

УДК 532.5

О ФОРМИРОВАНИИ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

Терентьев Е. Д.

В рамках теории пограничного слоя с самоиндуцированным давлением [1, 2] изучается начальная стадия развития возмущений, вызванных включением вибратора, установленного на плоской пластине. Проводятся расчеты давления для небольших значений характерного времени, что позволяет проследить формирование волнового пакета.

При теоретическом изучении волновых пакетов обычно ограничиваются [3—6] довольно большими значениями характерного времени, отсчитываемого от момента воздействия на пограничный слой, такими, при которых пакет практически уже сформировался. Ниже строится решение задачи о гармоническом вибраторе для небольших значений времени после его включения, что позволяет в сочетании с результатами работ [5, 6] проследить развитие линейных возмущений в пограничном слое для любых значений времени.

Конечно, теория пограничного слоя с самоиндуцированным давлением в своем нестационарном варианте [7, 8] применима лишь для чисел Рейнольдса, заметно превышающих критическое значение. Было показано [9, 10], что эта теория в линейном варианте описывает возмущения с волновыми числами, лежащими ниже верхней ветви кривой нейтральной устойчивости, причем параметры, отвечающие максимальным инкрементам нарастания, относятся к описываемым данной теорией. Для анализа частот и длин волн, примыкающих к верхней ветви кривой нейтральной устойчивости, необходимо проводить иные разложения [11—13], нежели в трехслойной теории [1, 2]

Рассмотрим обтекание теплоизолированной пластины, на которой на расстоянии L^* от переднего края установлен гармонический вибратор. Пусть набегающий поток дозвуковой со скоростью V_∞^* , направленной вдоль пластины, ρ_∞^* — плотность невозмущенного газа, $\lambda_{1\infty}^*$ — первый коэффициент вязкости. Введем малый параметр $\varepsilon = R_1^{-1/8}$ ($R_1 = \rho_\infty^* V_\infty^* L^* / \lambda_{1\infty}^*$), выберем продольный размер вибратора $O(L^* \varepsilon^3)$, амплитуду колебаний $O(L^* \varepsilon^5)$, частоту $O(V_\infty^* / (L^* \varepsilon^2))$.

Для описания движения, вызванного таким вибратором, применима теория пограничного слоя с самоиндуцированным давлением в ее нестационарном варианте [7, 8]. При анализе главных членов возмущений, согласно этой теории, основное невозмущенное движение газа оказывается плоскопараллельным. Используя безразмерные переменные [8], зададим закон движения вибратора и его форму для времени $t > 0$

$$y_w = \sigma f(t, x) = \sigma f_1(x) \sin \omega_0 t, \quad \sigma \ll 1, \quad \omega_0 > 0$$

где ω_0 — безразмерная частота, x, y — декартовы координаты; функция $f_1(x)$ задает треугольную форму с параметрами a и b ($f_1(x) = 0$ при $x \leq 0$, $2x$ при $0 < x \leq b$, $2b(a-x)/(a-b)$ при $b < x \leq a$, 0 при $x > a$). Для моментов времени $t < 0$ положим $y_w = 0$ и пограничный слой будем считать невозмущенным.

В такой постановке задача о вибраторе рассматривалась в работе [14], где было выписано выражение для возмущения давления через обратные преобразования Фурье и Лапласа. Внося небольшие изменения, перепи-

шем его в виде (l — некоторое положительное число)

