

УДК 532.5 : 534.2

## ОБ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМАХ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В ТРУБАХ

Ни А. Л.

Рассматриваются одномерные нелинейные автоколебания идеального газа в трубе, один конец которой закрыт, а на другом заданы граничные условия, определенным образом связывающие проходящий и отраженный инварианты Римана. Построены периодические решения, содержащие ударные волны. Установлена связь между амплитудой и периодом колебательных движений газа. Проведен численный анализ полученных решений на устойчивость. Исследования существенным образом опираются на результаты [1—6], где рассматривались вынужденные резонансные и субрезонансные колебания газа в открытых и закрытых трубах.

В [1—4] уравнения колебаний были получены методом, аналогичным методу деформированных координат Пуанкаре—Лайтхилла. При этом проблема сводилась к определению решений обыкновенных дифференциальных уравнений на участках гладкости с последующим введением разрывов на основе специальных дополнительных предположений. В [5, 6] был дан последовательный подход к решению данного класса задач, в рамках которого вопрос о разрывах решался корректно из анализа эволюции волн сжатия.

Постановка граничных задач в данной работе в известной степени примыкает к аналогичным постановкам в исследованиях движения газа в генераторе Гартмана, где течения также носят автоколебательный характер<sup>1</sup>. Анализ колебаний будет вестись на основе развитого в [5, 6] подхода. Выполненные там громоздкие выкладки опускаются. Выводы о применимости изэнтропического приближения и возможности пренебрежения изменением инвариантов Римана при взаимодействии характеристик с ударными волнами сохраняют силу и для рассматриваемых автоколебаний.

**1. Уравнения движения.** Уравнения газовой динамики в характеристической форме в общепринятых обозначениях имеют вид [7]

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\xi} + \frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\xi} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\eta} - \frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\eta} = 0, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{\zeta} = 0$$

где введены операторы дифференцирования вдоль характеристик  $C^+$ ,  $C^-$ ,  $C^0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\xi} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\eta} = \frac{\partial}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\zeta} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

Будем рассматривать волны малой амплитуды  $\varepsilon$ . Как отмечалось ранее, изменением энтропии в ударных волнах можно пренебречь и течение считать изэнтропическим.

Уравнения движения приводятся к виду ( $J^{\pm}$  — инварианты Римана)

$$\left(\frac{\partial J^+}{\partial t}\right)_{\xi} = 0, \quad \left(\frac{\partial J^-}{\partial t}\right)_{\eta} = 0 \quad \left(J^{\pm} = u \pm \frac{2a}{\kappa - 1}\right)$$

Рассмотрим два типа краевых условий. Пусть правый конец трубы (ее длина  $X$ ) закрыт:  $u(X, t) = 0$ , а на левом выполняется линейная связь между возмущениями проходящего и отраженного инвариантов Римана (всюду далее нижним нулевым индексом отмечаются параметры

<sup>1</sup> Обзор этих исследований см. в работе: Дулов В. Г., Максимов В. П. Термоакустика полужамкнутых объемов: Препринт № 28-86. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1986. 19 с.

невозмущенного газа)

$$(1.1) \quad J^+(0, t) - J_0^+ = v(1 + \delta)[J^-(0, t) - J_0^-] \\ v = \pm 1, \delta \ll 1$$

При  $v = -1$  (случай 1) сформулированное граничное условие приводится к виду

$$u(0, t) = -\delta [J^-(0, t) - J_0^-]/2$$

Это аналог задачи о колебаниях поршня [1, 2, 5], когда ударная волна сохраняется в течении при взаимодействии с границей. Если  $v = +1$  (случай 2), (1.1) переписывается так:

$$p(0, t) - p_0 = 2\delta [J^-(0, t) - J_0^-]/\kappa$$

Такая постановка подобна заданию давления [3, 6]. Здесь ударная волна отражается от границы локально в виде центрированной волны разрежения.

Граничные условия (1.1) представляют собой частный случай широкого класса линейных условий отражения, связывающих возмущения приходящего, уходящего инвариантов Римана и энтропии. Они характерны для постановок задач при исследовании устойчивости, например детонационных волн [8, 9] или течений в соплах [10—12]. Границей течения могут быть, в частности, ударные и детонационные фронты, плоскость Жуге, выходное сечение сопла и т. д.

В данном случае условия (1.1) можно трактовать как учет взаимодействия течения в трубе с внешним потоком либо с некоторым устройством. Они носят чисто модельный характер.

