

УДК 532.5

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНКЕ

Рыжов О. С., Савенков И. В.

Рассматривается распространение волнового пакета, порожденного точечным источником в пограничном слое на плоской пластинке. Жидкость полагается несжимаемой, а расстояния от передней кромки пластинки выбираются настолько большими, что число Рейнольдса можно считать стремящимся к бесконечности. Поле возмущенного движения строится в рамках линеаризованной теории пограничного слоя с самоиндуцированным давлением при помощи разложения в интегралы Лапласа по времени и Фурье по двум пространственным переменным. Для вычисления обратных преобразований применяется метод перевала.

Пульсационное движение жидкости в волновом пакете (ламинарном вихревом пятне) характеризуется непрерывным частотным спектром. Второе отличительное свойство волнового пакета состоит в модулировании колебаний уже в линейной стадии их распространения, благодаря чему амплитуда имеет ярко выраженный максимум в центре возмущенной области. Взаимодействие волн с непрерывным распределением частот и длин приводит к тому, что спектр комбинационных тонов также непрерывен. Как свидетельствуют данные опытов по наложению нескольких изолированных гармоник [1]¹, с увеличением амплитуды колебаний и наступлением нелинейной стадии процесса наиболее быстро возрастает амплитуда именно комбинационных тонов. Рост амплитуды основных гармоник совершается медленнее. Этот факт ведет к заключению, что в волновом пакете переход ламинарного движения жидкости в турбулентное должен совершаться весьма бурно. Действительно, измерения показывают [2], что нелинейное усиление первоначально монохроматической волны Толлмина — Шлихтинга из неустойчивого диапазона частот, сопровождающееся появлением турбулентных пульсаций, длится значительно дольше по сравнению со взрывным развалом волнового пакета и превращением его в турбулентное пятно.

Весьма вероятно, что турбулентные пятна вырастают из волновых пакетов в конце нелинейной стадии ламинарного движения [3, 4]. В пользу последнего предположения свидетельствует отмеченное в [5] определенное сходство между изолированным пятном в ламинарном потоке и линейным волновым пакетом из опытов [6]. Происходящие внутри пятна пульсации в диапазоне частот, присутствием самовозбуждающимся волнам Толлмина — Шлихтинга, усиливают это сходство.

1. Уравнения и граничные условия. Чтобы упростить математический анализ свойств волновых пакетов, сделаем предположение, что число Рейнольдса $R \rightarrow \infty$. Тогда исходные уравнения Навье — Стокса асимптотически сводятся к более простым уравнениям Прандтля с подлежащим определению самоиндуцированным давлением [7—9]. Применительно к нестационарному трехмерному пограничному слою в несжимаемой жидкости на плоской пластинке названные уравнения гласят [10, 11]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}$$

¹ Каганов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Эксперименты по нелинейному взаимодействию волн в пограничном слое. Препринт № 16. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР. 1978. 35 с.

Здесь t — время; x, y, z — декартовы координаты пространства; u, v, w — составляющие вектора скорости, которые отсчитываются в специальной безразмерной системе единиц. Как показывают условия срачивания, на внешнем краю рассматриваемой области

$$(1.2) \quad u - y \rightarrow A(t, x, z), \quad w \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty$$

а самоиндуцированное давление p связано с толщиной вытеснения A соотношением

$$(1.3) \quad p(t, x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A(t, \xi, \zeta) / \partial \xi^2}{[(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}} d\xi$$

Будем считать, что возмущения в пограничном слое вносятся локализованным импульсом через небольшое отверстие в пластинке. В этом случае

$$(1.4) \quad u = w = 0, \quad v = \delta v_0(t, x, z) \text{ при } y = 0$$

причем функция v_0 отлична от нуля только при малых $t > 0$ внутри круга $r = \sqrt{x^2 + z^2} < r_0$. Вверх по потоку от источника

$$(1.5) \quad u \rightarrow y, \quad p \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty$$

Сформулированная краевая задача весьма точно моделирует условия опытов, за тем исключением, что измерения проводятся при умеренных числах Рейнольдса [6]². Отсюда проистекает возможность только качественного, а не количественного сравнения теоретических результатов с экспериментальными данными.

Чтобы достичь их лучшего согласования, надлежит обратиться к системе линеаризованных уравнений Навье—Стокса. Такая попытка была предпринята в [12], однако обоснованность предположений, положенных в основу этой работы, остается под вопросом. Анализ возникающих трудностей дан в [13], где рассматривалась более простая структура двумерного волнового пакета, который генерируется при включении на пластинке вибратора, имеющего в плане вид вытянутой вдоль оси z бесконечной полосы.

Следуя работе [13] и принимая во внимание (1.2) и (1.5), положим

$$(1.6) \quad (p, A, u - y, v, w) = \delta (p', A', u', v', w')$$

и линеаризуем уравнения движения жидкости по амплитуде источника. Исключение толщины вытеснения из (1.2) и (1.3) ведет к соотношению

$$(1.7) \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(t, \xi, \zeta)}{[(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}} d\xi$$

при $y \rightarrow \infty$

2. Интегральные преобразования. Разложим введенные при помощи (1.6) новые искомые функции в интегралы Лапласа по времени и Фурье по пространственным координатам, лежащим в плоскости пластинки. Имеем

$$\begin{aligned} & [\bar{p}(\omega, k, m), \bar{u}(y; \omega, k, m), \bar{v}(y; \omega, k, m), \bar{w}(y; \omega, k, m)] = \\ & = \int_0^{\infty} e^{-\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(kx+mz)} \times \\ & \times [p'(t, x, z), u'(t, x, y, z), v'(t, x, y, z), w'(t, x, y, z)] \end{aligned}$$

В результате подстановки написанных формул в линеаризованные уравнения (1.1) и учета граничных условий (1.4), (1.5) и (1.7) получается

² Гилев В. М., Каганов Ю. С., Козлов В. В. Развитие пространственного волнового пакета в пограничном слое. Препринт № 34. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР. 1981. 46 с.