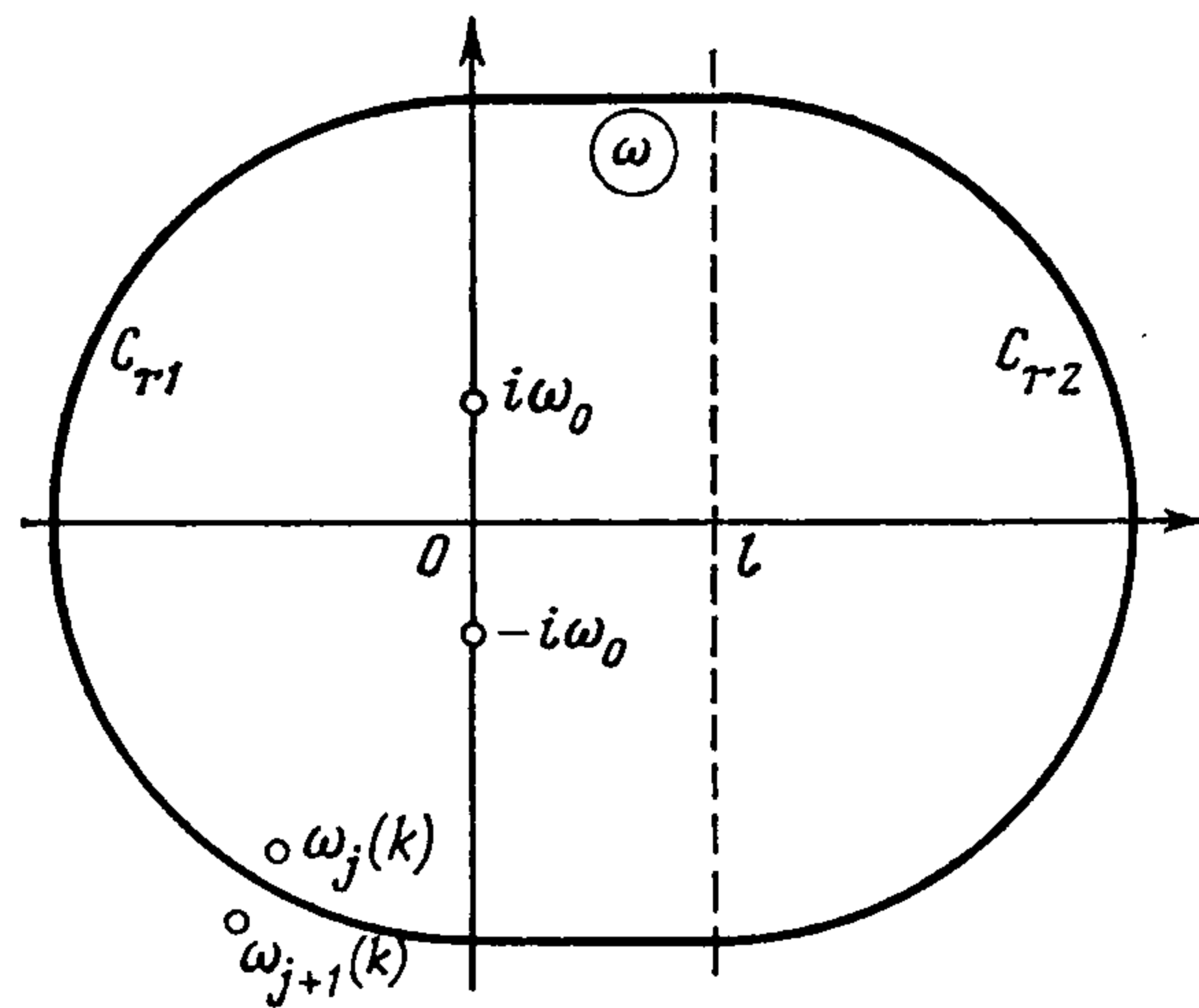
$$(1) \quad p_1 = \pi^{-3/2} 2^{-1/2} \omega_0 \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} k f_{1F}(k) e^{ikx} dk J(t, k, \omega_0) \right]$$

$$J = \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \Phi d\omega, \quad \Phi = \frac{\operatorname{Ai}'(\Omega) e^{\omega t}}{(\omega^2 + \omega_0^2) Q_3(\Omega, k)}, \quad \Omega = \frac{\omega}{(ik)^{2/3}}$$

$$f_{1F}(k) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{a}{a-b} e^{-ikb} + \frac{b}{a-b} e^{-ika} \right)$$

$$Q_3(\Omega, k) = -\operatorname{Ai}'(\Omega) + i^{1/3} k^{4/3} \left[\frac{1}{3} - \int_0^{\Omega} \operatorname{Ai}(z) dz \right]$$

Анализ [14, 15] показал, что при $t \rightarrow \infty$ в области $1 \ll x < 2,4t$ выражение (1) при $\omega_0 > \omega_*$ ($\omega_* = 2,298$ — частота нейтральных колебаний) задает монохроматическую волну Толлмина — Шлихтинга с частотой ω_0 . На расстояниях $x > 2,4t$ расположен волновой пакет [6]. Способ расчета интегралов (1) в [6] позволил рассмотреть лишь $t > 2,5$, однако, как свидетельствовали полученные результаты, для таких значений времени волновой пакет был уже сформирован. Цель работы — расчет интеграла (1) для $0 < t < 3$, т. е. для значений времени, при которых происходит формирование волнового пакета.



