

УДК 539.374

## ПРИМЕНЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Нисневич Е. Б.

Предлагается метод последовательных приближений для решения плоских задач теории идеальной пластичности, основанный на структурных представлениях. При помощи этого метода определяется напряженное состояние в неограниченной плоскости с круговым отверстием при произвольном изменении усилий, приложенных на бесконечности. Показано, что при некотором ограничении на асимметрию нагрузок, решение рассмотренной задачи не зависит от траектории нагружения. При нарушении указанного ограничения область пластичности будет различной в зависимости от истории изменения нагрузок.

1. В плоском случае напряжения, вызванные неупругой деформацией  $\Gamma_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ), можно представить [1] как напряжения от клиновидных дислокаций (КД), распределенных (внедренных) по области пластичности (ОП) с плотностью  $p(x, y)$  и по ее границе  $L$  с плотностью  $p_L(l)$ . Величины плотностей при плоской деформации имеют вид

$$(1.1) \quad p(x, y) = \frac{\partial^2 \Gamma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \nu \Delta \Gamma_z$$

$$p_L(l) = \left( \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_y}{\partial x} \right) \cos(nx) +$$

$$+ \left( \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_x}{\partial y} \right) \cos(ny) - \nu \frac{\partial \Gamma_z}{\partial n}$$

( $\Gamma_i = \Gamma_{ii}$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $n$  — внешняя нормаль к границе области пластичности).

При плоском напряженном состоянии значения указанных плотностей получаются из приведенных выражений, если в них отбросить последние члены, зависящие от деформации  $\Gamma_z$ .

Если, наоборот, известно напряженное состояние тела, то оно полностью определяет структурные несовершенства, которые образовались в нем к рассматриваемому моменту. Плотность этих несовершенств (т. е. КД) в ОП и на ее границе определяется выражениями [1]

$$(1.2) \quad p(x, y) = - \frac{1 + \kappa}{8G} \Delta (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$(1.3) \quad p_L = - \frac{1 + \kappa}{8G} \left[ \frac{\partial (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial n} \right]_L$$

Здесь квадратные скобки означают разрыв величины, стоящей в них, на границе области неупругих деформаций; он вычисляется при переходе от точек, лежащих внутри области, к точкам вне области;  $\kappa = 3 - 4\nu$  при плоской деформации и  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  при плоском напряженном состоянии;  $G$  — модуль сдвига.

На основании введенных структурных представлений предлагается метод последовательных приближений для решения статически определенных задач идеальной пластичности. К ним относятся, например, обобщенные задачи Л. А. Галина и Г. П. Черепанова о деформации неограничен-

ной плоскости с круговым отверстием, когда ОП может не полностью охватывать отверстие.

В рассматриваемых задачах компоненты напряжений и плотность КД в ОП известны (будут такими же, как в решениях [2, 3]). Требуется найти границу, разделяющую упругую и пластическую области, а также напряженное состояние в упругой области.

В первом приближении поле напряжений вне ОП принимается из упругого решения. Приближенное положение границы ОП определяется на основании равенства максимального касательного напряжения пределу текучести. После этого по упругому решению находится приближенное значение плотности КД на этой границе. Вообще говоря, кроме КД на каждом шаге приближения образуются и другие структурные несовершенства (краевые дислокации), распределенные по границе между областями. Однако в результате решения задачи должно быть получено непрерывное поле напряжений, а оно может быть вызвано только КД. Поэтому другие компоненты структурных несовершенств отбрасываются. По найденной плотности КД вычисляется напряженное состояние в уточненной упругой области. Затем цикл повторяется.

2. Применение изложенного метода последовательных приближений рассмотрим на примере решения обобщенной задачи Л. А. Галина. В данном случае напряженное состояние в ОП, которая всегда прилегает к контуру отверстия радиуса  $R$ , имеет вид ( $\tau$  — предел текучести)

$$(2.1) \quad \sigma_r^q + \sigma_\theta^q = 2\tau \left( 1 + 2 \ln \frac{r}{R} \right), \quad \sigma_\theta^q - \sigma_r^q = 2\tau, \quad \tau_{r\theta}^q = 0$$

При этом плотность КД в области неупругих деформаций равна нулю.