система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций-образов \bar{p} , \bar{u} , \bar{v} и \bar{w} . Интегрирование названной системы следует изложенной в [14] схеме, которая базируется на предельной форме преобразования Сквайра при $R \rightarrow \infty$. С этой целью для вещественных k и m определим приведенные частоту и волновое число посредством формул

$$(2.1) \quad \omega' = (k'/k)^{2/3}\omega, \quad k' = \text{sign } k |k|^{1/3} (k^2 + m^2)^{2/3}$$

принимая во внимание которые, выражению для избыточного давления можно придать вид

$$(2.2) \quad p' = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dm \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i(kx+mz)} \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{(ik)^{1/3} \bar{v}_0(\omega, k, m)}{(k^2 + m^2)^{1/2} F(\omega', k')} e^{\omega t} d\omega$$

Здесь \bar{v}_0 — образ источника из (1.4); величина F задается при помощи равенств

$$(2.3) \quad F = \Phi(\Omega) - Q(k'), \quad \Omega = \omega' (ik')^{-2/3} = \omega (ik)^{-2/3}$$

$$\Phi = \frac{d \text{Ai}(\Omega)}{d\Omega} I^{-1}(\Omega), \quad I = \int_{\Omega}^{\infty} \text{Ai}(z) dz, \quad Q = (ik')^{1/3} |k'|$$

причем $\text{Ai}(z)$ — функция Эйри, экспоненциально стремящаяся к нулю в секторе $-\pi/3 < \arg z < \pi/3$.

Приравненный нулю знаменатель подынтегрального выражения в (2.2) ведет к дисперсионному соотношению

$$(2.4) \quad \Phi(\Omega) = Q(k')$$

связывающему комплексную частоту ω с волновыми числами k и m собственных пространственных колебаний пограничного слоя. В точности такая же зависимость получается в пределе $R \rightarrow \infty$ для частоты ω' и волнового числа k' двумерных волн Толлмина — Шлихтинга [13]. В последнем случае соотношение (2.4) обладает счетным набором корней $\omega_n'(k') = (ik')^{2/3} \Omega_n(k')$, из которых только первый порождает неустойчивые возмущения, поскольку при $|k'| > k_*' = 1,0005$ имеет место неравенство $\text{Re } \omega_1'(k') > 0$.

Исходя из определений (2.1) для ω' и k' и (2.3) для инварианта Ω , заключаем, что из всей совокупности мод пространственных колебаний неустойчивой может быть также лишь первая с $\omega_1(k, m) = (ik)^{2/3} \Omega_1(k')$. Далее, при вещественных k и m в силу неравенства $|k| \leq |k'|$ справедлива оценка $|\text{Re } \omega_1(k, m)| \leq |\text{Re } \omega_1'(k')|$. Как показывают вычисления [15], в точках $|k'| = k_2'^* = 2,716$ и $|k'| = k_4'^* = 4,346$ находятся положительные максимумы функции $\text{Re } \omega_1'(k')$, причем первая из двух пар указанных точек соответствует свободным двумерным волнам Толлмина — Шлихтинга с наибольшим инкрементом роста амплитуды во времени. Инкременты нарастания пространственных колебаний с $m \neq 0$ меньше величины $\text{Re } \omega_1'(k_2'^*)$.

3. Анализ обратных преобразований. Первый этап в вычислении входящих в (2.2) интегралов состоит в нахождении приближенного выражения для обратного преобразования Лапласа. Аналогично тому, как это было сделано [15] в задаче о развитии в пограничном слое двумерных возмущений, можно оценить вклад в решение от суммы вычетов, обусловленных всеми корнями дисперсионного соотношения, начиная со второго.

Эта сумма оказывается $o(t^{-5})$, причем оценка имеет место равномерно по x и z . Отсюда заключаем, что для достаточно больших моментов времени ею можно пренебречь по сравнению с вкладом от вычета, связанного с первым корнем $\omega_1(k, m)$, так как амплитуда описываемого им волнового пакета экспоненциально нарастает [13]. В результате

$$(3.1) \quad p'(t, x, z) = \operatorname{Re} [p_c'(t, x, z)]$$

$$p_c' = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dm \int_0^{\infty} dk \exp[\omega_1(k, m)t + ikx + imz] \times$$

$$\times \frac{k^2 \bar{v}_0[\omega_1(k, m), k, m]}{\sqrt{k^2 + m^2} d\Phi[\Omega_1(k')]/d\Omega}$$

Для упрощения дальнейших расчетов выполним [16] следующие операции с переменными интегрирования: переход к полярным координатам $k = \rho \cos \alpha$, $m = \rho \sin \alpha$, $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$; растяжение радиуса-вектора $\rho = s \cos^{-1/2} \alpha$; тригонометрическое преобразование $\alpha = \operatorname{arctg} \beta$, $-\infty < \beta < \infty$. В новых переменных

$$k' = s, \quad \omega_1(k, m) = \omega_1'(s) (1 + \beta^2)^{-1/4}$$

и интеграл из (3.1) преобразуется к виду

$$(3.2) \quad p_c' = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} J(\beta, T, X) \frac{d\beta}{(1 + \beta^2)^{3/8}}$$

$$J = \int_0^{\infty} \frac{s^2 \bar{v}_0[\omega_1'(s) (1 + \beta^2)^{-1/4}, s (1 + \beta^2)^{-3/8}, s\beta (1 + \beta^2)^{-3/8}]}{d\Phi[\Omega_1(s)]/d\Omega} \times$$

$$\times \exp[\omega_1'(s) T + isX] ds; \quad T = (1 + \beta^2)^{-1/4} t,$$

$$X = (1 + \beta^2)^{-3/8} (x + \beta z)$$

Здесь внутренний интеграл того же типа, что и встречающийся в линейной задаче о развитии двумерных возмущений.

Таким образом, центральное место в построении структуры пространственного волнового пакета принадлежит решению вспомогательной задачи о двумерных возмущениях, формулировка которой осуществляется в приведенных переменных T и X . Подробный анализ этой задачи для умеренных T и любых $V = X/T$ дан в [13], где для вычисления J был разработан специальный прием, базирующийся на идеях метода перевала.

