

УДК 539.3:534.1

**СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА
С КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ
ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ**

Алексеева Л. А.

Для исследования напряженно-деформированного состояния протяженных выработок неглубокого заложения при динамических воздействиях рассматривается задача стационарных колебаний упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью при действии периодической вдоль оси нагрузки. Методом наложения решений с использованием контурных интегралов типа Фурье и рядов Фурье—Бесселя задача сводится к решению системы уравнений с определителем нормального типа. Рассматриваются вопросы существования и единственности решения, исследуются его особенности в зависимости от скорости движущейся нагрузки или ее периода. Показано, что при скоростях выше релейской в среде возникают поверхностные релейские волны.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропное упругое полупространство $x \leq h, h > 0$ с параметрами Ламе λ, μ, ρ , ослабленное круговой цилиндрической полостью радиуса $R, R < h$ (фиг. 1), ось OZ которой параллельна границе полупространства. Свяжем с осью цилиндра цилиндрическую систему координат (O, r, θ, z) , полярная ось которой совпадает с осью OX . На полости цилиндра действует стационарная по t периодическая по z нагрузка

$$(1.1) \quad \sigma_{rj} = 2\mu \varepsilon_j p_j(\theta) e^{i(\xi z - \omega t)}$$

$$j = r, \theta, z; \varepsilon_r = 1, \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = i$$

допускающая разложение в ряд Фурье

$$(1.2) \quad p_j(\theta) = \sum_n p_j^n e^{in\theta}$$

На границе полупространства также может действовать нагрузка, допускающая преобразование Фурье по y

$$(1.3) \quad \sigma_{xj} = \mu \varepsilon_j f_j(y) e^{i(\xi z - \omega t)}, \quad j = x, y, z$$

$$\varepsilon_x = 1, \varepsilon_y = \varepsilon_z = i, \quad f_j(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j^*(\eta) e^{i\eta y} d\eta$$

Требуется определить напряженно-деформированное состояние среды.

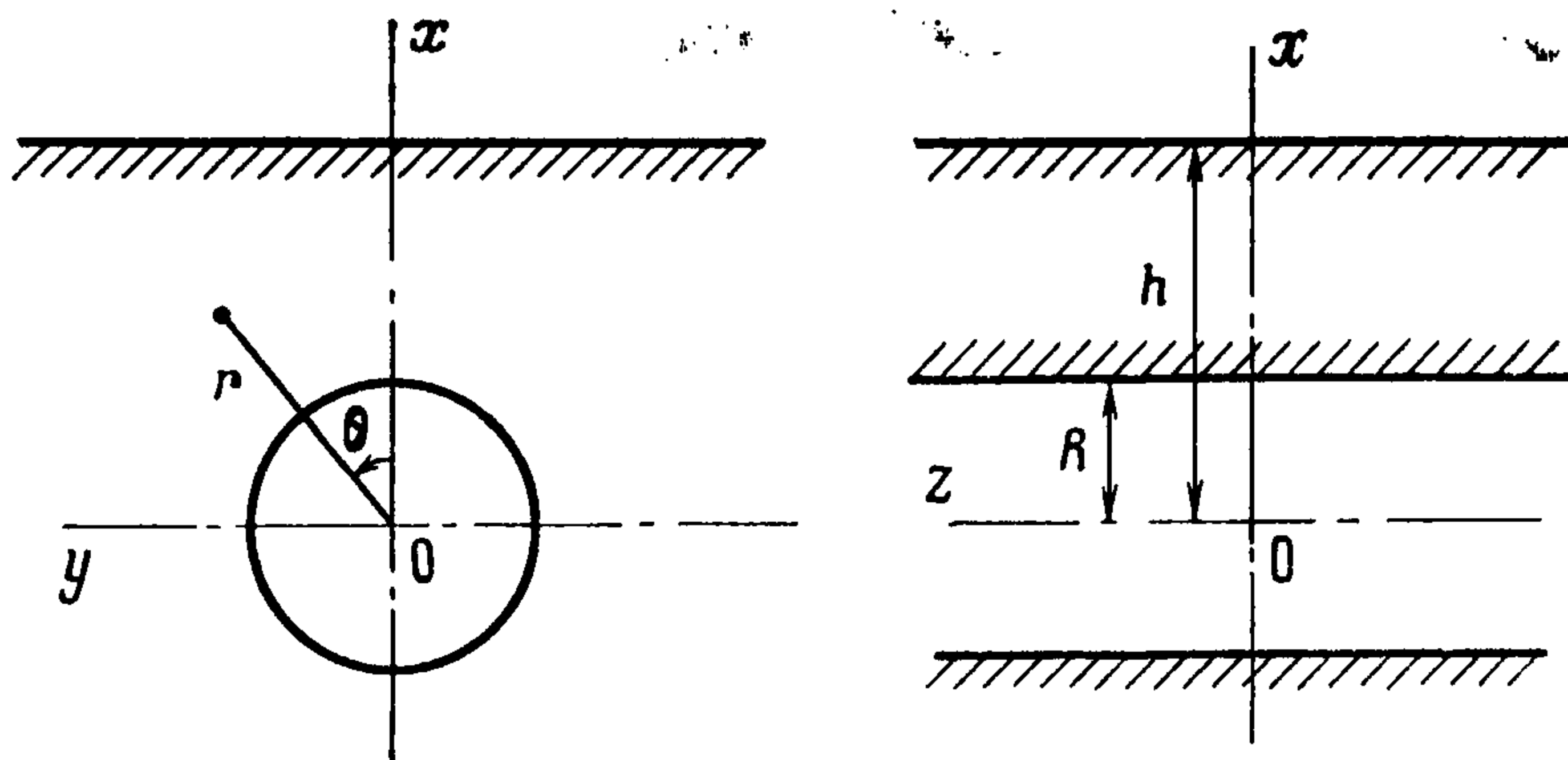
Для решения задачи воспользуемся потенциалами Ламе Φ, Ψ