Задача заключается в определении границы ОП и плотности КД  $p_L$ , распределенных по этой границе. При известной плотности  $p_L$  определение напряженно-деформированного состояния сводится к вычислению квадратур.

В первом приближении, как уже говорилось, напряженное состояние вне ОП берется из упругого решения:

$$(2.2) \quad \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^y, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\theta^y, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \tau_{r\theta}^y$$

Тогда граница ОП определяется из условия равенства максимального касательного напряжения пределу текучести ( $\tau$ ).

Зная напряженное состояние и расположение линии  $L$ , плотность КД на границе ОП можно вычислить по формуле (1.3). Получим

$$(2.3) \quad p_{L1} = - \frac{1-\nu}{2G} \left[ \frac{\partial (\sigma_\theta^{(1)} + \sigma_r^{(1)})}{\partial n} - \frac{\partial (\sigma_\theta^q + \sigma_r^q)}{\partial n} \right]$$

Кроме этих структурных несовершенств, КД распределены также на круговой границе тела. Принимая во внимание, что граница ОП в этом случае совпадает с границей тела, плотность структурных несовершенств на ней находится на основании выражения (1.3)

$$(2.4) \quad p_R = \frac{1-\nu}{2G} \frac{\partial (\sigma_\theta^q + \sigma_r^q)}{\partial n} \Big|_{r=R} = - \frac{2\tau(1-\nu)}{GR}$$

Для определения напряженного состояния, вызванного структурными несовершенствами, вычислим функции напряжений от двух единичных КД, расположенных в точках  $z_0$  и  $-z_0$  бесконечной плоскости с круговым

отверстием. Используя функции напряжений от одной КД [4], получим

$$\Phi(z) = \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \frac{(z^2\bar{z}_0^2 - R^4)R^2}{z^2\bar{z}_0^2(z^2 - z_0^2)} - \frac{2R^2(R^2 - r_0^2)}{R^4 - z^2\bar{z}_0^2} \right]$$

$$\Psi(z) = \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{2R^4(R^4r_0^2 + 2z^2\bar{z}_0^2R^2 - 3z^2\bar{z}_0^2r_0^2)}{z^2(R^4 - z^2\bar{z}_0^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2r_0^2}{z^2 - z_0^2} - \frac{2R^2}{z^2} \ln \frac{r_0^2}{R^2} \right]$$

На основании приведенных функций напряжений определим компоненты напряжений от КД (2.4), расположенных по части круговой границы

$$\sigma_{\theta}^R + \sigma_r^R = \int_{-\theta_*}^{\theta_*} (\sigma_{\theta}^d + \sigma_r^d) p_R R d\theta$$

где  $\theta_*$  — угол, характеризующий точку пересечения границы  $L$  с контуром отверстия,  $\sigma_{\theta}^d + \sigma_r^d = 4 \operatorname{Re} \Phi(z)$ .

Аналогично записываются два других интеграла. После вычисления интегралов получим

$$\sigma_{\theta}^R + \sigma_r^R = \frac{8\theta_*\tau}{\pi} \ln \frac{r}{R}$$

$$\sigma_{\theta}^R - \sigma_r^R = \frac{4\theta_*\tau}{\pi} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right), \quad \tau_{r\theta}^R = 0$$

Последние компоненты на всех этапах приближения будут иметь такой же вид, так как в ОП поле напряжений не изменяется.

Учитывая, что напряженное состояние в реальном теле можно представить как сумму воздействий на упругое тело внешней нагрузки и структурных несовершенств, находим компоненты напряжений в упругой области на следующем шаге приближения:

$$(2.5) \quad \sigma_{\theta}^{(2)} + \sigma_r^{(2)} = \int_L (\sigma_{\theta}^d + \sigma_r^d) p_{L1} dl + \sigma_{\theta}^R + \sigma_r^R + \sigma_{\theta}^q + \sigma_r^q$$

Таким же образом можно записать компоненты  $\sigma_{\theta}^{(2)} - \sigma_r^{(2)}$  и  $\tau_{r\theta}^{(2)}$ .