Пусть $\varphi(s; V) = \omega_1'(s) + isV$. При произвольном фиксированном V координаты седловых точек в комплексной плоскости s удовлетворяют уравнению $d\varphi/ds = d\omega_1'/ds + iV = 0$, решение $s = S(V)$ которого распадается на бесконечное количество ветвей. Расчеты показывают, что при $T \geq 3$ возмущения с большой амплитудой сосредоточены в центральной области $3,5 \leq V \leq 7,0$. При таких значениях приведенного времени вычисление J можно проводить в рамках метода перевала, причем асимптотика этого интеграла будет определяться первой ветвью $S_1(V)$ седловых точек. Имеем [13, 17]

$$(3.3) \quad J = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^{1/2} S_1^2 \left[\left| \frac{d^2\varphi(S_1; V)}{ds^2} \right| \right]^{-1/2} \exp[\varphi(S_1; V) T + i\Gamma_{s1}] \times$$

$$\times \frac{\bar{v}_0[\omega_1'(S_1) (1 + \beta^2)^{-1/4}, S_1 (1 + \beta^2)^{-3/8}, S_1 \beta (1 + \beta^2)^{-3/8}]}{d\Phi[\Omega_1(S_1)]/d\Omega}$$

где $\Gamma_{s1} = \Gamma_{s1}(V)$ — угол между положительным направлением оси s и касательной к линии $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{const}$, проведенной через точку S_1 . Погрешность в вычислении J по формуле (3.3) не превышает, как правило, нескольких процентов [17].

Полученная асимптотика не является равномерной по β . В самом деле, при $|\beta| \rightarrow \infty$ и фиксированном t она теряет силу, так как приведенное время $T \rightarrow 0$ согласно третьей из формул (3.2). Чтобы обойти возникшую трудность, представим p' в виде

$$(3.4) \quad p_c' = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{-\beta_\infty} + \int_{-\beta_\infty}^{\beta_\infty} + \int_{\beta_\infty}^{\infty} \right) J(\beta, T, X) \frac{d\beta}{(1 + \beta^2)^{13/8}}$$

Как показывают расчеты, при достаточно больших t легко подобрать такую величину постоянной β_∞ , которая обеспечивает малость вкладов в p' , даваемых первым и третьим интегралами в правой части (3.4). В дальнейшем этими вкладами пренебрегается. Что касается второго интеграла, то для его оценки можно снова применить метод перевала. Проверка необходимых условий для $z = 0$ осуществляется тривиально.

Действительно, пусть

$$\psi(\beta; V_x, V_z) = (1 + \beta^2)^{-1/4} \varphi(S_1(V); V), \quad V = (1 + \beta^2)^{-1/8} (V_x + \beta V_z) \\ V_x = x/t, \quad V_z = z/t$$

Тогда в указанном случае точка перевала $\beta = 0$, определяемая уравнением $d\psi/d\beta = 0$, лежит на отрезке оси $\text{Im } \beta = 0$, являющемся исходным контуром интегрирования в комплексной плоскости β . Кроме того, можно убедиться, что максимальное значение $\text{Re } \psi$ на всем отрезке интегрирования достигается как раз в точке $\beta = 0$.

Условия применимости метода становятся менее очевидными, если $z \neq 0$. Однако можно обойтись без асимптотического анализа, чтобы получить приближенное выражение второго интеграла из правой части (3.4), поскольку его значения находятся численно любым из стандартных способов с заданной степенью точности по известной величине J . Расчеты, результаты которых излагаются ниже, выполнены в рамках такого подхода.

4. Применение метода перевала к двойному интегралу. Так как картина колебаний жидкости в двумерном вихревом пятне весьма надежно устанавливается при помощи формулы (3.3), целесообразно все же вывести аналогичную формулу и для локализованного в пространстве волнового пакета. Ввиду отмеченных трудностей возвратимся к исходному выражению в (3.1), рассматривая его в качестве двойного интеграла, вместо того, чтобы обращаться к анализу комплексной плоскости β .

Введем функцию

$$(4.1) \quad \chi(k, m; V_x, V_z) = \omega_1(k, m) + i(kV_x + mV_z) \\ V_x = x/t \text{ и } V_z = z/t$$

При любых фиксированных V_x и V_z координаты седловых точек в комплексных плоскостях k и m удовлетворяют системе уравнений

$$(4.2) \quad \frac{\partial \chi}{\partial k} = \frac{\partial \omega_1}{\partial k} + iV_x = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial m} = \frac{\partial \omega_1}{\partial m} + iV_z = 0$$