$$(1.4) \quad u = \text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi$$

u — вектор смещения. Граничные условия (1.1), (1.3) имеют установившийся характер, поэтому потенциалы Φ, Ψ имеют ту же зависимость от времени. В дальнейшем множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем.

В цилиндрической системе координат представим Ψ в виде [1]

$$(1.5) \quad \Psi = \psi_1 e_z + \text{rot } (\psi_2 e_z)$$



Фиг. 1

Функции Φ , ψ_1 , ψ_2 удовлетворяют уравнениям Гельмгольца [1, 2]

$$(1.6) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha_j^2 - \xi^2 \right) \varphi_j = 0, \quad j = 0, 1, 2$$

$$(\varphi_0, i\varphi_1, i\varphi_2) = (\Phi, \psi_1, \psi_2); \quad \alpha_0 = \alpha = \omega/c_p$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = \omega/c_s; \quad c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_s = \sqrt{\mu/\rho}$$

(c_p , c_s — скорости распространения объемных и сдвиговых волн).

Используя закон Гука для изотропной среды

$$(1.7) \quad \sigma_{ij} = \lambda \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

и соотношения (1.4), (1.5), запишем граничные условия для φ_j

$$(1.8) \quad \left(2\alpha^2 - \beta^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi_0 + 2i \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} - 2\xi \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = f_x$$

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\varphi_0 - \xi \varphi_2) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) i\varphi_1 = if_y$$

$$2i\xi \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \xi \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - i(2\xi^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = if_z \quad \text{при } x = h$$

$$(1.9) \quad (\xi^2 - 1/2\beta^2 + D_1) \varphi_0 - iD_2 \varphi_1 + \xi(\beta^2 - \xi^2 + D_1) \varphi_2 = p_r$$

$$- D_2 \varphi_0 + i \left(\frac{1}{2}(\beta^2 - \xi^2) + D_1 \right) + \xi D_2 \varphi_2 = i\rho\theta$$

$$i\xi \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{\xi}{2r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + i \left(\frac{1}{2}\beta^2 - \xi^2 \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = ip_z \quad \text{при } r = R$$

$$D_1 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad D_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Представим φ_j в виде суперпозиции волн, излучаемых полостью и границей полупространства

$$(1.10) \quad \varphi_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_j^n Z_n(\nu_j, r) e^{in\theta} + \int_L \Lambda(\eta) d\eta$$

$$\Lambda(\eta) = a_j(\eta) \exp(iy\eta + (x-h)\sqrt{\eta^2 - \nu_j^2}), \quad \nu_j = \sqrt{\alpha_j^2 - \xi^2}$$

$$Z_n(\nu_j, r) = i\pi (\nu_j/2)^{|n|} H_n^{(1)}(\nu_j r) / \|\|n\| - 1\|!, \quad \nu_j \neq 0$$

$$Z_0(0, r) = \ln r; \quad Z_n(0, r) = (\text{sgn } n)^n r^{-|n|}, \quad n \neq 0$$

Как известно [1—3], слагаемые рядов Фурье — Бесселя в (1.10) — частные решения уравнений Гельмгольца (1.6); функции Ганкеля $H_n^{(1)}(\nu_j r)$ удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда при $r \rightarrow \infty$, если

$$(1.11) \quad \text{Im } \nu_j \geq 0, \quad \nu_j \in [0, -\infty)$$

Для волн, излученных границей полупространства, должны выполняться условия затухания

$$(1.12) \quad \operatorname{Im} \sqrt{\eta^2 - v_j^2} \leq 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\eta^2 - v_j^2} \geq 0$$

Эти условия накладывают ограничения на выбор контура интегрирования L и его возможные трансформации в плоскости комплексного η : $\eta = \eta_1 + i\eta_2$. Для того чтобы получить формальное решение задачи, пока предположим, что L совпадает с действительной осью η_1 . В дальнейшем для обоснования решения потребуется трансформация L в силу ряда особенностей поведения подынтегральных функций на действительной оси η_1 .