Далее цикл повторяется.

Процесс приближения продолжается до тех пор, пока наибольшая разность  $|\Delta r_0|$  между двумя последующими приближениями радиус-вектора границы  $L$  станет меньше заданной величины ( $|\Delta r_0| \leq 0,1R$ ).

3. При помощи изложенного метода приближенного решения были исследованы два вида нагружения для обобщенной задачи Л. А. Галина. В каждой программе нагружения были получены решения для трех значений внешних усилий.

На начальном этапе нагружения первое приближение находилось из упругого решения. Для последующих значений нагрузок за первое приближение принималось решение, полученное на предыдущем шаге нагрузки.

Чтобы достичь заданной точности ( $|\Delta r_0| \leq 0,1R$ ), на каждом этапе нагружения достаточно было сделать три приближения.

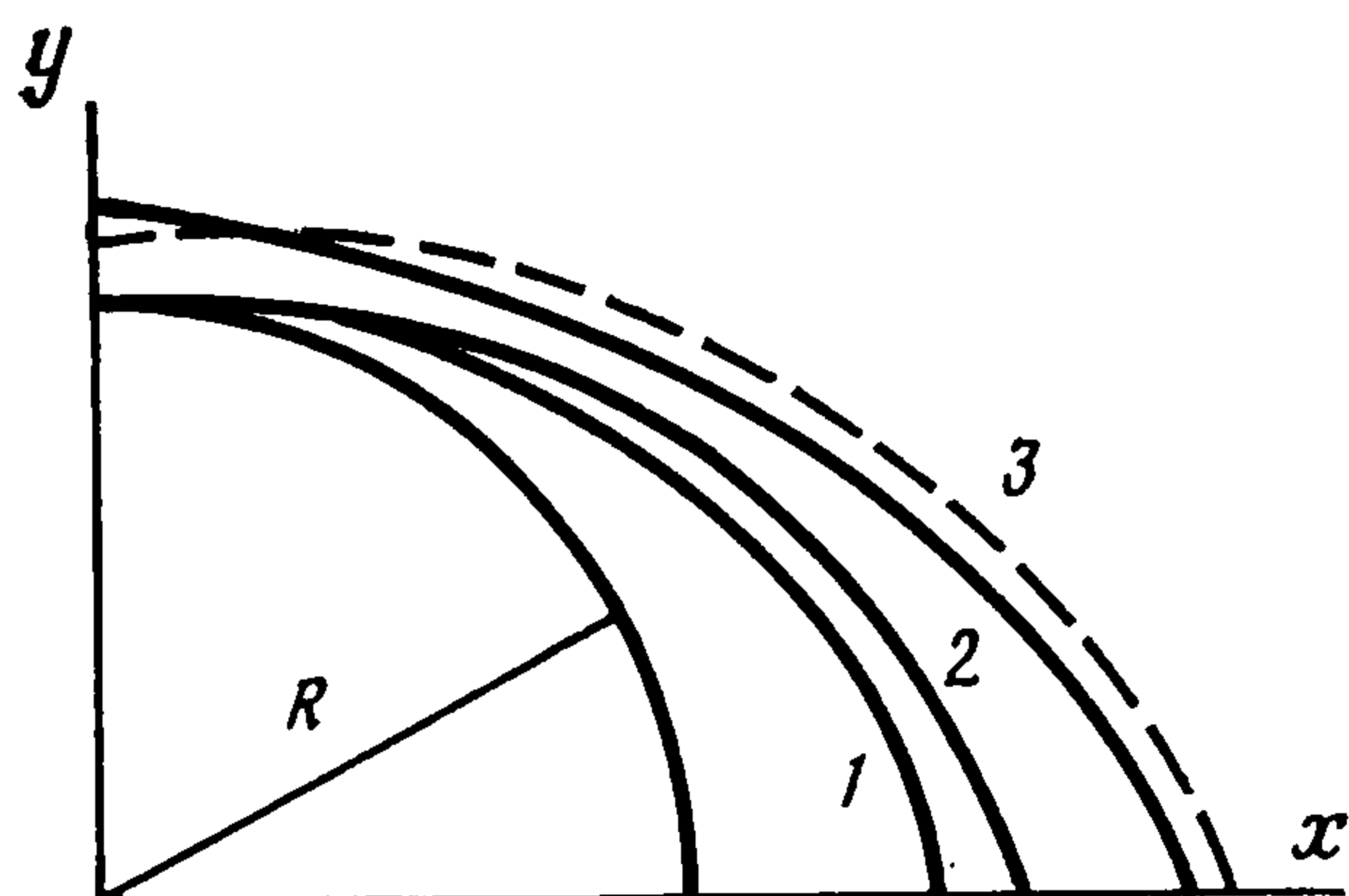
Рассмотрим сначала пропорциональное нагружение, когда отношение нагрузок  $\beta_* = q_x/q_y$  не изменяется. Положим  $\beta_* = 0,75$ . Тогда пластические деформации происходят при  $q_x \geq 0,59\tau$ ,  $q_y \geq 0,89\tau$ .

