отыскать исходя из предположения, что область налегания представляет собой отрезок $[-R, a]$. Тогда $\kappa_r^1(m_1) = 0$ при $m_1 \in [-R, a]$, $p_r^1(m_1) = 0$ при $m_1 \in [a, R]$ и из второго уравнения (2.4), рассматриваемого на $[a, R]$, находим κ_r^1 на

$[a, R]$, а затем из того же уравнения $-p_r^1$ на $[-R, a]$. Остается отыскать такое a , чтобы удовлетворялись два неравенства (2.4). Таким значением оказывается $a = -R/3$, при этом

$$(2.5) \quad \kappa_r^1 = \begin{cases} -(1-\nu)\mu^{-1}(1-4\nu)R^{-1}(m_1 + R/3)^{3/2}(R - m_1)^{3/2}, & -R/3 \leq m_1 \leq R \\ 0, & -R \leq m_1 \leq -R/3 \end{cases}$$

$$p_r^1 = \begin{cases} 0, & -R/3 \leq m_1 \leq R \\ -1/2 p_z (1-4\nu)R^{-1}(2R/3 - m_1)\sqrt{(R/3 + m_1)/(m_1 - R)}, & -R \leq m_1 \leq -R/3 \end{cases}$$

С использованием (2.5) и (2.1) получаем

$$\kappa_z^2 = 1/16(1-\nu)\mu^{-1}p_z\sqrt{R^2 - m_1^2}\{2M^2 - 6\lambda + 15 + 4(1-4\nu)^2u\}$$

$$u = \begin{cases} \frac{4}{27} \left[\arccos \frac{3M-1}{2} - \arccos M \right] + \frac{2-M-3M^2}{9} \times \\ \times \sqrt{(1-M)\left(M + \frac{1}{3}\right)}, & -\frac{1}{3} \leq M \leq 1 \\ \frac{4}{27}(\pi - \arccos M), & -1 \leq M \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{K_1}{K_2^0} = \begin{cases} -(1-4\nu)\sqrt{2/27}\varepsilon + o(\varepsilon), & z = h \\ 0, & z = -h \end{cases}$$

$$\frac{K_2^\pm}{K_2^0} = \pm \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left[-\frac{3}{16}\lambda + \frac{17}{32} \mp \frac{(1-4\nu)^2}{54} \right] + o(\varepsilon^2) \right\}$$

Внешняя нагрузка в задаче не зависит от z , поэтому удельное приращение полной потенциальной упругой энергии среды $\delta W/\delta S$ при увеличении ширины трещины $2h$ не зависит от того, в результате продвижения какого контура ($z = h$ или $z = -h$) оно достигнуто. Следовательно, в соответствии с формулой Ирвина величина $\delta W/\delta S$ одинакова на контурах $z = \pm h$ и равна

$$\delta W/\delta S = (1-\nu)\mu^{-1}(K_2^0)^2 \{1 + \varepsilon^2[-3\lambda/8 + 17/16 + (1-4\nu)^2/27] + o(\varepsilon^2)\}$$

Отметим в заключение, что действие на берега трещины даже небольшого дополнительного внутреннего давления $p = \varepsilon K_p p_z$ приводит к изменению области налегания. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем, что область налегания определяется неравенствами $-1 \leq M \leq K$, где $K = -1/3 - 8K_p/[3(4\nu - 1)]$, а для раскрытия имеем

$$\kappa_r \approx \begin{cases} 1/2(1-\nu)\mu^{-1}(4\nu-1)p_z h \sqrt{1-M}(M-K)^{3/2}, & K \leq M \leq 1 \\ 0, & -1 \leq M \leq K \end{cases}$$

При $p > \varepsilon K_p p_z$, $K_p^1 = \nu - 1/4$ трещина полностью раскрыта, при $p < \varepsilon K_p p_z$, $K_p^2 = -2(\nu - 1/4)$ — полностью закрыта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р. В., Канцов А. В., Корельштейн Л. Б. Асимптотическое решение пространственных задач теории упругости о вытянутых плоских трещинах отрыва // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 854—863.
2. Корельштейн Л. Б. Асимптотическое решение пространственных задач теории упругости о вытянутых плоских трещинах сдвига // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 835—843.
3. Sladek V., Sladek J. Zabrivaná priestorová trhlinka v pružnom priestore // Staveb. Cas. 1983. V. 31. Č. 4. P. 283—297.
4. Kasano H., Matsumoto H., Nakahara I. A torsion-free axisymmetric problem of a cylindrical crack in a transversely isotropic body // Bull. JSME. 1984. V. 27. No. 229. P. 1323—1332.