

УДК 539.3:534

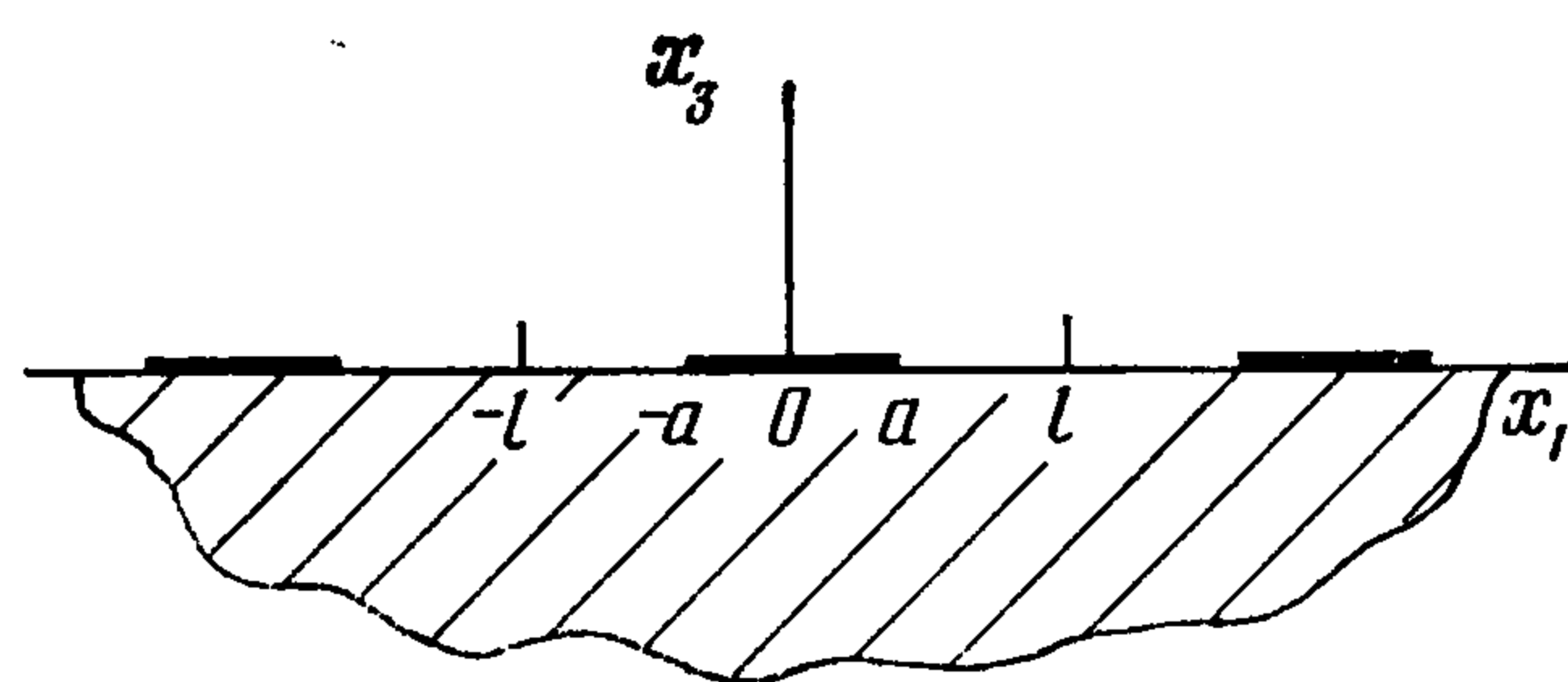
ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЫ, ВЫЗВАННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИМ В ПРОСТРАНСТВЕ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Бабешко В. А., Финкельштейн А. Б.

Рассматривается двумерная краевая задача о гармонических колебаниях полуграниченной пьезоэлектрической среды с одной плоской границей, на которой периодически заданы нормальное перемещение и потенциал электрического поля. Эта задача возникает при расчетах ряда устройств на поверхностных акустических волнах [1]. Такие устройства состоят из пьезоэлектрического кристалла прямоугольной в плане и поперечном сечении формы, на одной из граней которого нанесена периодическая система прямоугольных электродов. Наличие на границе периодически расположенных электродов оказывает влияние на поверхностные акустические волны двумя путями: 1) электрическая короткая поверхность, 2) механическое воздействие на колеблющуюся среду вследствие инерции электродов. При этом вклад механического воздействия возрастет с увеличением рабочих частот устройств.