Отметим также, что при $\xi = \alpha_j$ одно или два из уравнений (1.6) становятся уравнениями Лапласа. Класс решений, первые и вторые производные которых убывают на бесконечности, описывается функциями $Z_n(0, r) e^{in\theta}$. Множитель при $H_n^{(1)}(v_j r)$ выбран для удобства, так как, исходя из асимптотики функций Ганкеля, можно показать, что [4]

$$(1.13) \quad \lim_{v \rightarrow 0} Z_n(v, r) = Z_n(0, r), \quad \lim_{v \rightarrow 0} (Z_0(v, r) - \ln v) = Z_0(0, r)$$

Это свойство непрерывности позволяет получить ряд удобных идентичных формул для введенных функций, а также необходимо при исследовании поведения решения при $\xi \rightarrow \alpha_j$.

Таким образом, соотношения (1.10) удовлетворяют уравнениям (1.6) (в предположении законности операции почленного дифференцирования рядов и функций под знаком интеграла). Неизвестные коэффициенты a_j^n и функции $a_j(\eta)$ подлежат определению.

2. Сосредоточенный на оси периодический по z источник. Предположим, что a_j^n известны. Последнее верно, если вместо полости рассмотреть сосредоточенный на оси z источник, потенциалы которого можно задать аналогичным рядом Фурье — Бесселя. Для определения $a_j(\eta)$ перейдем к декартовой системе координат в соотношениях (1.10). Воспользуемся разложением, справедливым при $x > 0$

$$(2.1) \quad Z_n(v, r) e^{in\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\eta, v) \frac{\exp(iy\eta - x\sqrt{\eta^2 - v^2})}{\sqrt{\eta^2 - v^2}} d\eta$$

с теми же соотношениями на знаки радикалов, где

$$(2.2) \quad f_n(\eta, v) = \frac{1}{||n| - 1|} \left(\frac{\eta + \operatorname{sgn} n \sqrt{\eta^2 - v^2}}{2} \right)^{|n|}, \quad |n| + |v| \neq 0$$

При $n = 0, v = 0$ будем пользоваться формулой

$$(2.3) \quad \ln r = \ln h - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iy\eta - x|\eta|} - e^{-h|\eta|}}{|\eta|} d\eta$$

Положим $f_0(\eta, 0) = -1/2$. Формулы (2.1), (2.3) — следствие аналогичной формулы для $H_n(vr) e^{in\theta}$ в [5], для $v = 0$ могут быть получены предельным переходом (1.13). При $v = 0$ (2.1) можно получить иначе, используя формулу 3.384(4) в [6].

Подставляя эти соотношения в (1.10), получим представление потенциалов в окрестности плоской границы $0 < x \leq h$ в декартовой системе координат. Далее следует использовать граничные условия (1.8), сгруппировать члены при $e^{iy\eta}$ и в силу произвольности y приравнять коэффициенты при $e^{iy\eta}$ в левой и правой частях. В результате получим систему линейных уравнений относительно a_j^n и $a_j(\eta)$, разрешая которую будем

ИМЕТЬ

$$(2.4) \quad a_j(\eta) = \sum_{k=0}^2 \frac{\Delta_j^k(\eta)}{\Delta_-(\eta)} A_k(\eta) + \frac{\Delta_j(\eta)}{\Delta_-(\eta)}$$

$$(2.5) \quad A_k(\eta) = \frac{\exp(-h \sqrt{\eta^2 - v_k^2})}{v_1^2 \sqrt{\rho^2 - \beta^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k^n f_n(\eta, v_k)$$

$$\Delta_{\pm} = 4\rho^2 \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho^2 - \beta^2} \pm (2\rho^2 - \beta^2)^2$$

$$\Delta_0^0 = v_1^2 \Delta_+ \sqrt{\rho^2 - \beta^2} / \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}$$

$$\Delta_0^1 = 4v_1^2 \eta \sqrt{\rho^2 - \beta^2} (2\rho^2 - \beta^2)$$

$$\Delta_0^2 = 4v_1^2 \xi (\rho^2 - \beta^2) (\beta^2 - 2\rho^2), \quad \Delta_1^0 = 2\beta^2 v_1^{-2} \Delta_0^1$$

$$\Delta_1^1 = v_1^2 (2\rho^2 - \beta^2)^2 + 4 \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho^2 - \beta^2} (\eta^2 (\beta^2 + \xi^2) - \xi^2 v_1^2)$$

$$\Delta_1^2 = -8\xi \eta \beta^2 (\rho^2 - \beta^2) \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}, \quad \Delta_2^0 = -v_1^{-2} \Delta_0^2$$

$$\Delta_2^1 = \beta^{-2} \Delta_1^2, \quad \Delta_2^2 = \Delta_1^1 - 2v_1^2 (2\rho^2 - \beta^2), \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2$$