Фиг. 1

Численное интегрирование при вычислении интеграла J сопряжено с большими затратами машинного времени из-за сложности подынтегрального выражения и необходимости вести расчеты для большого количества значений k и разных t . Поэтому для вычисления J используем методы теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим корни знаменателя подынтегрального выражения в интеграле J . Как показал анализ [13] решений дисперсионного уравнения $Q_3(\Omega, k) = 0$, все его корни $\omega_n(k)$ при изменении k вдоль положительной части действительной оси простые, они лежат слева от пути интегрирования. Для фиксированного $k > 0$ с ростом номера n выполняются соотношения $|\omega_n(k)| \rightarrow \infty$ и $\arg \omega_n(k) \rightarrow 4\pi/3$. Проведем дугу C_{r1} радиуса r_0 так, чтобы она проходила между двумя соседними корнями $\omega_j(k)$ и $\omega_{j+1}(k)$ (фиг. 1). Тогда в силу теоремы Коши

$$(2) \quad \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \Phi d\omega = 2\pi i \left[\operatorname{res} \Phi(i\omega_0) + \operatorname{res} \Phi(-i\omega_0) + \sum_{n=1}^j \operatorname{res} \Phi(\omega_n(k)) \right] -$$

$$- \int_{C_{r1}} \Phi d\omega, \quad \operatorname{res} \Phi(i\omega_0) = \frac{\exp(i\omega_0 t) \operatorname{Ai}'(\Omega_0)}{2i\omega_0 Q_3(\Omega_0, k)}$$

$$\operatorname{res} \Phi(\omega_n(k)) = \exp(\omega_n t) (ik)^{4/3} \operatorname{Ai}'(\Omega_n) [(\omega_n^2 + \omega_0^2) \times$$

$$\times (\omega_n + ik^2) \operatorname{Ai}(\Omega_n)]^{-1}, \quad \Omega_0 = \omega_0 (ik)^{-2/3}, \quad \Omega_n = \omega_n(k) (ik)^{-2/3}$$

При увеличении r_0 и, следовательно, j интеграл по дуге C_{r1} стремится к нулю. При $j \rightarrow \infty$ и фиксированном k выполнено условие $|\omega_j| \sim j^{2/3}$, поэтому для вычетов справедлива оценка

$$|\operatorname{res} \Phi(\omega_j)| \sim j^{-5/3} \exp(-a_0 t j^{2/3}), \quad a_0 > 0$$

Следовательно, с ростом j ряд в правой части (2) будет сходиться

$$(3) \quad J = \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \Phi d\omega = 2\pi i \left[\operatorname{res} \Phi(i\omega_0) + \operatorname{res} \Phi(-i\omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res} \Phi(\omega_n(k)) \right]$$

Как показали оценки [14], при $t \rightarrow \infty$ из ряда по n в правой части (3) достаточно взять лишь один первый член. Однако если t невелико, то необходимо учитывать несколько членов ряда. Вычисления функции $J(t, k, \omega_0)$, проведенные по формуле (3) с использованием 10 первых членов ряда, показали, что при $t \geq 0,3$ отброшенные члены для всех значений k , за исключением малой окрестности $k = 0$, незначительны, но с уменьшением t эта окрестность расширяется и требует учета все большего количества членов ряда.

Построим иной метод расчета $J(t, k, \omega_0)$ для малых значений времени ($t \leq 0,3$). Для этого рассмотрим контур C_{r_2} радиуса r_0 , расположенный в правой полуплоскости ω (фиг. 1). Поскольку справа от контура интегрирования подынтегральная функция Φ не обладает особенностями в конечной части плоскости ω , то согласно теореме Коши

$$\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \Phi d\omega = - \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \int_{C_{r_2}} \Phi d\omega$$