Краевая задача сводится к системе периодических уравнений свертки. Устанавливаются свойства ядер интегральных уравнений. Приводится теорема, позволяющая перейти к решению систем алгебраических уравнений. Строится решение для волновых полей в любой точке среды. Рассматривается пример расчета волновых полей на границе среды.

1. Пусть на поверхности электроупругого полупространства $x_3 \leq 0$, граничащего с вакуумом, расположена периодическая по x_1 с периодом $2l$ система параллельных электродов шириной $2a$ (фигура). Полная система дифференциальных уравнений в рамках электростатического приближения [2] имеет вид [1]



$$(1.1) \quad c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} + e_{kij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}$$

$$e_{ikl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} - \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

Уравнения (1.1) справедливы в области $x_3 \leq 0$. Для $x_3 > 0$ электрический потенциал описывается уравнением Лапласа [1] $\Delta \varphi = 0$.

Граничные условия смешанные. В той части поверхности, где расположены электроды, необходимо ставить условия на перемещения и задавать потенциал, а на свободной части — условия отсутствия механических напряжений и непрерывности нормальной компоненты вектора индукции [3]. В силу периодичности задачи достаточно рассмотреть один период, на остальных условия повторяются. Пусть перемещения и потенциал зависят от времени по закону $\exp(-i\omega t)$ и этот сомножитель в дальнейшем опускается. В предположении малости касательных напряжений под электродами по сравнению с нормальными напряжениями для двумерной задачи должны выполняться следующие граничные условия:

$$(1.2) \quad x_3 = 0, x_1 \in [-a, a], T_{13} = T_{23} = 0, u_3 = N_3(x_1), \varphi = N_4$$

$$x_3 = 0, x_1 \in [-a, a], T_{13} = T_{23} = T_{33} = 0, D_3 - D_3^b = 0$$

где $D_3^b(x_1, x_3)$ — нормальная компонента индукции в вакууме.

Пусть в безразмерной системе координат x, y, z , где $x_1 = lx/\pi$, $x_2 = ly/\pi$, $x_3 = lz/\pi$, перемещения u_i ($i = 1, 2, 3$) обозначаются u, v, w . Для сведения краевой задачи к системе интегральных уравнений рассматриваются уравнения (1.1) с граничными условиями

$$(1.3) \quad z = 0, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad T_{13} = T_{23} = 0, \quad T_{33} = q_1(x), \quad D_3 - D_3^b = q_2(x)$$

Здесь $q_1(x), q_2(x)$ — финитные функции, равные нулю для $x \in [-\alpha, \alpha]$, $\alpha = a\pi/l$.

Представлением всех функций в виде их рядов Фурье и дальнейшим решением возникающих задач для каждого слагаемого краевая задача (1.1) с граничными условиями (1.3) сводится к системе двух периодических уравнений свертки на отрезке [4]

$$(1.4) \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} R(x - \xi) \mathbf{q}(\xi) d\xi = \mathbf{f}(x), \quad x \in [-\alpha, \alpha]$$

$$R(t) = \|k_{ij}(t)\|, \quad k_{ij}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{ij}(n) \exp(int)$$

$$i, j = 1, 2, \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2), \quad \mathbf{f} = (N_3, N_4)$$

Функции $K_{ij}(u)$ имеют свойства:

- 1) $K_{ii}(u)$ — четные, $K_{12}(u) = K_{21}(u)$ — нечетные функции;
- 2) $K_{ii}(u) = C_{ii}^2 |u|^{-1} [1 + O(|u|^{-2})]$ ($|u| \rightarrow \infty$), $i = 1, 2$;
- 3) $K_{12}(u) = K_{21}(u) = Cu^{-1} [1 + O(u^{-2})]$ ($u \rightarrow \pm \infty$).

Кроме того, функции $K_{ij}(u)$ ($i, j = 1, 2$) — дробные с общим четным знаменателем $\Delta(u)$, т. е. $K_{ij}(u) = K_{ij}^*(u)/\Delta(u)$. Функция $\Delta(u)$ имеет два вещественных нуля $\pm \zeta$. Справедливы аппроксимации ($P_L(u)$ — многочлен четной степени L)

$$\Delta(u) = P_L^\Delta(u) = (u^2 - \zeta^2) P_{L-2}^\Delta(u)$$

$$K_{ii}^*(u) = P_L^{ii}(u), \quad i = 1, 2; \quad K_{12}^*(u) = K_{21}^*(u) = P_{L-1}^{12}(u)$$

Основанием для введения такой аппроксимации является учет конечного числа мод волн, начиная с низшей, возникающих в электроупругой среде при гармоническом изменении механических и электрических воздействий.