Введем безразмерные переменные формулами

$$p = p_0(1 + \varepsilon p'), \quad a = a_0(1 + \varepsilon a'), \quad u = a_0 \varepsilon u' \\ J^\pm = a_0 \left( \varepsilon J^{\pm'} \pm \frac{2}{\kappa - 1} \right), \quad t = T t', \quad x = a_0 T x'$$

Ниже штрихи над безразмерными переменными опускаются.

В новых переменных уравнения движения и граничные условия записываются так:

$$\left( \frac{\partial J^+}{\partial t} \right)_\xi = 0, \quad \left( \frac{\partial J^-}{\partial t} \right)_\eta = 0, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_\xi = 1 + \frac{\kappa + 1}{4} \varepsilon J^+(\xi) + \\ + \frac{3 - \kappa}{4} \varepsilon J^-(\eta), \quad \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_\eta = -1 + \frac{\kappa + 1}{4} \varepsilon J^-(\eta) + \\ + \frac{3 - \kappa}{4} \varepsilon J^+(\xi) \\ J^+(n, t) + J^-(n, t) = 0, \quad J^+(0, t) = v(1 + \delta)J^-(0, t), \quad n = X/(a_0 T)$$

Будем отождествлять характеристическую переменную  $\xi(\eta)$  с моментом выхода соответствующей характеристики  $C^+$  ( $C^-$ ) с левой (правой) границы. Тогда, интегрируя уравнения для характеристик, находим

$$C^+ : x = \left[ 1 + \frac{\kappa + 1}{4} \varepsilon J^+(\xi) \right] (t - \xi) + \frac{3 - \kappa}{4} I^+ \\ C^- : x = n - \left[ 1 - \frac{\kappa + 1}{4} \varepsilon J^-(\eta) \right] (t - \eta) + \frac{3 - \kappa}{4} I^- \\ I^+ = \int_{\xi}^t J^-(\eta) dt, \quad I^- = \int_{\eta}^t J^+(\xi) dt$$

Интегралы в выражениях для  $I^\pm$  берутся вдоль характеристик  $\xi, \eta = \text{const}$ . В соответствии с выводами [5, 6] положение характеристик необходимо определять с точностью  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$  для случаев 1 и 2 соответственно.

Будем искать периодические решения задачи о колебаниях в предположении  $\delta \ll 1$ .

Интегралы  $I^\pm$  вычислим последовательными приближениями, используя в качестве первого приближения характеристики невозмущенного газа  $x = t - \xi$ ,  $x = -t + \eta + n$ . Очевидно, интегралы

$$I_0^+ = \int_{\xi}^t J^-(2\tau - \xi - n) d\tau, \quad I_0^- = \int_{\eta}^t J^+(2\tau - \eta - n) d\tau$$

на кусочно-гладких решениях отличаются от точных значений  $I^\pm$  на величины  $O(\varepsilon)$ . Отсюда делаем вывод, что уравнения характеристик с заменой в них величин  $I^\pm$  на  $I_0^\pm$  определяют в плоскости  $xt$  кривые, отклоняющиеся от истинных характеристик течения на величины  $O(\varepsilon^2)$ .

Полученные в первом приближении уравнения характеристик используем для вычисления следующего приближения  $I^\pm$ .

В результате довольно громоздких выкладок [5, 6] получим формулы для момента возвращения характеристики  $O^+$  на левую границу после ее отражения от жесткой стенки:

для случая 1

$$(1.2) \quad t_2 = \xi + 2n \left[ 1 - \frac{\kappa + 1}{4} \varepsilon J(\xi) \right]$$

для случая 2

$$(1.3) \quad t_2 = 2n \left[ 1 - \frac{\kappa + 1}{4} \varepsilon J(\xi) \right] + \varepsilon^2 \alpha J^2(\xi) + \varepsilon^2 \beta + \xi$$

$$\alpha = n \frac{(3\kappa + 7)(\kappa + 1)}{32}, \quad \beta = \frac{(3 - \kappa)(13 - 3\kappa)}{64} \int_{\xi}^{t_2} J^2 d\xi$$

Эти соотношения и связи

$$(1.4) \quad J(t_2) = J(\xi)(1 + \delta)$$

$$(1.5) \quad J(t_2) = -J(\xi)(1 + \delta)$$

вытекающие из граничных условий, образуют замкнутую систему уравнений, определяющую решение задачи. Здесь и далее индекс плюс у  $J^+$  опущен. Отметим здесь, что при выводе (1.2), (1.3) учитывалась возможность пересечения соответствующей характеристики с ударными волнами противоположного семейства [5, 6].