Схема развития ОП с увеличением нагрузки показана на фиг. 1 при  $q_x = 1,05\tau$ ,  $q_y = 1,4\tau$  (кривая 1);  $q_x = 1,2\tau$ ,  $q_y = 1,6\tau$  (кривая 2);  $q_x = 1,5\tau$ ,  $q_y = 2\tau$  (кривая 3). Графики соответствующих значений плотности КД приведены на фиг. 2.

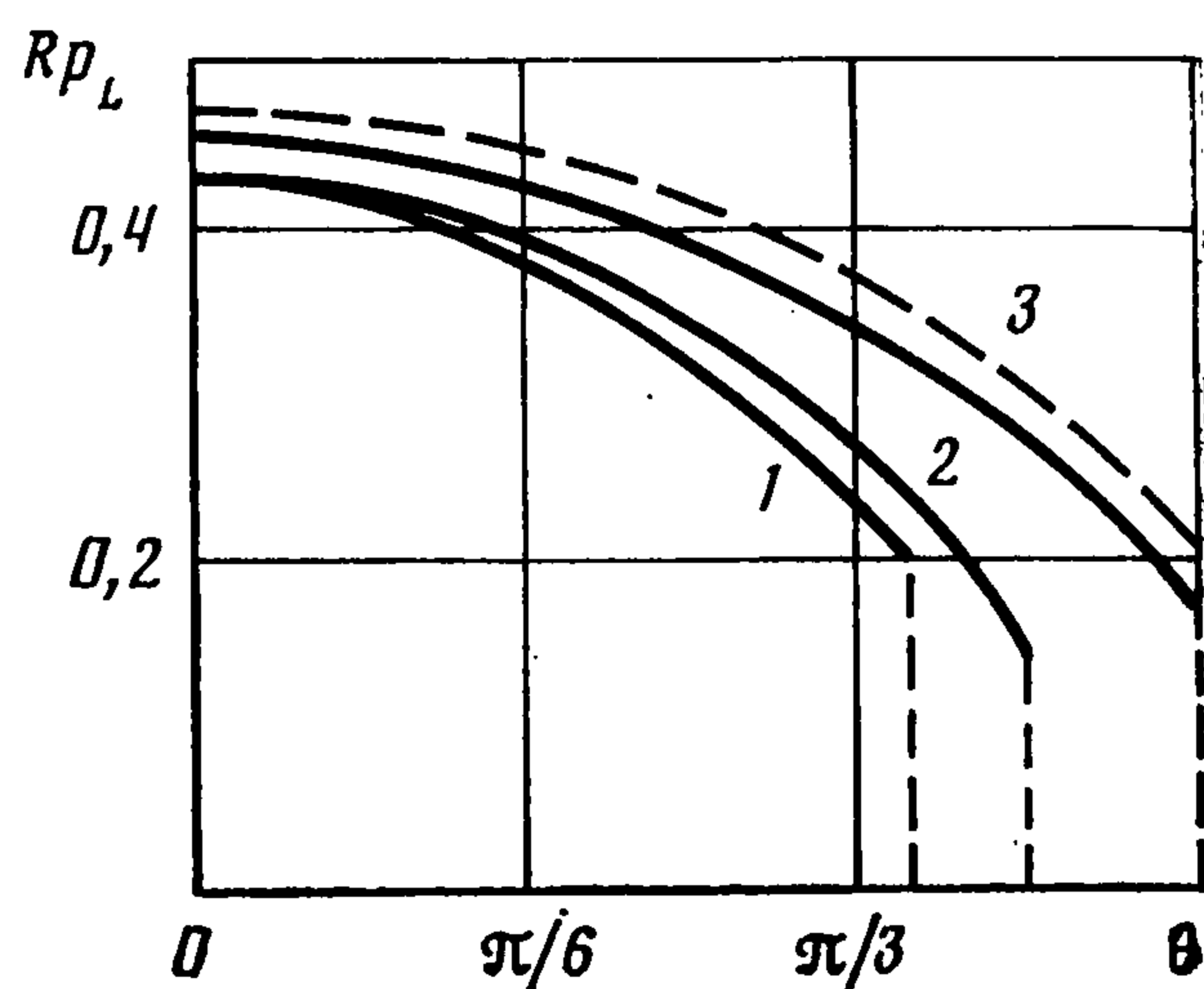
При внешних усилиях  $q_x = 1,5\tau$ ,  $q_y = 2\tau$  граница ОП, полученная из решения Л. А. Галина, охватывает круговое отверстие. Она показана на фиг. 1 штрихами. На фиг. 2 штрихами даны значения  $p_L$ , соответствующие указанному решению.