Слагаемые от действующих на плоской границе нагрузок

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= (\beta^2 - 2\rho^2) f_x^* + 2 \sqrt{\rho^2 - \beta^2} (\eta f_y^* + \xi f_z^*) \\ v_1^2 \Delta_1 &= \beta^2 [(2\rho^2 - \beta^2) f_y^* - 2\eta \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} f_x^*] + \\ &+ 2\xi (2\rho^2 - \beta^2 - 2\sqrt{\rho^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho^2 - \beta^2}) (\eta f_x^* - \xi f_y^*) \\ v_1^2 \Delta_2 &= \sqrt{\rho^2 - \beta^2} [(2\rho^2 - \beta^2) f_z^* + 2\xi \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} f_x^*] + \\ &+ \frac{\eta (\eta f_z^* - \xi f_y^*)}{\sqrt{\rho^2 - \beta^2}} (4 \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho^2 - \beta^2} - 2\rho^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

Из соотношений (2.4) следует, что подынтегральные функции имеют особенности на η_1 , зависящие от ξ . Эти особенности и выбор контура L будут рассмотрены в п. 4. Сейчас предположим, что контур L таков, что он почти всюду, кроме множества малой меры, совпадает с осью η_1 , на L выполнены условия излучения (1.12), подынтегральные функции непрерывны и дважды дифференцируемы по x и y .

3. Дифракция на полом цилиндра. Разрешающая система уравнений. Рассмотрим случай $v_j \neq 0$, $j = 0, 1, 2$. Для определения a_j^n воспользуемся граничными условиями (1.9). Для этого перейдем к цилиндрической системе координат в формулах (1.10). Известно [1, 3], что

$$(3.1) \quad e^{ikr \cos \zeta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr) e^{in\zeta}$$

Соотношения (3.1) справедливы и при комплексном ζ , откуда следует

$$\begin{aligned} (3.2) \quad \exp(iy\eta + x \sqrt{\eta^2 - v_j^2}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(v_j r) e^{in\theta} \left(\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - v_j^2}}{v_j} \right)^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n^0(v_j, r) e^{in\theta} f_n(\eta, v_j) \\ Z_n^0(v, r) &= ||n| - 1|! (2/v)^{|n|} J_n(vr) \end{aligned}$$

Подставляя (3.2) в (1.10), получим

$$(3.3) \quad \varphi_j = \sum_n a_j^n Z_n(v_j, r) e^{in\theta} + Z_n^0(v_j, r) e^{in\theta} \left(\sum_m \sum_{k=0}^2 a_k^m C_{jm}^{kn} + C_j^n \right)$$

Здесь

$$(3.4) \quad C_{jm}^{kn} = \int_L \frac{\Delta_j^k(\eta) f_n(\eta, v_j) f_m(\eta, v_k) E_{kj}(\eta)}{v_1^2 \sqrt{\rho^2 - \beta^2 \Delta_-(\eta)}} d\eta$$

$$C_j^n = \int_L \frac{\Delta_j(\eta) f_n(\eta, v_j) \exp(-h \sqrt{\eta^2 - v_1^2})}{v_1^2 \sqrt{\rho^2 - \beta^2 \Delta_-(\eta)}} d\eta$$

$$E_{kj}(\eta) = \exp(-h(\sqrt{\eta^2 - v_j^2} + \sqrt{\eta^2 - v_k^2}))$$

Используя (3.3) в граничных условиях (1.9), группируя члены при $e^{in\theta}$ и приравнявая коэффициенты Фурье в левой и правой частях уравнений, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения a_j^n

$$(3.5) \quad \sum_{j=0}^2 B_k^j(Z_n) a_j^n = - \sum_{j=0}^2 B_k^j(Z_n^0) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^2 a_l^m C_{jm}^{ln} -$$

$$- \sum_{j=0}^2 B_k^j(Z_n^0) C_j^n + p_k^n, \quad k=0, 1, 2, \quad n=0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Здесь через $B_k^j(Z_n)$ обозначено:

$$B_0^0 = (1/2(v_0^2 R^2 - \xi^2 R^2) - n^2) Z_n(v_0, R) + v_0 R Z_n'(v_0, R)$$

$$B_0^1 = n(v_0 R Z_n'(v_0, R) - Z_n(v_0, R))$$

$$B_0^2 = v_0 \xi R^2 Z_n'(v_0, R)$$

$$B_1^0 = n(Z_n(v_1, R) - v_1 R Z_n'(v_1, R))$$

$$B_1^1 = (1/2 v_1^2 R^2 - n^2) Z_n(v_1, R) + v_1 R Z_n'(v_1, R)$$

$$B_1^2 = -n \xi R Z_n(v_1, R)$$

$$B_2^2 = \xi R ((v_1^2 R^2 - n^2) Z_n(v_1, R) + v_1 R Z_n'(v_1, R))$$

$$B_2^1 = n \xi R (Z_n(v_1, R) - v_1 R Z_n'(v_1, R))$$

$$B_2^2 = 1/2 v_1 R (v_1^2 R^2 - \xi^2 R^2) Z_n'(v_1, R)$$

$$J_n'(v, R) = dJ(z)/dz |_{z=vR}$$

аналогично для H_n' ; $B_k^j(Z_n^0)$ получим заменой Z_n на Z_n^0 .

Решением системы (3.5) заканчивается формальное решение задачи. Из известных потенциалов (1.10) по формулам (1.4), (1.7) можно найти смещения и напряжения в любой точке среды.

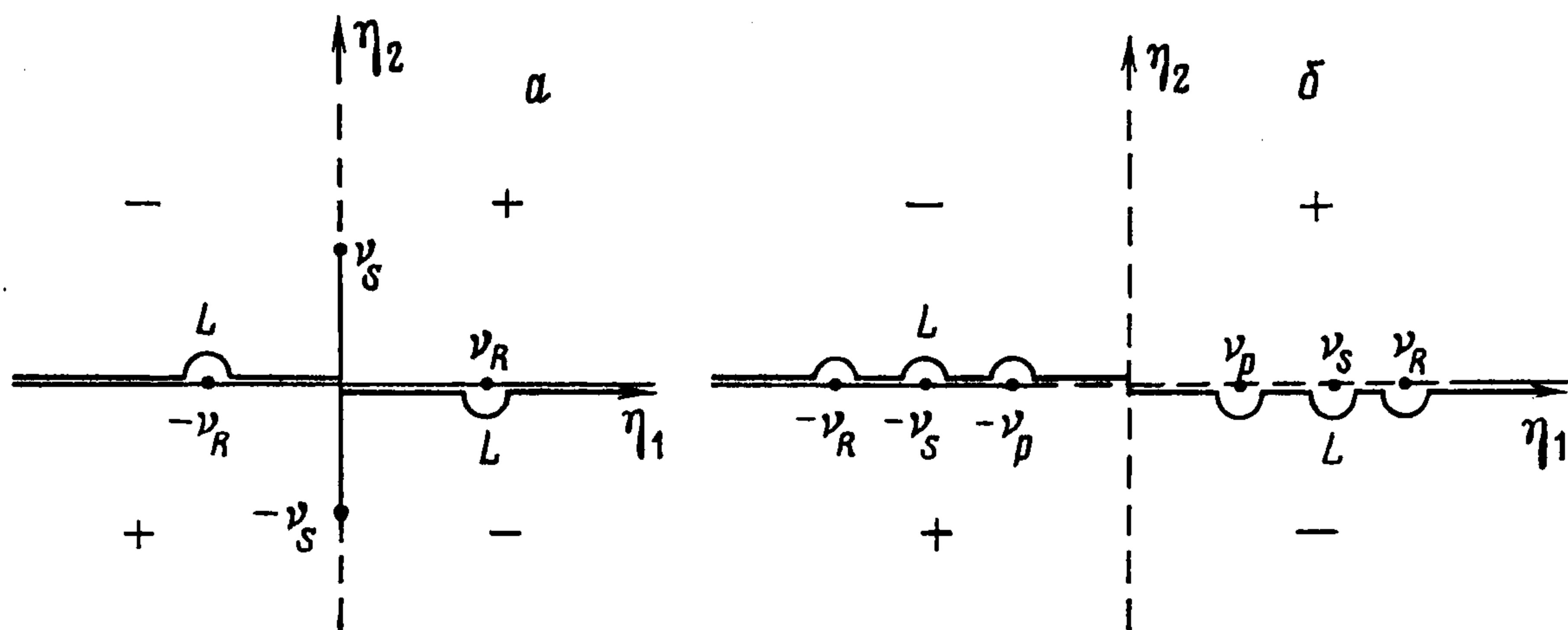
4. О выборе контура интегрирования L . Использование формального преобразования Фурье по y на границе $x = h$ при решении данной задачи наталкивается на ряд принципиальных трудностей, поскольку подынтегральные функции на действительной оси, как следует из соотношений (2.5), имеют особенности типа полюсов первого и даже второго порядков, а также точки ветвления, положение которых зависит от ξ . Таким образом, условия существования обратного преобразования Фурье не выполнены, вследствие чего операция, например, дифференцирования под знаком интеграла недопустима. Однако трансформация контура L в окрестности особых точек позволяет представить решение в виде контурных интегралов типа Фурье, подынтегральные функции которых непрерывны, дифференцируемы и удовлетворяют условиям излучения вдоль L (1.11). Поскольку имеются точки ветвления, необходимо выделить области однозначных аналитических ветвей и с учетом этих областей строить контур.