Функции $K_{ij}(u)$ можно представить в виде

$$(1.5) \quad K_{ii}(u) = \frac{A^{ii}}{A^\Delta} \prod_{j=1}^L (u - z_j^{11}) \left[\prod_{j=1}^L (u - \zeta_j) \right]^{-1} = \frac{A^{ii}}{A^\Delta} +$$

$$+ \frac{P_{L-1}^{ii}(u)}{P_L^\Delta(u)}, \quad K_{12}(u) = K_{21}(u) = \frac{P_{L-1}^{12}(u)}{P_L^\Delta(u)}; \quad \zeta_{L-1} = \zeta, \quad \zeta_L = -\zeta$$

Здесь ζ_j ($j = 1, \dots, L-2$) — нули многочлена $P_{L-2}^\Delta(u)$; z_j^{ii} — нули многочленов $P_L^{ii}(u)$; A^{ii}, A^Δ — коэффициенты при старших степенях соответствующих многочленов, $i = 1, 2$.

2. Рассмотрим систему интегральных уравнений (1.4), в которой $K_{ij}(n)$ записаны в виде (1.5).

Теорема. Для функций вида $\Phi(z) = K(z) \exp(izt)$, у которых $|t| < 2\pi$, $|K(z)| \rightarrow C |z|^{-1}$ при $|z| \rightarrow \infty$; $K(z)$ имеет полюсы ζ_j ($j =$

$= 1, \dots, L$), справедливо представление

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(n) = - \sum_{j=1}^L \operatorname{Res} (\Phi(z) \operatorname{ctg} \pi z) |_{z=\zeta_j} + \frac{t}{|t|} \pi i \sum_{j=1}^L \operatorname{Res} \Phi(z) |_{z=\zeta_j}$$

Теорема доказывается по такой же схеме, что и теорема 1.4.1 работы [5], только, применяя теоремы о вычетах, необходимо учитывать наличие полюсов функции $K(z)$.

Система (1.4) с ядрами, в которых функции $K_{ij}(u)$ имеют вид (1.5), при помощи теоремы приводится к системе

$$(2.1) \quad \begin{aligned} 2\pi (A^{ll}/A^\Delta) q_l(x) + I_{1l}(x) + I_{2l}(x) &= f_l(x), \quad x \in [-\alpha, \alpha] \\ I_{kl}(x) &= \int_{-\alpha}^x q_k(\xi) \sum_{j=1}^L R_j^{lk} \theta_j(x-\xi) d\xi + \int_x^\alpha q_k(\xi) \sum_{j=1}^L H_j^{lk} \theta_j(x-\xi) d\xi \\ R_j^{kl} &= D_j^{kl} + S_j^{kl}, \quad H_j^{kl} = D_j^{kl} - S_j^{kl}, \quad \theta_j(x-\xi) = \exp[i\zeta_j(x-\xi)] \end{aligned}$$

D_j^{kl} — вычеты функций $\operatorname{ctg} \pi u P_{L-1}^{kl}(u)/P_L^\Delta(u)$, взятые в точках $u = \zeta_j$; S_j^{kl} — вычеты функций $i\pi P_{L-1}^{kl}(u)/P_L^\Delta(u)$, $k, l = 1, 2$.

В системе (2.1) функции $f_1(x)$ — нормальное смещение электродов. Пусть она задана рядом Фурье; решим систему (2.1) для произвольного слагаемого $F_1 \exp(i\eta x)$ этого ряда. Функция $f_2(x)$ — величина потенциала на электроде, поэтому положим ее равной постоянной F_2 . Решим систему (2.1) с правой частью

$$(2.2) \quad f_1(x) = F_1 \exp(i\eta x), \quad f_2(x) = F_2$$

Решение системы (2.1) с правой частью (2.2) ищется в виде

$$(2.3) \quad q_i(\xi) = A_i + B_i \exp(i\eta\xi) + \sum_{k=1}^N X_k^{(i)} \exp(ip_k\xi)$$