Видно, что решение задачи по Л. А. Галину и методом последовательных приближений для значения нагрузок  $q_x = 1,5\tau$ ,  $q_y = 2\tau$  практически совпадают. Значит, при выполнении условия монотонности развития ОП и ограничения на асимметрию нагрузки

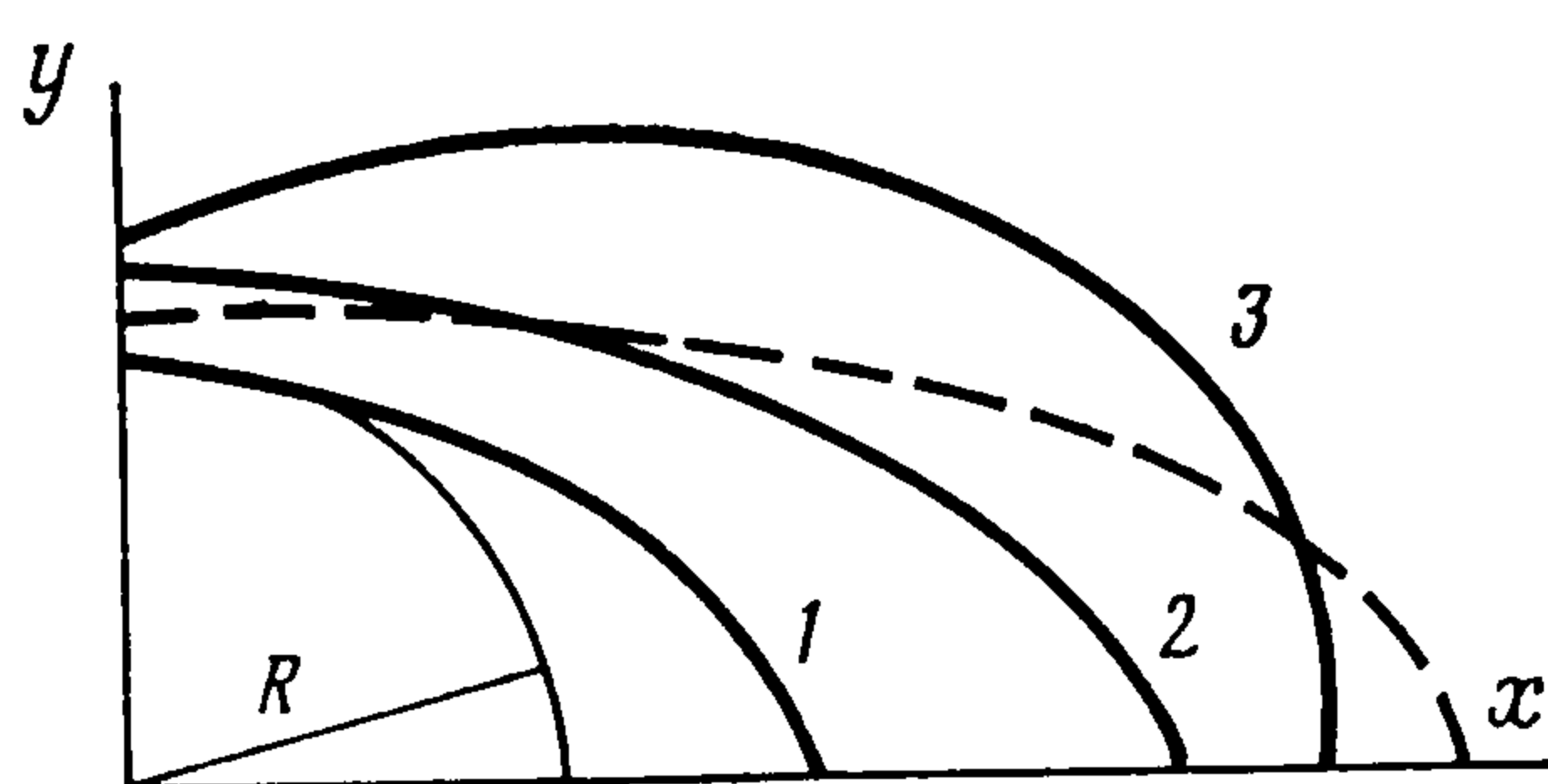
$$(3.1) \quad q_y - q_x \leq 0,82\tau$$



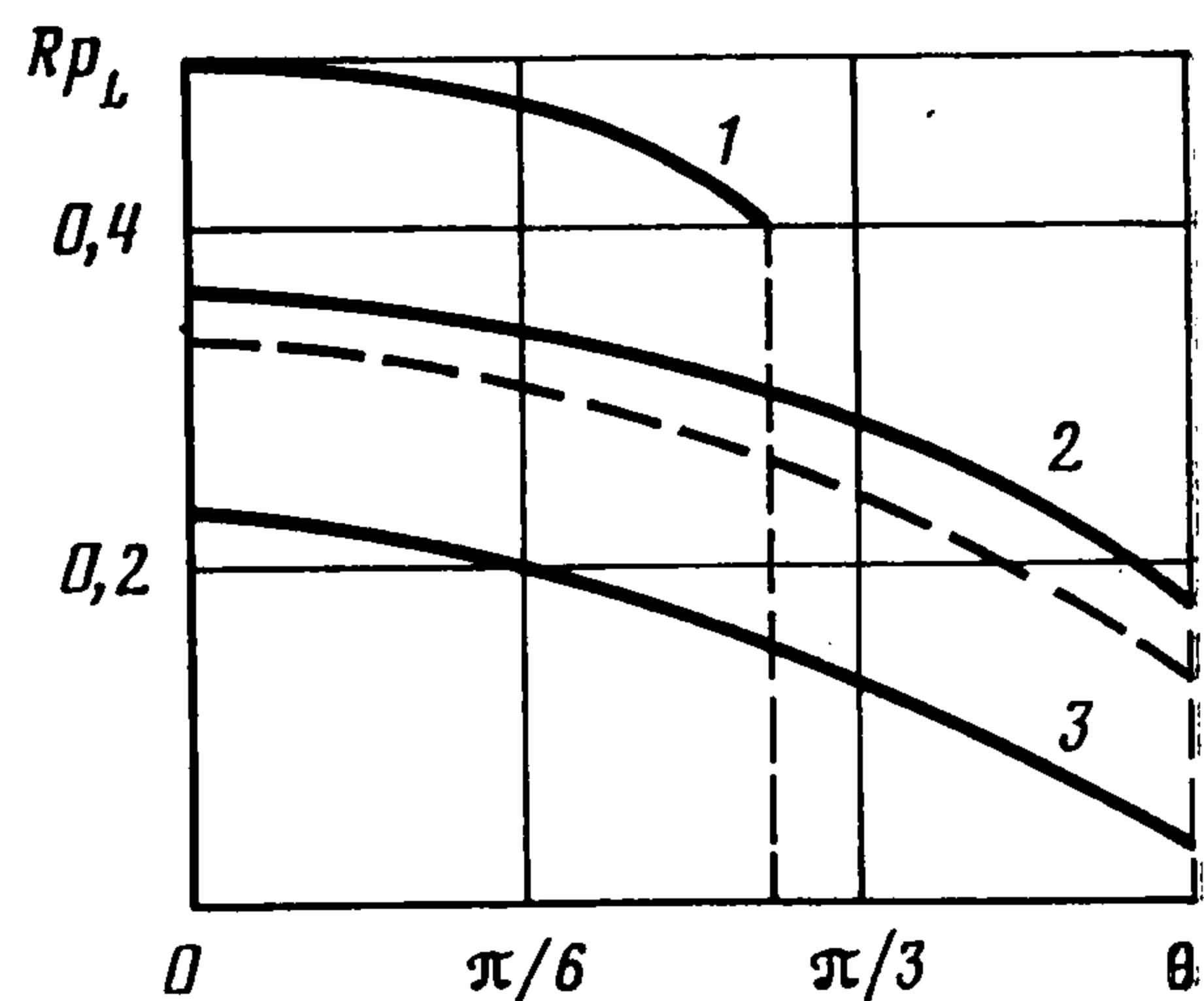
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

решение, полученное Л. А. Галиным, соответствует и таким траекториям нагружения, при которых в процессе деформации возможен неполный охват ОП кругового отверстия. По-видимому, при указанных условиях решение Л. А. Галина не зависит от истории изменения внешних усилий.