Из (2.5) следует, что функции $a_j(\eta)$ имеют особенности при

$$(4.1) \quad v_1 = 0, \quad \xi = \beta$$

$$(4.2) \quad \rho = \alpha_j, \quad \eta = \pm \sqrt{\alpha_j^2 - \xi^2}, \quad j = 1, 2$$

$$(4.3) \quad \Delta_- = 0, \quad \eta = \pm v_R = \pm \sqrt{\gamma^2 - \xi^2}, \quad \gamma = \omega/c_R$$



Фиг. 2

где c_R — скорость волны Релея в полупространстве, определяемая из решения уравнения (4.3), которое имеет два действительных корня $\pm\gamma$ [2], удовлетворяющих условию: $\alpha < \beta < \gamma$, $c_R < c_s < c_p$. Для периодических нагрузок $\omega/|\xi| = c$ — скорость распространения вдоль оси z . Если $|\xi| > \gamma$, т. е. $c < c_R$, подынтегральные функции не имеют особенностей на η_1 и в качестве контура L можно взять действительную ось η_1 .

При $c = c_R$ имеем $\Delta_-(0, \gamma) = \Delta'_-, \eta(0, \gamma) = 0$. В точке $\eta = 0$ — полюс второго порядка. Но, поскольку функции $a_j(\eta)$ аналитичны в окрестности этой точки и соотношения (2.1) допускают трансформацию контура в окрестности $\eta = 0$, контур L должен обойти эту точку, например по ε -полуокружности, $0 < \varepsilon < \gamma - \beta$. Направление обхода не существенно, поскольку не влияет на величину интеграла. Заметим, что такую трансформацию контура интегрирования должна допускать действующая нагрузка $f_j(y)$ (1.3). Последнее справедливо для широкого класса нагрузок, в частности финитных, с конечным носителем.

При $c_R < c < c_s$ ($\beta < \xi < \gamma$) подынтегральные функции на оси η_1 в точках $\pm v_R$ имеют полюс первого порядка. Для этого случая на фиг. 2, а изображен лист римановой поверхности функции $F(\eta, v_j) = \sqrt{\eta^2 - v_j^2}$, $\text{Re } F \geq 0$ с разрезами $\eta_1 = 0$, $|\eta_2| > |v_j|$ от точек ветвления $\eta = \pm i|v_j|$, на которых $\text{Re } F = 0$. Знаки в квадрантах соответствуют знаку $\text{Im } F$. В этом случае значение интегралов зависит от направления обхода особенностей $\pm v_R$, которые следует обойти во втором и четвертом квадрантах, где удовлетворяются условия (1.12) [6].

При $c \rightarrow c_s$, т. е. при $\xi \rightarrow \beta$, $\Delta(\eta, \xi) \rightarrow \Delta(\eta, \beta) = 0$. Из соотношений (2.5) следует, что потенциалы сдвиговых волн $\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \infty$, в то время как потенциал объемных волн стремится к конечному пределу.

При $c \rightarrow c_s$, а также $c \rightarrow c_p$ функция $a_j(\eta)$ содержит в знаменателе $F(\eta, v_j)$, причем

$$\lim_{v_j \rightarrow 0} F(\eta, v_j) = \sqrt{\eta^2} = |\eta| \text{ для } \eta = \eta_1$$

Трансформировать контур в окрестности $\eta = 0$, как было сделано в случае $c \rightarrow c_R$, не удастся, поскольку по условиям (1.12) $\sqrt{\eta^2} = \eta$ при $\eta_1 > 0$, $\sqrt{\eta^2} = -\eta$ при $\eta_1 < 0$. Поэтому перейти из правой полуплоскости в левую с непрерывным изменением $\sqrt{\eta^2}$ вдоль L , не переходя через $\eta = 0$, нельзя. В точке $\eta = 0$ функции имеют неинтегрируемую особенность типа $1/|\eta|$, поэтому и при $c \rightarrow c_p$ получим $\varphi_0 \rightarrow \infty$, предел же φ_1, φ_2 конечен.