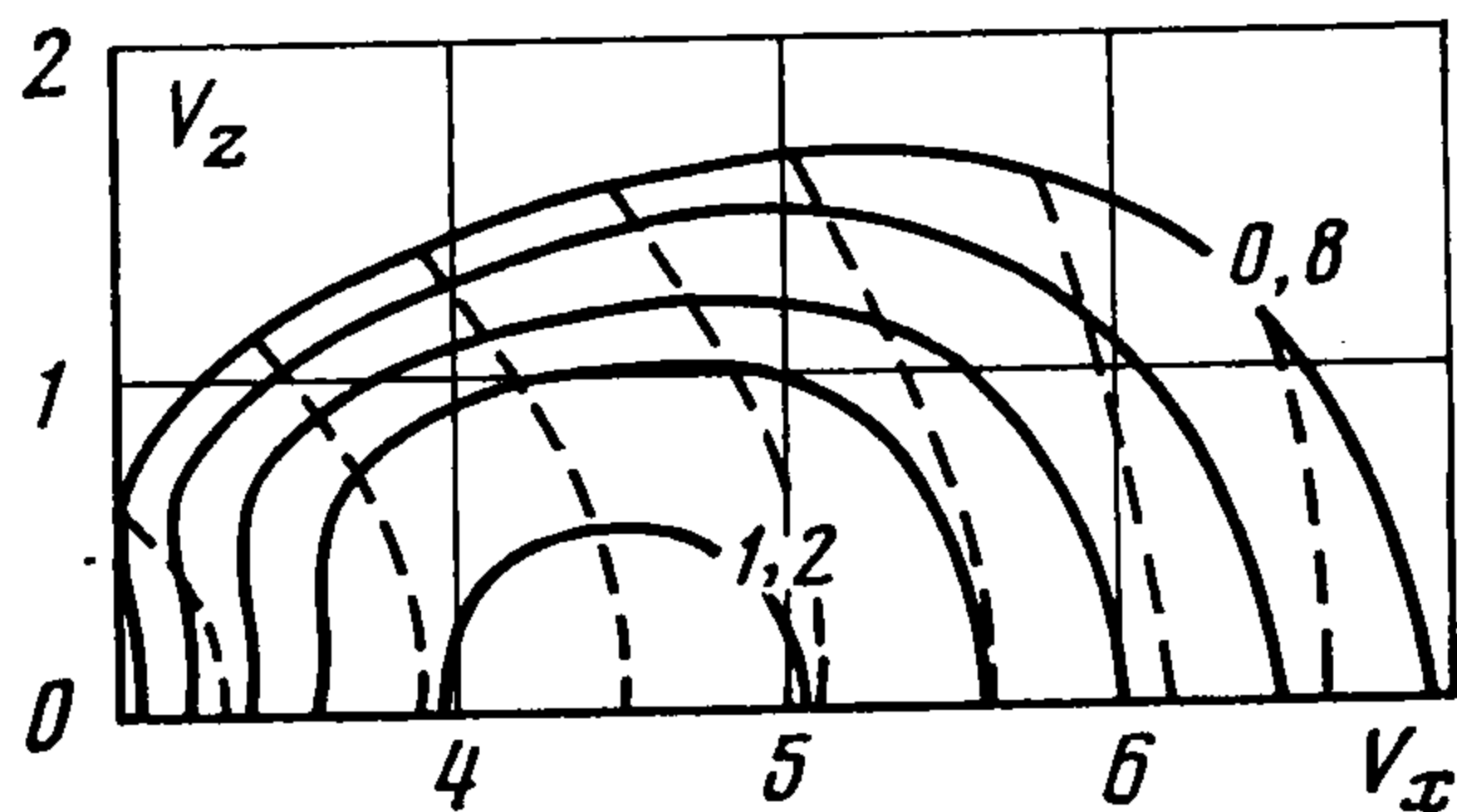
которая допускает счетное множество решений $k = K(V_x, V_z)$, $m = M(V_x, V_z)$. Когда $V_z = 0$, имеем $M(V_x, 0) = 0$. При этом условии $\beta = 0$, откуда $k = s$, $\omega_1(k, 0) = \omega_1'(s)$ и $V_x = V$. Предполагая непрерывную зависимость рассматриваемых функций от V_z , из вида соотношения (4.1) можно заключить, что в достаточно малой окрестности $V_z = 0$ каждое из решений системы уравнений (4.2) неограниченно близко приближается к одной из ветвей решения уравнения $d\varphi/ds = 0$. Иными словами, для первой ветви $K_1(V_x, V_z) \rightarrow S_1(V_x)$, $M_1(V_x, V_z) \rightarrow 0$ при $V_z \rightarrow 0$.

Вспоминая определения (2.1) и (2.3), перепишем систему уравнений (4.2) следующим образом:

$$(4.3) \quad (ik)^{2/3} \left[\frac{2}{3} \frac{\Omega_1}{k} + \frac{dQ/dk'}{d\Phi(\Omega_1)/d\Omega} \frac{\partial k'}{\partial k} \right] + iV_x = 0$$

$$(ik)^{2/3} \frac{dQ/dk'}{d\Phi(\Omega_1)/d\Omega} \frac{\partial k'}{\partial m} + iV_z = 0$$

и присоединим к ней дисперсионное соотношение (2.4). Вместе они образуют систему из трех уравнений для вычисления величин k , m и Ω_1 в зависимости от параметров V_x и V_z , причем существование предельного перехода по $V_z \rightarrow 0$ играет центральную роль в организации итерационного процесса. В нем точки перевала $K_1(V_x, V_z + \Delta V_z)$ и $M_1(V_x, V_z + \Delta V_z)$ получают совместно с инвариантом $\Omega_1^s(V_x, V_z + \Delta V_z)$ при помощи метода Ньютона по предыдущему приближению $K_1(V_x, V_z)$, $M_1(V_x, V_z)$ и $\Omega_1^s(V_x, V_z)$, а первый шаг в расчете $K_1(V_x, \Delta V_z)$, $M_1(V_x, \Delta V_z)$ и $\Omega_1^s(V_x, \Delta V_z)$ базируется на известном решении $K_1(V_x, 0) = S_1(V_x)$, $M_1(V_x, 0) = 0$ и $\Omega_1^s(V_x, 0) = \Omega_1(S_1)$. Выбор $\Delta V_z = 0,1$ обеспечивает быструю сходимость процесса: за 2—4 итерации все неизвестные вычисляются с 4—6 верными знаками. В качестве результатов на фиг. 1 сплошными и штриховыми кривыми изображены линии уровня функций $\text{Re } \chi$ (с интервалом 0,1) и $\text{Im } \chi$ (с интервалом $\pi/2$).



Фиг. 1

После того как установлено расположение седловых точек, необходимо рассмотреть вопрос о наличии особенностей в комплексных плоскостях k и m . Его полное исследование представляет весьма сложную задачу даже для двумерных возмущений [13, 17]. Именно по этой причине не стал производиться анализ комплексной плоскости β . Однако быстрая сходимость итерационного процесса, при помощи которого определялись корни системы уравнений (4.3) с присоединенным к ней дисперсионным соотношением (2.4), свидетельствует в пользу того, что при не слишком больших V_z дополнительные особенности в комплексной плоскости m не возникают (либо они находятся вдали от седловых точек). Отсюда следует возможность замены при любых фиксированных V_x и V_z исходного многообразия, по которому совершается интегрирование в (3.1), на многообразие, включающее точку перевала K_1, M_1 . Если максимальное значение $\text{Re } \chi$ на деформированном многообразии достигается как раз в точке K_1, M_1 , то асимптотика (3.1) при достаточно больших t и конечных V_x, V_z выражается посредством вклада от интегрирования по ее ближайшей окрестности. Для двумерных движений последнее условие выполняется в диапазоне $3,5 \leq V \leq 7,0$, соответствующем центральной части возмущенной области [17], но для локализованного в пространстве волнового пакета его проверка наталкивается на большие трудности.