Если вдоль дуги C_{r_1} подынтегральная функция экспоненциально быстро стремилась к нулю при $|\omega| \rightarrow \infty$, то вдоль дуги C_{r_2} она экспоненциально быстро растет с ростом $|\omega|$. Одновременно с ростом $|\omega|$ при фиксированном k растет и Ω , причем для ω , принадлежащих дуге C_{r_2} , выполнено неравенство $-5\pi/6 \leq \arg \Omega \leq \pi/6$. Для таких $|\Omega| \rightarrow \infty$ производную и интеграл от функции Эйри можно заменить их асимптотическими разложениями [16], в результате имеем

$$(4) \quad Q_3(\Omega, k)/\operatorname{Ai}'(\Omega) \sim \\ \sim -1 - i^{1/3} k^{4/3} \Omega^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} C_{I,n} \Omega^{-3n/2} / \sum_{n=0}^{\infty} C_{d,n} \Omega^{-3n/2}$$

где $C_{I,n}$ — коэффициенты разложения $\int_{\Omega}^{\infty} \operatorname{Ai}(z) dz$, а $C_{d,n}$ — коэффициенты разложения $\operatorname{Ai}'(\Omega)$.

Используя программу деления полиномов, вычислим на ЭВМ коэффициенты $C_{q,n}$, задающие частное от деления двух рядов в правой части (4). Коэффициенты $C_{q,n}$ будут действительными, поскольку действительными являются $C_{I,n}$ и $C_{d,n}$. Выражая далее Ω через k и ω , а затем еще раз выполняя деление полиномов от $\omega^{-1/2}$ и собирая в частном члены с одинаковыми степенями k при помощи ЭВМ, получим

$$\Phi \sim \frac{e^{\omega t}}{\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} k^n \varphi_n(\omega_0, \omega), \quad \varphi_n = \sum_{m=h(n)}^{g(n)} C_{m,n} \omega^{-m/2}$$

где $\varphi_n(\omega_0, \omega)$ — полиномы степени $g(n)$ от переменной $\omega^{-1/2}$ с комплексными коэффициентами $C_{m,n}(\omega_0)$.

Интегрирование Φ по переменной ω вдоль контура C_{r_2} не сопряжено с какими-либо трудностями, поскольку стандартными методами удается показать, что при $r_0 \rightarrow \infty$

$$(5) \quad \int_{C_{r_2}} \frac{e^{\omega t} d\omega}{\omega^N} = \frac{2\pi t^{N-1}}{(N-1)!}, \quad \int_{C_{r_2}} \frac{e^{\omega t} d\omega}{\omega^{N+1/2}} = \frac{2\sqrt{\pi} t^{N-1/2}}{(1/2)_N} \\ N = 1, 2, \dots; (1/2)_N = 1/2 (1/2 + 1) \dots (1/2 + N - 1)$$

В результате интеграл J удается записать в виде ряда

$$(6) \quad J(t, k, \omega_0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n k^n$$

с комплексными коэффициентами C_n , зависящими от ω_0 и t .

Вопрос о сходимости ряда в правой части (6) может быть решен путем довольно грубой оценки поведения коэффициентов C_n при $n \rightarrow \infty$. Поскольку коэффициенты $C_{q,n}$ изменяются так же, как и $C_{l,n}$, т. е. пропорциональны $n!$ (зависимостью от степеней n можно пренебречь), а нижний предел в сумме, задающей φ_n , можно оценить как $h(n) \sim 3n/2$, то, согласно (5), получим

$$(7) \quad |C_n| \sim t^{3n/2} n! / [3n/2]!$$

Оценка (7) грубая, но из нее следуют важные выводы: ряд (7) — абсолютно сходящийся с бесконечным радиусом сходимости, причем для вычисления с необходимой точностью J при заданном k с увеличением t необходимо брать все большее количество членов. Указанные свойства хорошо проиллюстрировали расчеты функции J , проведенные для разных значений k , t и ω_0 . Ввиду абсолютной сходимости ряда (6) его можно рассматривать во всей комплексной плоскости k . Таким образом, ряд (6) задает целую аналитическую функцию переменной k , в конечной части J не будет иметь особенности, а бесконечно удаленная точка для нее является существенно особой.

