Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 539.3

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ КРУГОВЫХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СРЕД С ДИАМЕТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Соловьев А. И.

Предлагается метод решения краевых задач теории упругости для круговых кусочно-однородных сред с симметричной диаметральной трещиной, основанный на применении векторных соотношений между базисными решениями уравнений равновесия в полярных и эллиптических координатах. Реализация этого метода приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами.

Рассмотрена задача о равновесии двухкомпонентной кусочно-однородной плоскости с симметричной диаметральной трещиной во внутренней однородной области. Разложением по малому параметру получены асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности напряжений.

1. Эллиптические координаты связаны с декартовыми координатами формулами

$$x = a \operatorname{ch} \xi \cos \theta, \quad y = a \operatorname{sh} \xi \sin \theta \quad (0 \leqslant \xi < \infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad a > 0)$$

Уравнение $\xi = \text{const}$ определяет семейство эллипсов с фокусами в точках $y = 0$, $x = \pm a$. В предельном случае $\xi = 0$ эллипсы вырождаются в фокальный отрезок $y = 0$, $|x| \leqslant a$.

Векторное уравнение равновесия Ламе для однородного изотропного тела имеет вид

$$\frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор упругих перемещений, ν — коэффициент Пуассона. В уравнении (1.1) опущены объемные силы (при наличии общего решения однородного уравнения Ламе они учитываются без особых затруднений). Все приводимые здесь формулы отвечают случаю плоской деформации. В случае обобщенного плоского напряженного состояния коэффициент Пуассона ν следует заменить величиной $\nu/(1 + \nu)$.

Базисные периодические решения уравнения (1.1) в эллиптических и полярных координатах можно представить в виде комплекснозначных вектор-функций

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1,n}^{(e)} &= \operatorname{ch} n (\xi + i\theta) (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{u}_{2,n}^{(e)} &= (y \operatorname{grad} - \varkappa \mathbf{e}_y) \operatorname{ch} n (\xi + i\theta) \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{3,n}^{(e)} &= e^{-n\xi} e^{in\theta} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{u}_{4,n}^{(e)} &= (y \operatorname{grad} - \varkappa \mathbf{e}_y) e^{-n\xi} e^{in\theta} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1,k}^{(p)} &= \rho^k e^{i(k+1)} \varphi (\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi) \\ \mathbf{u}_{2,k}^{(p)} &= (y \operatorname{grad} - \varkappa \mathbf{e}_y)(2\rho^k e^{ik\varphi}) + i(k - \varkappa) \mathbf{u}_{1,k}^{(p)} = \\ &= [i(k - \varkappa)\mathbf{e}_\rho - (k + \varkappa)\mathbf{e}_\varphi] \rho^k e^{i(k-1)\varphi} \\ \mathbf{u}_{3,k}^{(p)} &= \rho^{-k} e^{i(k-1)\varphi} (\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{u}^{(p)}_{4,\,k} = (y\,\mathrm{grad} - \varkappa \mathbf{e}_y)\,(2\rho^{-k} e^{ik\varphi}) + i\,(k+\varkappa)\,\mathbf{u}^{(p)}_{3,\,k} =$$
$$= [i\,(k+\varkappa)\,\mathbf{e}_\rho + (k-\varkappa)\,\mathbf{e}_\varphi]\,\rho^{-k} e^{i(k+1)\varphi} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\mathbf{u}^{(p)}_0 = D_0 \left[\varkappa \ln \rho\,(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi) - \frac{1}{2}\,(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi)\right] e^{i\varphi} \tag{1.5}$$

($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ — орты декартовой и полярной систем координат, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\varkappa = 3-4\nu$, $D_0 = \mathrm{const}$).