Если $c > c_s$, $c \neq c_p$, кроме полюсов первого порядка $\eta = \pm v_R$ на оси η_1 появляются интегрируемые особенности $\pm v_s = \pm \sqrt{\beta^2 - \xi^2}$, а также $\pm v_p = \pm \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}$, если $c > c_p$, которые являются точками ветвления

функций $F(\eta, \nu_j)$. На фиг. 2, б, где $c > c_p$, лист римановой поверхности F , на которой $\operatorname{Re} F \geq 0$, фиксирован разрезами: $\eta_2 = 0$, $|\eta_1| < \nu_s$ и $\eta_1 = 0$. По-прежнему $\operatorname{Im} F \leq 0$ во втором и четвертом квадрантах, где и следует обходить особенности, как показано на фиг. 2, б.

Для выбранного таким образом контура подынтегральные функции непрерывны и дифференцируемы по x, y на L , операция многократного дифференцирования под знаком интеграла допустима в силу экспоненциального затухания подынтегральных функций при $|\eta| \rightarrow \infty$ на L и наличия интегрируемой мажоранты, не зависящей от x, y (п. 5).

Заметим, что вычислять интегралы (3.4) вдоль L неудобно. Пользуясь теорией вычетов, интегральное слагаемое в (1.10) можем представить в виде (при $c > c_R$):

$$\int_L \Lambda_j(\eta) d\eta = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_j(\eta_1) d\eta_1 + i\pi \sum_{k=1}^2 (-1)^k \operatorname{Res} a_j(\eta) |_{\eta=(-1)^k \nu_R} \times \\ \times \exp(iy(-1)^k \nu_R + (x-h)\sqrt{\gamma^2 - \alpha_j^2})$$

Первый интеграл описывает затухающие при $|y| \rightarrow \infty$ волны, второй — волны Релея, которые возникают при $c > c_R$. Этим же правилом следует воспользоваться при вычислении коэффициентов C_{jm}^{kn}, C_j^n (3.4), (3.5).

5. О разрешимости системы уравнений. Обоснование решения периодической задачи. Бесконечную систему уравнений (3.5) для определения коэффициентов a_j^n можно привести к системе с определителем нормального типа. Покажем это. Введем новые неизвестные

$$(5.1) \quad b_k^n = \sum_{j=0}^2 B_k^j(Z_n) a_j^n$$

Обозначим $D_k^j(Z_n)$ матрицу, обратную $B_k^j(Z_n)$. Имеем

$$(5.2) \quad b_k^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^2 G_{km}^{ns} b_s^m - \sum_{s=0}^2 B_k^s(Z_n^0) C_s^n + p_k^n \\ G_{km}^{ns} = \sum_{j=0}^2 \sum_{l=0}^2 B_k^j(Z_n^0) D_l^s(Z_m) C_{jm}^{ln}$$

Из соотношений (2.5) следует, что в силу выбора L на L справедливы оценки

$$(5.3) \quad |f_n(\eta, \nu)| < |\nu/2|^{|n|} / ||n| - 1||, |\eta| < \nu \\ |f_n(\eta, \nu)| < |\eta|^{|n|} / ||n| - 1||, |\eta| > \nu \\ |\Delta_j^k/\Delta_-| < C, \rho < \rho_0; |\Delta_j^k/\Delta_-| < C\rho, \rho > \rho_0$$

Здесь и ниже C, ρ_0 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от n, m, η . Кроме того, для любого $\delta, 0 < \delta < \min(2, h - R)$ существует $C_\delta > 0$, такое, что вдоль L

$$(5.4) \quad |E_{kj}(\eta)| < C_\delta \exp(-2(h - \delta)|\eta|).$$

Эти соотношения позволяют оценить интегралы C_{jm}^{kn}, C_j^n . Например

$$|C_{jm}^{kn}| < C \frac{||n| + |m| + 1||}{(2h')^{|n|+|m|} ||n| - 1|| ||m| - 1||}, \quad h' = h - \delta$$

Для достаточно больших $n > N, m > M$ верны следующие оценки:

$$|B_k^j(Z_n^0)| < C |n| R^{|n|}, |D_k^j(Z_m)| < CR^{|m|}$$

Поэтому

$$|G_{km}^{nl}| < C \frac{|n| + |m| + 1}{||n| - 2|| ||m| - 1||} s^{|n|+|m|}, \quad s = \frac{R}{2h'}$$

Отсюда

$$\sum_{\substack{|n| > N \\ |m| > M}} |G_{km}^{nl}| < C \sum_{k=0, m=1} \frac{(k+m)!}{(m-1)! k!} s^{k+m} = C \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{s}{1-s}\right)^m = C \frac{s}{1-2s}$$

Последний ряд сходится в силу выбора δ , т. е. система (5.2) имеет определитель нормального типа. Свободные члены системы ограничены, так как $h' > R$ и

$$|C_j^n B_k^j(Z_n^0)| < C |n| (|n| + 1)(R/h')^{|n|}$$

Коэффициенты $p_k^n \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$ по условию. Таким образом выполняются условия существования и единственности ограниченного решения системы уравнений (5.2), которое можно найти методом редукции [7]. Можно использовать метод последовательных приближений, который эквивалентен методу последовательных отражений.