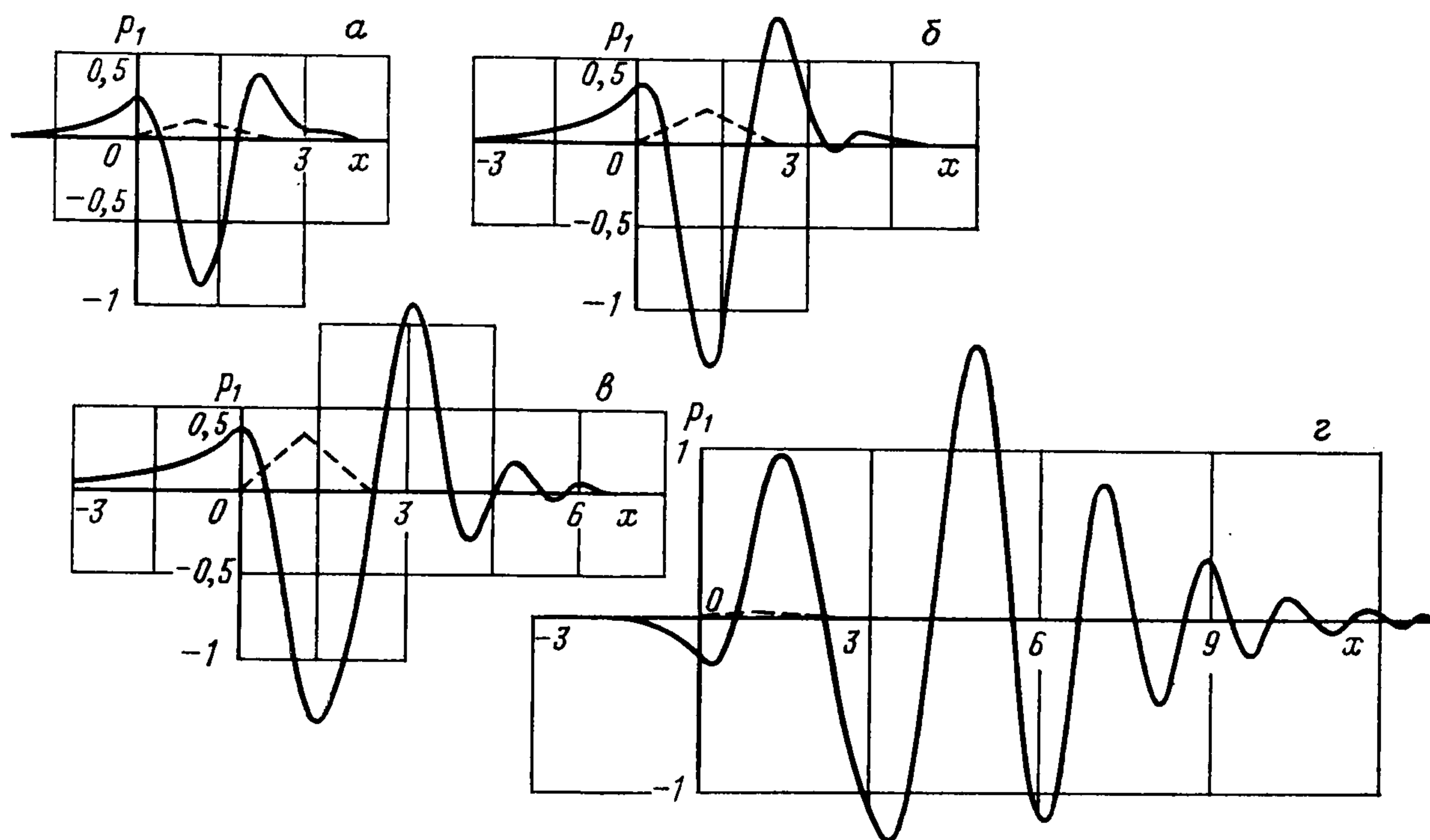
Построение представления функции J при помощи ряда по вычетам (3) и в виде степенного ряда взаимно дополняют одно другое. Хотя оба ряда абсолютно сходящиеся и ими можно пользоваться для любых k и t , тем не менее каждый из них имеет свою область практической применимости, связанную с тем, что при расчетах можно использовать только конечное число членов ряда. Если зафиксировать t , то несколько десятков членов ряда (6) дают представление J с высокой степенью точности для $k < k_b$ и, наоборот, несколько членов ряда (3) хорошо задают J при $k > k_b$. Конечно, граничная величина k_b условная, она зависит от переменной t , количества используемых членов в рядах, точности расчета J . Если $t \leq 0,3$, то граница k_b достаточно велика и для расчетов интегралов по k из (1) достаточно пользоваться только представлением (6), при $t \geq 1,5$ можно пользоваться только представлением (3). Для промежуточных значений t было выбрано $k_b = 2$.