Решения (1.2) и (1.3), регулярные соответственно в любой конечной области и в плоскости с разрезом $\xi = 0$, связаны с решениями (1.4) соотношениями $\left(\binom{m}{p}\text{ — биномиальные коэффициенты}\right)$

$$\mathbf{u}^{(p)}_{1,\,2n-1} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{n-k} \mathbf{u}^{(e)}_{1,\,2k-1} \tag{1.6}$$

$$\mathbf{u}^{(p)}_{1,\,2n} = \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \sum_{k=-n}^{n} \binom{2n}{n-k} \mathbf{u}^{(e)}_{1,\,2k}$$

$$\mathbf{u}^{(p)}_{2,\,2n-1} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{n-k} [2\mathbf{u}^{(e)}_{2,\,2k-1} + i\,(2n-1-\varkappa)\,\mathbf{u}^{(e)}_{1,\,2k-1}]$$

$$\mathbf{u}^{(p)}_{2,\,2n} = \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \sum_{k=-n}^{n} \binom{2n}{n-k} [2\mathbf{u}^{(e)}_{2,\,2k} + i\,(2n-\varkappa)\,\mathbf{u}^{(e)}_{1,\,2k}]$$

$$(0 \leqslant \xi < \infty)$$

$$\mathbf{u}^{(e)}_{3,\,2k-1} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{2k-1}{2n-1} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1} \binom{2n-1}{n-k} \mathbf{u}^{(p)}_{3,\,2n-1}$$

$$\mathbf{u}^{(e)}_{3,\,2k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n-k} \mathbf{u}^{(p)}_{3,\,2n}$$

$$\mathbf{u}^{(e)}_{4,\,2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{2k-1}{2n-1} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1} \times$$
$$\times \binom{2n-1}{n-k} [\mathbf{u}^{(p)}_{4,\,2n-1} - i\,(2n-1+\varkappa)\,\mathbf{u}^{(p)}_{3,\,2n-1}]$$

$$\mathbf{u}^{(e)}_{4,\,2k} = \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n-k} [\mathbf{u}^{(p)}_{4,\,2n} - i\,(2n+\varkappa)\,\mathbf{u}^{(p)}_{3,\,2n}]$$

$$(\rho > a)$$

При выводе соотношений (1.6) использованы разложения базисных решений уравнения Лапласа в эллиптических и полярных координатах

$$e^{-2k\xi} e^{2ik\theta} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n-k} \rho^{-2n} e^{2in\varphi}$$

$$e^{-(2k-1)\xi} e^{i(2k-1)\theta} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{2k-1}{2n-1} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1} \binom{2n-1}{n-k} \rho^{-(2n-1)} e^{i(2n-1)\varphi}$$

$$(\rho > a)$$

$$\rho^{2n} e^{2in\varphi} = \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \sum_{k=-n}^{n} \binom{2n}{n-k} \operatorname{ch} 2k\,(\xi + i\theta)$$

$$\rho^{2n-1} e^{i(2n-1)\varphi} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n-1}{n-k} \operatorname{ch}\,(2k-1)\,(\xi + i\theta)$$

$$(\xi \geqslant 0)$$

Методика получения разложений такого рода и их применения к решению скалярных краевых задач изложена в работах [1, 2].

Соотношения (1.6) в сочетании с методом Фурье специально приспособлены к решению векторных краевых задач теории упругости для кусочно-однородной среды $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$ с концентрическими круговыми линиями раздела $\rho = \rho_s$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$ составляющих ее однородных областей и трещиной $\xi = 0$ во внутренней области $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_m$. Сами соотношения (1.6) служат для удовлетворения условий сопряжения на окружности $\rho = \rho_m$ и граничных условий на берегах трещины $\xi = 0$. Внешний контур $\rho = \rho_0$ может отсутствовать ($\rho_0 = \infty$), что соответствует случаю кусочно-однородной плоскости. Если при этом главный вектор усилий, приложенных к берегам трещины, отличен от нуля, то в общее решение уравнения (1.1) для области $\rho_1 < \rho < \infty$ необходимо включать элементарное решение (1.5).

Реализация такого подхода приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами.