Порядок убывания по n коэффициентов b_k^n не хуже порядка p_k^n при $|n| \rightarrow \infty$. Поэтому система уравнений (5.1) удовлетворяет оценке

$$|a_j^n Z_n(v_j, r)| < C (R/r)^{|n|} |n|^{-1-s}$$

если $p_k^n = O(|n|^{-s-1})$, $s > 0$, из которой следует равномерная сходимость рядов Фурье — Бесселя в (1.10) в области $r \geq R$, а также неравенство

$$|a_j^n f_n(\eta, v_j)| < C |R\eta|^{|n|} |n|^{-s} / |n|!$$

Поэтому на L

$$|A_j(\eta)| < C \exp(-h'|\eta|) \sum_{|n|} \frac{|R\eta|^{|n|}}{|n|!} \leq 2C e^{(R-h')|\eta|}.$$

Таким образом, интегралы в формулах (1.10) сходятся равномерно по x, y в области $x \leq h$. Аналогичные равномерные оценки можно получить для первых и вторых формальных производных рядов и интегралов и показать их равномерную сходимость. Тем самым показано существование и единственность решения поставленной задачи.

При построении решения знаки радикалов были выбраны из физических представлений. А именно, интегралы в (1.10) соответствуют разложению потенциалов по плоским волнам, распространяющимся в нижнее полупространство и затухающим на бесконечности. Поскольку функции $a_j(\eta)$ аналитичны с конечным числом особенностей, поэтому контур можно трансформировать переходя к эквивалентным контурам. Используя метод стационарной фазы, можно показать, что при $c < c_R$ соотношения (1.10) удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \varphi_j &= O(\sqrt{\rho}), \quad \partial\varphi_j/\partial\rho - iv_j\varphi_j = o(\sqrt{\rho}). \\ \rho &= \sqrt{(x-h)^2 + y^2} \end{aligned}$$

При $c > c_R$ та часть потенциалов, которая описывается рядами Фурье — Бесселя и интегралом в смысле главного значения, удовлетворяет условиям (5.5). Внеинтегральные слагаемые описывают поверхностные волны Релея постоянной амплитуды при $x = \text{const}$ независимо от y, z .

Интересно сравнить полученное решение с аналогичным в случае плоской деформации. При плоской деформации, как показано в [6, 8], стационарная нагрузка на круговой полости генерирует релеевские волны в полуплоскости (это ясно и из приведенного выше решения), что соответствует случаю $\xi = 0$ ($c = \infty$). В полупространстве же релеевские волны возникают лишь в случае, если период по z действующей стационарной нагрузки больше $2\pi/\gamma$ ($\xi < \gamma$).

Если рассмотреть, например, задачу стационарной дифракции на полости в полупространстве гармонических волн, потенциалы которых задаются формулами

$$\Phi_k^0 = \exp(i\alpha_k((ex) - c_k t)), \quad x = (x, y, z)$$

(k — фиксированный индекс, e — единичный вектор направления распространения волны), то, вводя потенциалы отраженных волн Φ_j и положив в силу линейности задачи $\varphi_j = \Phi_j^0 + \Phi_j$, для определения Φ_j придем к изложенному выше решению. Поскольку $\alpha_j < \gamma$ ($j = 0, 1, 2$), $e_z = \cos A$, где A — угол между вектором e и осью OZ , имеем $|e_z| \leq 1$, поэтому $\xi = \alpha_j e_z$, $\xi < \gamma$. Значит, при дифракции периодических волн на цилиндрической полости в полупространстве также возникают релеевские волны.

Если рассмотреть аperiodические по z нагрузки, в пространстве изображений Фурье по z возникает эта же задача. Можно показать, что в пространстве комплексных переменных (ξ, η) существует двумерная поверхность, на которой выполнены условия (1.11), (1.12), и интегрирование следует вести по этой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит- 1960. 930 с.
2. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2. М.; Л.: Гостехиздат. 1973. 998 с.
3. Гузь А. Н., Головчан В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка. 1972. 254 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука. 1979. 830 с.
5. Алексеева Л. А. О колебаниях упругой полуплоскости при действии стационарного источника цилиндрических волн // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1983. № 5. С. 1—5.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука. 1983. 750 с.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз. 1962. 708 с.
8. Алексеева Л. А. О колебаниях упругой полуплоскости, ослабленной круговым отверстием // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1984. № 1. С. 1—5.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
25.V.1985