При расчете на ЭВМ при помощи ряда (6) необходимо использовать двойную точность (24 десятичных разряда в мантисе, порядок от -1232 до $+1232$). Это связано с чрезвычайно быстрым ростом $C_{l,n}$ и $C_{d,n}$ и очень малыми значениями интегралов (5). Вычисления велись с использованием 150 членов ряда, максимальное значение $k = 7$.

Расчет при помощи ряда (3) проведен с учетом 10 членов, максимальное значение $k = 12$. При $t \geq 2,5$ были дополнительно проведены расчеты с сохранением лишь первого члена ($n = 1$) в ряде (3), полученные результаты полностью совпали с результатами для 10-членного приближения.

На фиг. 2 приведены графики возмущения давления $p_1(t, x)$, порожденного треугольным вибратором с параметрами $a = 2$; $b = 1$, начинающим работу при $t = 0$ на закритической частоте $\omega_0 = 3,0$. Для момента времени $t = 0,1$ (фиг. 2, а) функция p_1 почти симметрична по отношению к вибратору, условно изображенному штриховой линией. Наибольшей абсолютной величины возмущение достигает над центром вибратора, уменьшаясь к его концам и принимая на концах уже значения противоположного знака, около заднего конца вибратора, расположенного ниже по потоку, оно немного выше, чем у переднего конца. Пониженное давление над центральной частью вибратора выдвинутой в момент $t = 0,1$ в по-

граничный слой, характерно для дозвукового внешнего течения. При $t = 0,2$ (фиг. 2, б) в центральной части давление продолжает падать из-за подъема вибратора, и все более усиливается асимметрия вследствие роста давления за задним концом вибратора. При $t = 0,4$ (фиг. 2, в) возмущение



Фиг. 2

давления за задним концом становится почти таким же, как и над вибратором, причем ниже по потоку хорошо различимо еще одно полное колебание. При $t = 1,0$ (фиг. 2, г) возмущение давления принимает вид, характерный для волнового пакета, развитие которого во времени приводит к структурам, рассмотренным в [6]. Описанные начальные стадии развития возмущений в пограничном слое качественно совпадают с наблюдаемыми в экспериментах¹.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53—57.
2. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate. II // Mathematika. 1969. V. 16. No 31. P. 106—121.
3. Gaster M. A theoretical model of a wave packet in the boundary layer on a flat plate // Proc. Roy. Soc. A. 1975. V. 374. No. 1649. P. 271—289.
4. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О некоторых свойствах вихревых пятен в пограничном слое на пластинке // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1984. Т. 276. № 3. С. 571—575.
5. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. Об одном способе генерирования волновых пакетов в пограничном слое // Современные вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МФТИ. 1985. С. 82—89.
6. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О переходном режиме, характеризующем запуск вибратора в дозвуковом пограничном слое на пластинке // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 974—986.
7. Schneider W. Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. Pt 3. P. 465—485.
8. Рыжов О. С. Уравнения нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1977. Т. 234. № 4. С. 780—783.
9. Smith F. T. On the nonparallel flow stability of the Blasius boundary layer // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. V. 366. No. 1724. P. 91—109.

¹ Грек Г. Р., Козлов В. В., Рамазанов М. П. Экспериментальное исследование по возникновению и развитию двумерных волновых пакетов в пограничном слое: Препринт № 11. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1986. 24 с.

10. *Жук В. И., Рыжов О. С.* Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1980. Т. 253. № 6. С. 1326—1329.
11. *Михайлов В. В.* Об асимптотике нейтральных кривых линейной задачи устойчивости ламинарного пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 5. С. 39—46.
12. *Bodonyi R. J., Smith F. T.* The upper branch stability of the Blasius boundary layer, including nonparallel flow effects // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1981. V. 375. No. 1760. P. 65—92.
13. *Жук В. И., Рыжов О. С.* Об асимптотике решений уравнений Орра—Зоммерфельда, задающих неустойчивые колебания при больших значениях числа Рейнольдса // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1983. Т. 268. № 6. С. 1328—1332.
14. *Терентьев Е. Д.* Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264—272.
15. *Terent'ev E. D.* Linear problem on vibrator on a flat plate in subsonic boundary layer // Laminar-turbulent transition IUTAM Symposium. Novosibirsk. 1984. P. 303—311.
16. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1968. 464 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.VI.1986