Предположим, что необходимое условие о достижении функцией $\text{Re } \chi$ своего максимального значения на деформированном многообразии в точке K_1, M_1 удовлетворяется. Тогда можно написать приближенное представление для избыточного давления. Если обозначить

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \chi(K_1, M_1; V_x, V_z)}{\partial k^2} & \frac{\partial^2 \chi(K_1, M_1; V_x, V_z)}{\partial k \partial m} \\ \frac{\partial^2 \chi(K_1, M_1; V_x, V_z)}{\partial m \partial k} & \frac{\partial^2 \chi(K_1, M_1; V_x, V_z)}{\partial m^2} \end{vmatrix}$$

то, согласно общей теории [18], имеем

$$(4.4) \quad p_c' = \frac{1}{\pi t} \Delta^{-1/2} \frac{K_1^2 \bar{v}_0 [\omega_1 (K_1, M_1), K_1, M_1]}{\sqrt{K_1^2 + M_1^2} d\Phi [\Omega_1^s (V_x, V_z)] / d\Omega} \times \\ \times \exp [\chi (K_1, M_1; V_x, V_z) t]$$

Здесь $K_1 = K_1 (V_x, V_z)$ и $M_1 = M_1 (V_x, V_z)$ считаются найденными при помощи изложенного выше итерационного процесса, причем фактически

$$\Omega_1^s (V_x, V_z) = \Omega_1 [K_1' (K_1, M_1)], \quad K_1' = K_1 [1 + (M_1/K_1)^2]^{3/8}$$

Выбор нужных ветвей многозначных функций K_1' и $\Delta^{1/2}$ проще всего осуществляется по значениям их аргументов при $V_z = M_1 = 0$, когда $K_1' = K_1$, $V_x = V$, а из вида асимптотики интеграла (3.2) с выражением (3.3) для J следует

$$\Delta^{1/2} = \left[\left| \frac{\partial^2 \chi (K_1, 0; V_x, 0)}{\partial k^2} \right| \left| \frac{\partial^2 \chi (K_1, 0; V_x, 0)}{\partial m^2} \right| \right]^{1/2} \times \\ \times \exp [i (\Gamma_1 + \Gamma_{s1} + \Gamma_{\beta 1})]$$

причем $\Gamma_1 = \Gamma_1 (V_x)$ обозначает аргумент $S_1 (V_x)$, а $\Gamma_{\beta 1} = \Gamma_{\beta 1} (V_x)$ — угол между направлением оси абсцисс и касательной к линии $\text{Im } \psi = \text{const}$, проведенной через начало координат в комплексной плоскости β . Продолжение этих ветвей в комплексные плоскости k и m получается совместно с определением координат перевальных точек и инварианта Ω_1 .

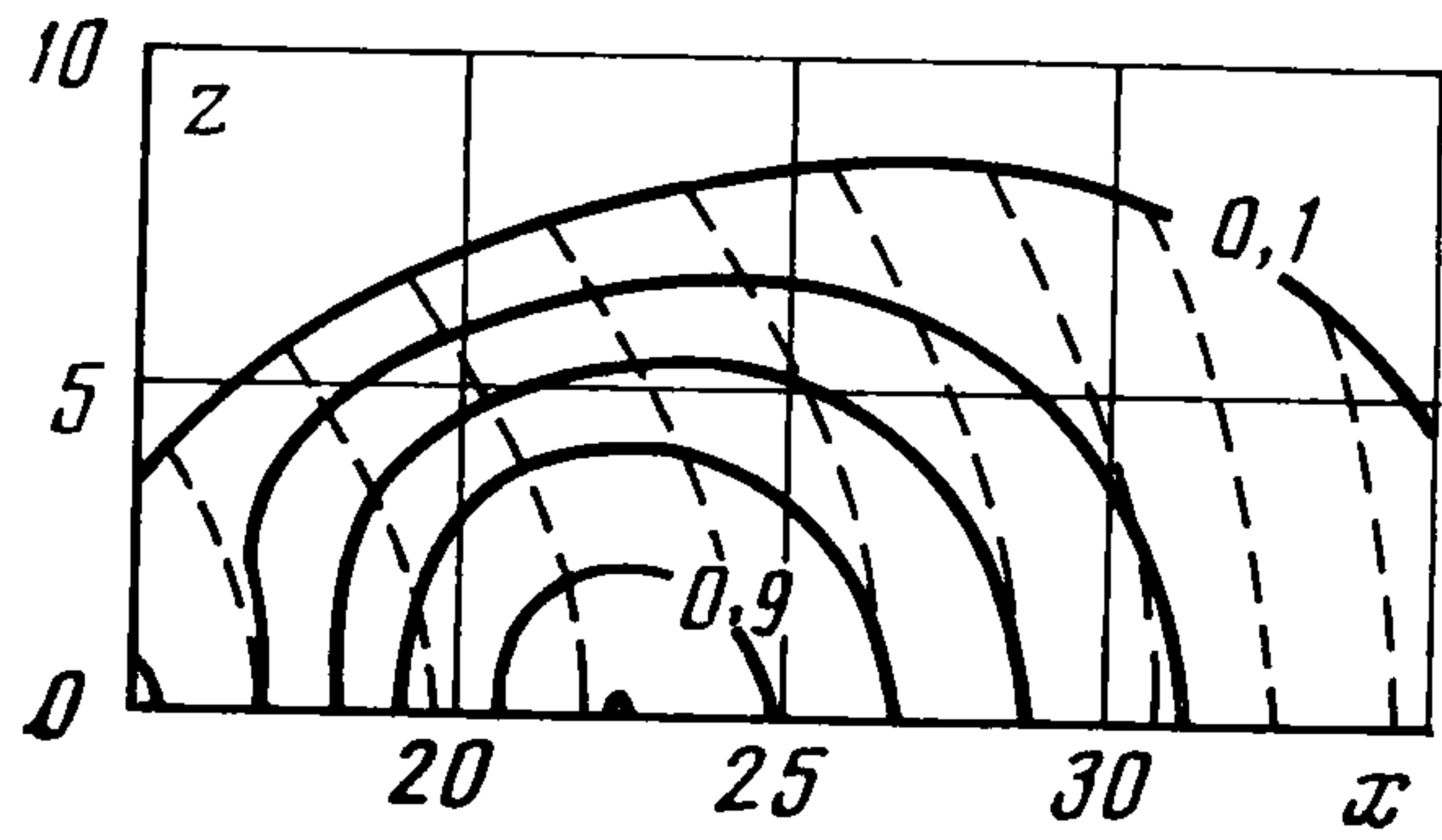
5. Результаты расчетов. При больших t влияние на поведение решения $p' (t, x, z)$ оказывает в основном экспоненциальный множитель из правой части (4.4), образ $\bar{v}_0 [\omega_1 (K_1, M_1), K_1, M_1]$ в формировании его структуры играет значительно меньшую роль. Первая из названных величин является универсальной характеристикой пограничного слоя на пластинке, вторая меняется в зависимости от вида источника возмущений.