где $A_i, B_i, X_k^{(i)}$ ($i = 1, 2; k = 1, \dots, N$) — неизвестные коэффициенты, p_k ($k = 1, \dots, N$) — также неизвестные величины, количество которых и их значения определяются в ходе решения. После подстановки (2.3) в (2.1) с правой частью (2.2) и вычисления интегралов в каждом уравнении (2.1) появляются слагаемые, не зависящие от x , слагаемые с множителем $\exp(i\eta x)$, с множителями $\exp(ip_k x)$, а также с множителями $\exp(i\zeta_j x)$ ($j = 1, \dots, L$). В силу линейной независимости слагаемых с указанными множителями система интегральных уравнений (2.1) распадается на ряд линейных алгебраических систем

$$(2.4) \quad M(0) \cdot \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad M(\eta) \cdot \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2.5) \quad M(p_k) \cdot \begin{Bmatrix} X_k^{(1)} \\ X_k^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2.6) \quad M^{(1)} \cdot \mathbf{X}^{(1)} + M^{(2)} \cdot \mathbf{X}^{(2)} = M^P \cdot (A_1, A_2, B_1, B_2)^T \\ \mathbf{X}^{(i)} = (X_1^{(i)}, \dots, X_N^{(i)}), \quad i = 1, 2$$

Здесь $M(\eta)$ — матрица (2×2) , элементы которой зависят от параметра η , $M^{(1)}, M^{(2)}$ — матрицы $(N \times N)$, M^P — матрица $(2L \times 4)$.

Из (2.4) определяются A_1, A_2 и B_1, B_2 . Для существования ненулевого решения системы (2.5) необходимо выполнение условия

$$(2.7) \quad |M(p_k)| = 0$$

Уравнение (2.7) представляет собой полином степени $2L$, поэтому есть $2L$ корней p_k , при которых существуют ненулевые пары $X_k^{(1)}, X_k^{(2)}$, удовлетворяющие системе (2.5). Таким образом, в (2.3) $N = 2L$. Из (2.5) можно выразить $X_k^{(1)} = \Phi_k X_k^{(2)}$. Тогда из неоднородной системы (2.6) N линейных алгебраических уравнений относительно N неизвестных $X_k^{(2)}$ ($k = 1, \dots, 2L = N$) определяются неизвестные $X_k^{(2)}$, а по (2.3) строятся функции механического напряжения $q_1(x)$ и плотности заряда $q_2(x)$. Формулы (2.1)–(2.4) работы [4] позволяют по известным $q_1(x)$ и $q_2(x)$ получить перемещения $u(x, z)$, $v(x, z)$, $w(x, z)$ и потенциал $\varphi(x, z)$ в области $-\infty \leq x \leq \infty$, $z \leq 0$.

3. В качестве примера приводятся расчеты для перемещения и потенциала на границе электроупругой полуплоскости кристалла кварца с периодической системой электродов. Граница полуплоскости принадлежит поверхности ST -среза кварца. Расчеты проводились для простейшей аппроксимации $L = 2$ при следующих значениях параметров: $\omega = 20$ л МГц, $l = 0,1579 \cdot 10^{-8}$ м, $\eta = 1$, $F_1 = 0,194 \cdot 10^{-11}$ м, $F_2 = 0$, т. е. полагалось, что период решетки равен длине волны Релея на свободной поверхности ST -среза кварца, а все электроды заземлены. Безразмерная координата края электрода α изменялась с шагом 0,1 от 0,1 до 3,1 и при каждом фиксированном α вычислялись функции $w(x, 0)$, $\varphi(x, 0)$. Установлено, что амплитуды смещения $w(x, 0)$ и потенциала $\varphi(x, 0)$ достигают максимальных значений при $\alpha = 0,6$. Из этой величины следует исходить при проектировании таких устройств, как резонаторы, где необходимо достижение максимальных амплитуд на заданной частоте.

4. Изложенный метод решения периодической задачи для электроупругой полуплоскости позволяет решать и более общую задачу без предположения малости касательных напряжений под электродами по сравнению с нормальными напряжениями. Двумерная краевая задача при этом сводится к системе трех интегральных уравнений вида (1.4), соответственно усложняется система (2.1), а также увеличивается количество и размерности алгебраических систем (2.4)–(2.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фильтры на поверхностных акустических волнах / Под ред. Г. Мэттьюза. М.: Радио и связь. 1981. 472 с.
2. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука. 1981. 287 с.
3. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука. 1966. 624 с.
4. Финкельштейн А. Б. Волны в электроупругой полуограниченной среде с периодической системой электродов // Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высш. шк. Естеств. науки. 1986. № 1. С. 59–62.
5. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука. 1979. 320 с.