2. Применим соотношения (1.6) к решению задачи о напряженном состоянии кусочно-однородной плоскости $0 \leqslant \rho < \infty$ с круговой линией раздела $\rho = \rho_1$ жестко сцепленных однородных областей и трещиной (разрезом) $\xi = 0$ во внутренней области $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1$.

Ограничимся рассмотрением двух случаев нагружения: а) к берегам трещины приложено нормальное равномерно распределенное давление интенсивности σ_0; б) в центре трещины ее берега растягиваются нормальными сосредоточенными силами P.

Тогда условия сопряжения на линии $\rho = \rho_1$ и граничные условия на берегах трещины $\xi = 0$ имеют вид

$$\begin{gathered}
u_\rho^{(1)} = u_\rho^{(2)}, \quad u_\varphi^{(1)} = u_\varphi^{(2)}, \quad \tau_{\rho\varphi}^{(1)} = \tau_{\rho\varphi}^{(2)}, \quad \sigma_\rho^{(1)} = \sigma_\rho^{(2)} \quad (\rho = \rho_1) \\
\tau_{xy}^{(1)} = 0; \quad \text{а)}\ \sigma_y^{(1)} = -\sigma_0; \\
\text{б)}\ \sigma_y^{(1)} = -\frac{P}{a}\left[\delta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \delta\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)\right] \quad (\xi = 0)
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $\sigma_\rho^{(i)}$, $\tau_{\rho\varphi}^{(i)}$, $\tau_{xy}^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$, $u_\rho^{(i)}$, $u_\varphi^{(i)}$ — компоненты тензора напряжений и составляющие вектора перемещений в полярных и декартовых координатах, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; индексы 1 и 2 относятся к областям $D_1 = (0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1)$ и $D_2 = (\rho_1 \leqslant \rho < \infty)$ соответственно.

С учетом симметрии задачи по координатам x, y представим общие решения уравнения (1.1) для областей D_1 и D_2 в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{(1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} \operatorname{Re} \mathbf{u}_{3,\,2k-1}^{(e)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(2)} \operatorname{Im} \mathbf{u}_{4,\,2k-1}^{(e)} + \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} B_n^{(1)} \operatorname{Re} \mathbf{u}_{1,\,2n-3}^{(p)} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(2)} \operatorname{Im} \mathbf{u}_{2,\,2n-1}^{(p)} \quad (\nu = \nu_1) \\
\mathbf{u}^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(1)} \operatorname{Re} \mathbf{u}_{3,\,2n-1}^{(p)} + \sum_{n=2}^{\infty} D_n^{(2)} \operatorname{Im} \mathbf{u}_{4,\,2n-3}^{(p)} \quad (\nu = \nu_2)
\end{aligned}$$

Удовлетворяя условиям (2.1) и используя при этом соотношения (1.6), после ряда простых преобразований получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_k^2

$$A_k^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} D_{km}(\lambda) A_m^{(2)} + F_k \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

$$D_{11}=\frac{1}{4}(p_1+2p_2)\lambda^2+4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1}^2\times$$
$$\times\left[\frac{1}{4}p_1+p_3(n-\omega_{n1}\lambda^{-2})^2\right]\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{4n-2}$$
$$D_{km}=4\sum_{n=\max(k,m)}^{\infty}\frac{2m-1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-k}\binom{2n-1}{n-m}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{4}p_1+p_3(n-\omega_{nk}\lambda^{-2})(n-\omega_{nm}\lambda^{-2})\right]\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{4n-2}$$
$$p_1=\frac{G_1\varkappa_2-G_2\varkappa_1}{G_1\varkappa_2+G_2},\quad p_2=\frac{G_1-G_2}{G_1+G_2(1-2\nu_1)},\quad p_3=\frac{G_1-G_2}{G_1+G_2\varkappa_1}$$
$$\omega_{nj}=\frac{(n-j)(n+j-1)}{n-1},\quad \lambda=\frac{a}{\rho_1}<1$$