Для проверки сделанного утверждения были проведены расчеты центральной области волновых пакетов, которые генерируются либо мгновенным точечным, либо распределенным во времени и пространстве источниками. Вдуваемая в пограничный слой струйка жидкости задавалась, соответственно, либо как $v_0 = \delta (t) \delta (x) \delta (z)$ (δ — дельта-функция Дирака), либо как $v_0 = t^2 e^{-t} \cos (\pi x / 2) \cos (\pi z / 2)$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$. Результаты для обоих источников ничем не различаются в качественном отношении (в пределе, когда $t \rightarrow \infty$, этот факт становится тривиальным). Таким образом, достаточно привести только основные характеристики колебаний, возникающих в жидкости под мгновенным воздействием бесконечно тонкой струйки.

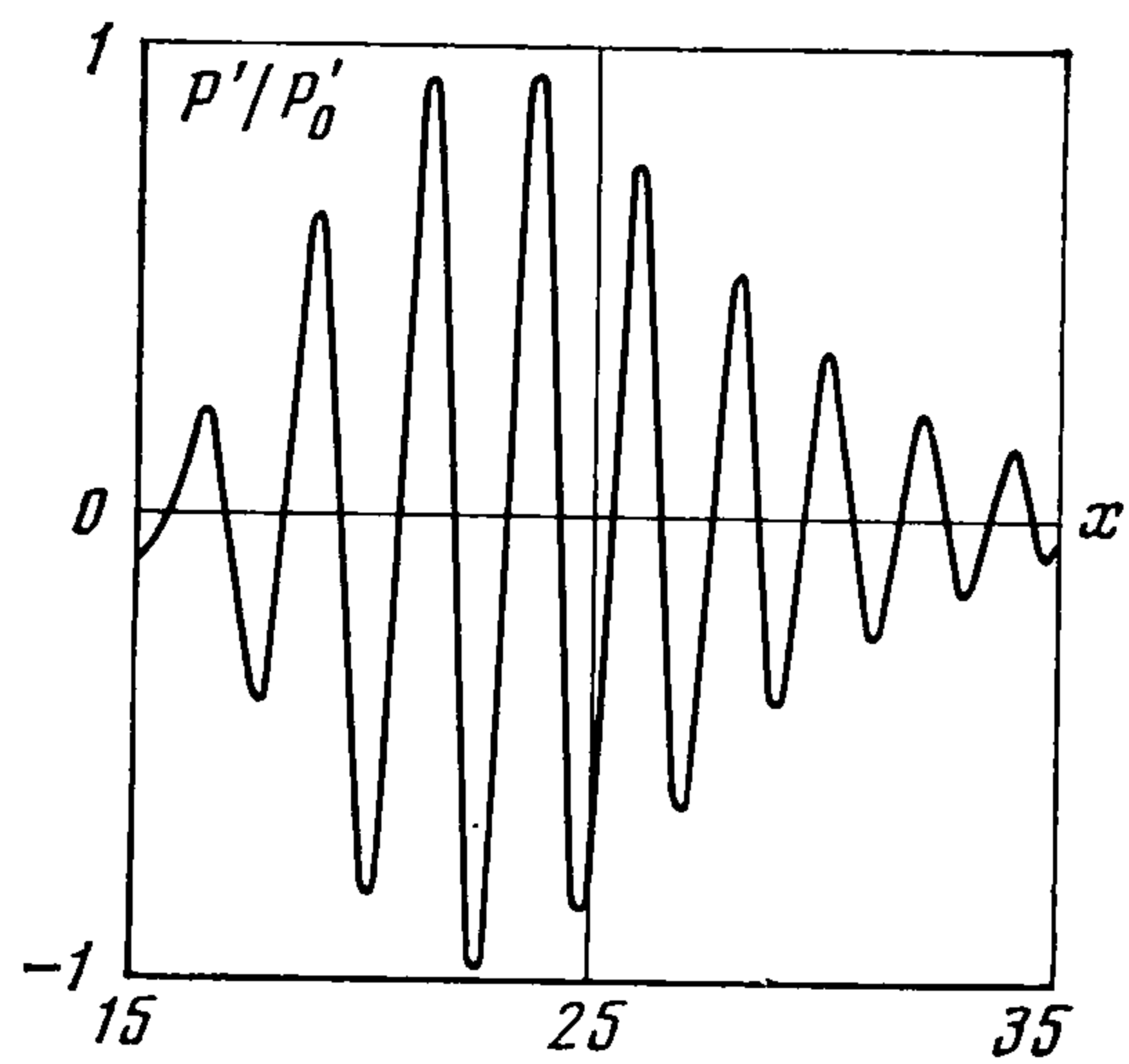
Чтобы контролировать данные расчетов, были использованы оба описанных выше способа. Давление, вычисленное по формуле (3.2) с предписанной при помощи (3.3) величиной J , сопоставлялось с тем, которое дается равенством (4.4). Расхождения оказались лежащими в пределах нескольких процентов, если $t \geq 5$, т. е. метод перевала в применении к локализованным в пространстве волновым пакетам обладает примерно той же точностью, что и для двумерных возмущений [17].

На фиг. 2 сплошными кривыми показаны изолинии амплитуды $|p_c' (t, x, z)|$ огибающей пиков избыточного давления (с интервалом 0,2), нормированной на величину $p_0' = 45,55$; штриховые кривые представляют геометрические места точек, где $p' = 0$ (проведена каждая вторая кривая). В этом примере $t = 5$ и $v_0 = \delta (t) \delta (x) \delta (z)$ (δ — дельта-функция Дирака).