Рассмотрим программу нагружения:  $(q_x/\tau; q_y/\tau) = (1,2; 2), (1,9; 2,6), (2; 3)$ , заканчивающуюся усилиями, для которых выполняется условие охвата ОП кругового отверстия, но нарушается условие, накладывающее ограничение (3.1) на асимметрию нагрузок. ОП и значения плотности КД изображены на фиг. 3, 4 при нагрузках  $q_x = 1,2\tau, q_y = 2\tau$  (кривые 1),  $q_x = 1,9\tau, q_y = 2,6\tau$  (кривые 2),  $q_x = 2\tau, q_y = 3\tau$  (кривые 3).

Штрихами показаны граница ОП и график значений плотности КД, полученные на основании решения Л. А. Галина при  $q_x = 2\tau, q_y = 3\tau$ .

Из приведенного примера следует, что если асимметрия нагрузок не удовлетворяет условию (3.1), то напряженно-деформированное состояние плоскости с круговым отверстием зависит от траектории нагружения (истории изменения внешних усилий).

Автор благодарит М. Я. Леонова за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов М. Я., Нисневич Е. Б. Структурные представления в механике упруго-пластических деформаций // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 924—931.
2. Галин Л. А. Плоская упругопластическая задача // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 3. С. 367—386.
3. Черепанов Г. П. Об одном методе решения упругопластической задачи // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 428—435.
4. Леонов М. Я. Механика деформаций и разрушения. Фрунзе: Илим. 1981. 236 с.