а) $F_1=-\frac{a\sigma_0}{2G_1}$, $F_n=0\ (n=2,3,\ldots)$; б) $F_k=\frac{P}{\pi G_1}\frac{(-1)^k}{2k-1}$

Оставшиеся коэффициенты определяются по формулам

$$A_k^{(1)}=(1-2\nu_1)A_k^{(2)},\quad \rho_1B_1^{(2)}=\frac{1}{4}p_2\lambda A_1^{(2)},$$
$$\rho_1D_1^{(1)}=-\frac{G_1(1-\nu_1)\lambda A_1^{(2)}}{G_1+G_2(1-2\nu_1)}$$
$$\rho_1^{2n-3}B_n^{(1)}=p_1\Sigma_1-p_3(2n-1)\Sigma_2,\quad \rho_1^{2n-1}B_n^{(2)}=p_3\Sigma_2$$
$$\rho_1^{-(2n-1)}D_n^{(1)}=-\frac{G_1(1+\varkappa_1)}{G_1\varkappa_2+G_2}(2n-3)\Sigma_1-\frac{G_1(1+\varkappa_1)}{G_2\varkappa_1+G_1}\Sigma_2$$
$$\rho_1^{-(2n-3)}D_n^{(2)}=\frac{G_1(1+\varkappa_1)}{G_1\varkappa_2+G_2}\Sigma_1$$

$$\Sigma_1=\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n-3}\sum_{k=1}^{n}A_k^{(2)}\frac{2k-1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-k}\frac{\omega_{nk}}{2n-3}$$
$$\Sigma_2=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n-1}\sum_{k=1}^{n}A_k^{(2)}\frac{2k-1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-k}(n-\omega_{nk}\lambda^{-2})$$

Используя оценки

$$2^{-(4n-2)}\binom{2n-1}{n-k}\binom{2n-1}{n-m}\leqslant 2^{-(4n-2)}\binom{2n-1}{n-1}^2=\frac{\Gamma^2(n+{}^1/_2)}{\pi\Gamma^2(n+1)}<\frac{1}{\pi}$$
$$\frac{1}{2n-1}<1,\quad \frac{n}{2n-1}<1,\quad \omega_{nj}\leqslant n,\quad |n-\omega_{nj}\lambda^{-2}|\leqslant n(1+\lambda^{-2})$$

можно убедиться, что

$$|D_{11}(\lambda)|\leqslant {}^1/_4|p_1+2p_2|\lambda^2+{}^1/_3d_{22}(\lambda)\lambda^6$$
$$|D_{km}(\lambda)|\leqslant d_{km}(\lambda)\lambda^{4\max(k,m)-2}\quad (k+m\neq 2) \tag{2.3}$$
$$d_{km}=\frac{2m-1}{\pi}\frac{(1-\lambda^2)^{-2}}{1-\lambda^4}\{|p_1|(1-\lambda^2)^2+$$
$$+4|p_3|[\max(k,m)(\lambda^{-4}-1)+1]\}$$

и, следовательно

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}D_{km}^2(\lambda)<\infty\quad (0<\lambda<1) \tag{2.4}$$

Из неравенства (2.4) и принадлежности $\{F_k\}_1^\infty$ гильбертову пространству числовых последовательностей l_2 следует, что почти при всех значениях $\lambda\in(0,1)$ решение бесконечной системы (2.2) в пространстве l_2 существует, единственно и может быть найдено методом редукции [3, 4].

Кроме того, из оценки (2.3) вытекает, что

$$S_k(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}|D_{km}(\lambda)|\to 0$$

при $k \to \infty$ и $0 < \lambda < 1$, т. е. бесконечная система (2.2) квазирегулярна. Тогда, учитывая равенство $S_k(0) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$), можно заключить, что для любого фиксированного набора значений G_2/G_1, ν_1, ν_2 существует соответствующее значение λ^*, такое, что при $0 < \lambda \leqslant \lambda^*$ бесконечная система (2.2) вполне регулярна.