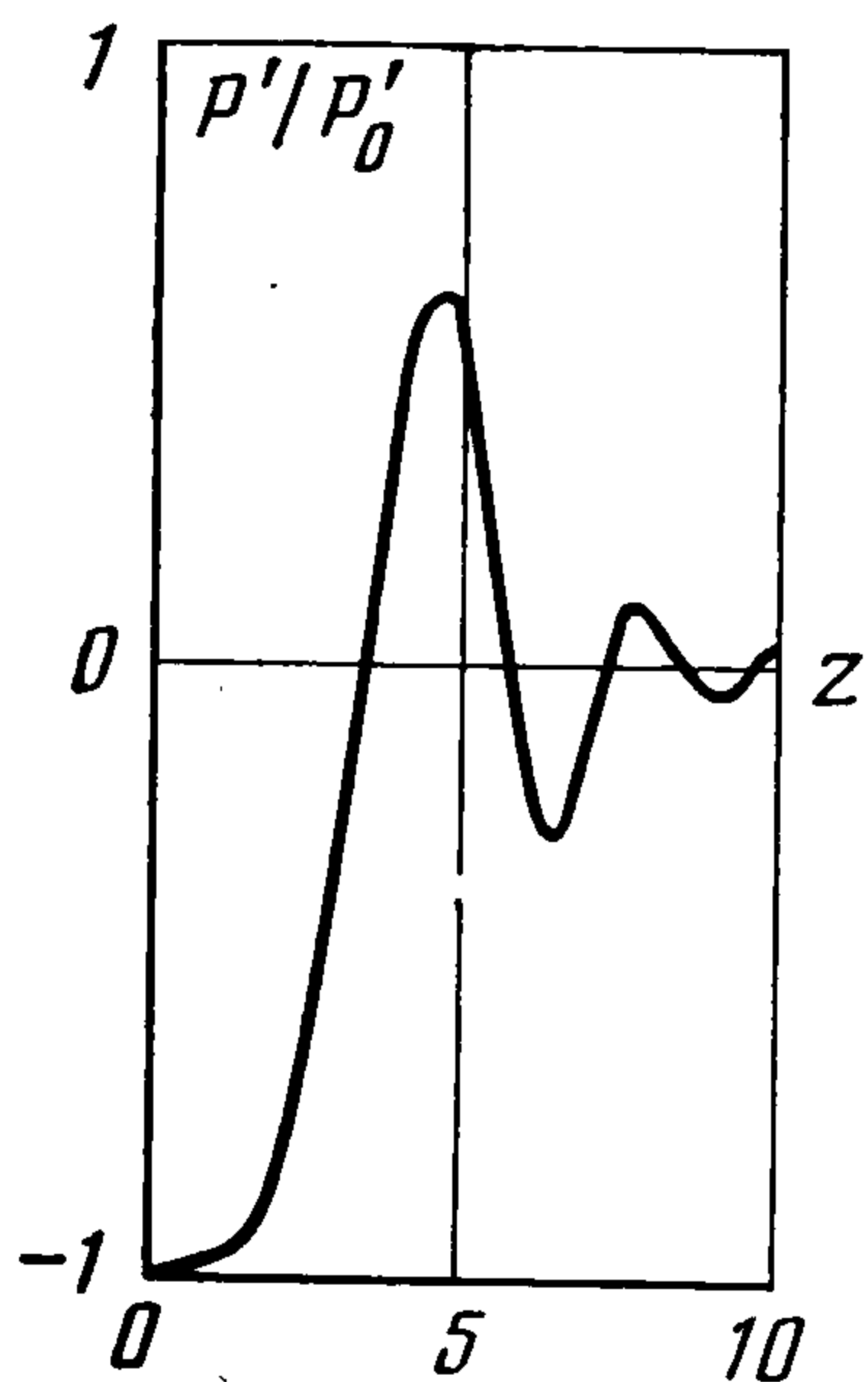
Из близости изображенных на фиг. 1 и 2 сплошных и штриховых кривых заключаем, что на поведение решения $p' (t, x, z)$ существенное влияние оказывает лишь $\exp (\chi t)$, учет весового множителя $K_1^2 (K_1^2 + M_1^2)^{-1/2} \Delta^{-1/2} d\Phi [\Omega_1^s] / d\Omega$, как и образа $\bar{v}_0 [\omega_1 (K_1, M_1), K_1, M_1]$ источника, качественно не изменяет свойств колебаний.