Анализ сумм $S_k(\lambda)$ ($k = 1, 2, \ldots$), основанный на более тонких оценках, показывает, что в случае $G_1 \geqslant G_2$ бесконечная система (2.2) вполне регулярна при $0 < \lambda \leqslant 1/\sqrt{2}$.

Ограничиваясь членами до порядка λ^6 включительно, будем иметь

$$\text{а)}\ A_1^{(2)} = -\frac{a\sigma_0}{2G_1}\Big\{1 + \frac{1}{4}q\lambda^2 + \frac{1}{16}(q^2 - 24p_3)\lambda^4 + $$
$$+ \frac{1}{64}[3(p_1 + 31p_3) - 48p_3q + q^3]\lambda^6\Big\} + O(\lambda^8)$$
$$A_2^{(2)} = \frac{a\sigma_0}{2G_1}\Big\{\frac{1}{4}p_3\lambda^4 + \frac{1}{64}[4p_3q - (p_1 + 31p_3)]\lambda^6\Big\} + O(\lambda^8)$$
$$A_k^{(2)} = O(\lambda^{4k-4})\ (k = 3, 4, \ldots)$$
$$\text{б)}\ A_1^{(2)} = -\frac{P}{\pi G_1}\Big\{1 + \frac{1}{4}q\lambda^2 + \frac{1}{16}(q^2 - 20p_3)\lambda^4 + $$
$$+ \frac{1}{64}[2(p_1 + 31p_3) - 44p_3q + q^3]\lambda^6\Big\} + O(\lambda^8)$$
$$A_2^{(2)} = \frac{P}{3\pi G_1}\Big\{1 + \frac{3}{4}p_3\lambda^4 + \frac{1}{32}[6p_3q - (p_1 + 31p_3)]\lambda^6\Big\} + O(\lambda^8)$$
$$A_k^{(2)} = O(\lambda^{4k-4})\ (k = 3, 4, \ldots);\ q = p_1 + 2p_2 + 3p_3$$

Коэффициенты интенсивности напряжений, вычисленные на основании асимптотических решений а), б), имеют вид

$$\text{а)}\ k = \sigma_0\sqrt{a}\,\{1 + 1/4q\lambda^2 + 1/16\,(q^2 - 36p_3)\lambda^4 + $$
$$+ 1/64\,[q^3 - 60p_3q + 6(p_1 + 31p_3)]\lambda^6\} + O(\lambda^8) \tag{2.5}$$
$$\text{б)}\ k = \frac{P}{\pi\sqrt{a}}\Big\{1 + \frac{1}{2}q\lambda^2 + \frac{1}{8}(q^2 - 32p_3)\lambda^4 + $$
$$+ \frac{1}{32}[q^3 - 56p_3q + 4(p_1 + 31p_3)]\lambda^6\Big\} + O(\lambda^8)$$

В частном случае $G_2 = 0$ выражения в фигурных скобках в (2.5) таковы: а) $1 + 3/2\lambda^2 + 3/4\lambda^6$, б) $1 + 3\lambda^2 + 1/2\lambda^4 + 1/4\lambda^6$, т. е. получаем асимптотические формулы, которые совпадают с выражениями для коэффициентов интенсивности напряжений в задаче о равновесии однородного кругового диска с симметричной диаметральной трещиной [5, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Проценко В. С., Соловьев А. И.* О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 973—982.
2. *Проценко В. С., Соловьев А. И., Цымбалюк В. В.* Кручение упругих тел, ограниченных координатными поверхностями тороидальной и сферической систем координат // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 415—425.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука. 1977. 742 с.
4. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 487 с.
5. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка. 1976. 443 с.
6. *Крестин Г. С., Либацкий Л. Л., Ярема С. Я.* Напряженное состояние диска с диаметральной трещиной // Физ.-хим. механика материалов. 1972. Т. 6. Вып. 2. С. 69—74.

Харьков

Поступила в редакцию
25.XI.1986