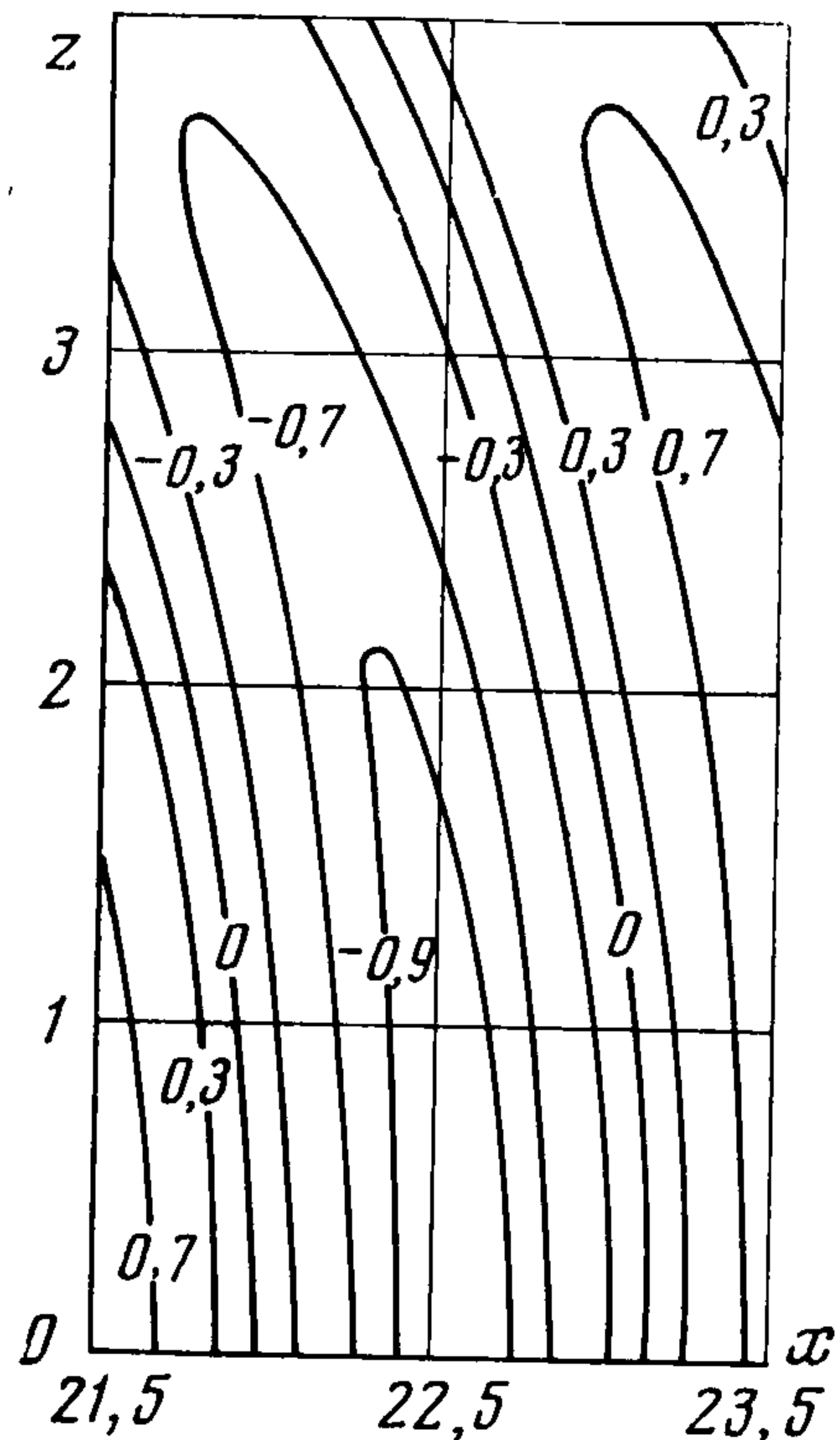
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Действительно, распределение амплитуды $|p_c'(t, x, z)|$ почти целиком зависит от $\exp[\operatorname{Re} \chi t]$, в то время как форма волновых фронтов $p' = 0$ определяется $\exp[i \operatorname{Im} \chi t]$. В окрестности центра волнового пакета изолинии амплитуды асимптотически стремятся к эллипсам в согласии с общей теорией [19], но по направлению к периферии они приобретают более сложный вид.

Распределение колебаний вдоль центральной линии $z = 0$ (фиг. 3) качественно такое же, как и в двумерных возмущениях [13, 17]. Это объясняется тем, что $\chi(K_1, 0; V_x, 0) = \varphi(S_1(V); 0)$, причем $K_1 = S_1$, $V_x = V$. При отходе от центральной линии волновые фронты загибаются назад, но этот загиб, как видно из фиг. 2, сравнительно небольшой в соответствии с имеющимися экспериментальными данными [6, 20]. Отсюда количество колебаний в боковом направлении должно быть значительно меньше, чем в продольном. Прямые расчеты (фиг. 4, где $X = 22,5$) показывают, что оно равно всего 2—3. Более детально за характером волновых фронтов можно проследить по фиг. 5 (изолинии p'/p_0'), которая также качественно хорошо согласуется с результатами измерений [20].

В рамках представленного асимптотического анализа свободно взаимодействующего пограничного слоя при числе Рейнольдса $R \rightarrow \infty$ максимальный размах колебаний в волновом пакете достигается на центральной линии $z = 0$, возмущения не раздваиваются, пока длится линейная стадия их распространения. На достаточном удалении от источника размеры возмущенной области растут пропорционально времени. Можно указать угол полураствора в вершине сектора, в пределах которого совер-

шается перемещение волнового пакета. Полагая, что амплитуда колебаний на периферии возмущенной области составляет 10% от максимальной амплитуды в ее центре, приходим к оценке приблизительно в 15° для указанного угла.

Авторы благодарят Е. Д. Терентьева за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Нелинейное развитие волны в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 3. С. 49—58.
2. Gaster M. On wave packets in laminar boundary layers // Proc. IUTAM Sympos. on Laminar — Turbulent Transition. B. et al.: Springer. 1980. P. 14—16.
3. Wygnanski I., Sokolov N., Friedman D. On the turbulent «spot» in a laminar boundary layer // J. Fluid Mech. 1976. V. 78. Pt 4. P. 785—819.
4. Gaster M. On transition to turbulence in boundary layers // Proc. Sympos. on Transition and Turbulence. Univ. Wisconsin — Madison. 1980. N. Y.: Acad. Press. 1981. P. 95—112.
5. Wygnanski I., Haritonidis J. H., Kaplan R. E. On a Tollmien — Schlichting wave packet produced by a turbulent spot // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. Pt 3. P. 505—528.
6. Gaster M., Grant I. An experimental investigation of the formation and development of a wave packet in a laminar boundary layer // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1975. V. 347. No. 1649. P. 253—269.
7. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53—57.
8. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1969. V. 312. No. 1509. P. 181—206.
9. Messiter A. F. Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. No. 1. P. 241—257.
10. Smith F. T., Sykes R. I., Brighton P. W. A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump // J. Fluid Mech. 1977. V. 83. Pt 1. P. 163—176.
11. Рыжов О. С. О нестационарном пространственном пограничном слое, свободно взаимодействующем с внешним потоком // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 1035—1052.]
12. Gaster M. A theoretical model of a wave packet in the boundary layer on a flat plate // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1975. V. 347. No. 1649. P. 271—289.
13. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О переходном режиме, характеризующем запуск вибратора в дозвуковом пограничном слое на пластинке // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 974—986.
14. Жук В. И., Рыжов О. С. Об устойчивости свободно взаимодействующего пограничного слоя // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 552—563.
15. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264—272.
16. Craik A. D. D. The development of wave packets in unstable flows // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1981. V. 373. No. 1755. P. 457—476.
17. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. Об одном способе генерирования волновых пакетов в пограничном слое // Современные проблемы механики сплошных сред. М.: МФТИ, 1985. С. 82—89.
18. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука. 1977. 368 с.
19. Drazin P. G., Reid W. H. Hydrodynamic stability. Cambridge: Univ. Press. 1981. 525 p.
20. Vasudeva V. R. Boundary-layer instability experiment with localized disturbance // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. Pt 4. P. 745—763.