В линейном приближении (1.2)–(1.5) обладают решениями вида

$$(1.6) \quad J(t) = e^{i(k/n)\pi t} \cdot e^{\theta t}, \quad \theta = (2n)^{-1} \ln(1 + \delta)$$

$k = m$  для  $\nu = -1$ ,  $k = m + 1/2$  для  $\nu = +1$ ,  $m$  — целое число. При  $\delta < 0$  указанные решения затухают, а при  $\delta > 0$  растут экспоненциально со временем. В последнем случае состояние покоя для газа неустойчиво относительно произвольных малых возмущений, которые в линейном приближении усиливаются до бесконечности. В действительности на достаточно больших временах начинают сказываться нелинейные эффекты, которые, вообще говоря, могут приводить к стабилизации решения. Этот вопрос и рассматривается ниже.

При выводе уравнений (1.2), (1.3) неявно предполагалось, что средние значения всех величин по периоду равны нулю. Указанное предположение накладывает ограничения на возможный тип возмущений — именно они в среднем не должны уводить газ от невозмущенного его состояния. В принципе от этого предположения можно избавиться, очевидным образом переформулируя граничные условия.

**2. Исследование уравнений колебаний.** Будем искать периодические решения задач (1.2), (1.4) и (1.3), (1.5) с периодом  $M = kn_0$ ,  $n_0 = n + \Delta$ ,  $\Delta \ll 1$ ,  $k = 2$  для случая 1 и  $k = 4$  для случая 2.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

Разлагая  $J(t_2)$  в ряд Тейлора и используя условие периодичности, из (1.2), (1.4), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, которому искомое решение удовлетворяет на участках гладкости

$$(2.1) \quad [2\Delta - \frac{1}{2}n(\kappa + 1)\varepsilon J(\xi)] dJ/d\xi = \delta J(\xi)$$

Отсюда сразу следуют связи:  $\varepsilon \sim \delta \sim \Delta$ .

Полученное уравнение просто интегрируется и при  $\Delta = 0$  имеет своим решением помимо тривиального решения  $J \equiv 0$  линейную функцию

$$J = 2\delta(\xi + C)/(n \cdot \varepsilon(\kappa + 1))$$

Переходя к исследованию случая 2, воспользуемся приемом, предложенным в [5, 6]. Из (1.3) следует, что момент времени  $t_2$  возвращения характеристики  $C^+$  на левую границу после двухкратного прохождения трубы в прямом и обратном направлении с точностью до членов высшего порядка малости задается формулой

$$t_2 = \xi + 4nk + 2\varepsilon^2[\alpha J^2(\xi) + \beta]$$

Соответствующее значение инварианта  $J$  в силу граничных условий таково:

$$J(t_2) = J(\xi)(1 + \delta)^2$$

Разлагая функцию  $J(t_2)$  в ряд Тейлора в окрестности  $t_{20} = \xi + 4n_0$ , в силу предполагаемой ее периодичности приходим к дифференциальному уравнению

$$(2.2) \quad [4\Delta + 2\varepsilon^2\alpha J^2(\xi) + 2\varepsilon^2\beta] dJ/d\xi = 2\delta J(\xi)$$

Отсюда имеем оценки:  $\varepsilon^2 \sim \delta \sim \Delta$ .

Уравнение (2.2) также просто интегрируется:

$$(2\Delta + \varepsilon^2\beta) \ln |J| + \varepsilon^2\alpha J^2/2 = \delta t + C$$

Из полученного трансцендентного уравнения можно определить  $J$  как функцию  $t$ . Теперь, зная  $\Delta$ , постоянные интегрирования и положения разрывов, на основе выписанных интегралов можно скомпоновать решения о колебаниях, непрерывные либо разрывные. При таком подходе [1—4] важны правила выбора постоянных интегрирования и введения в решение сильных разрывов. В дополнение к этому в рассматриваемой задаче об автоколебаниях возникает вопрос об определении периода колебаний или, что то же, величины  $\Delta$ . Перечисленные проблемы нельзя решить без привлечения некоторых специальных предположений.

Будем в дальнейшем придерживаться пути исследования в работах [5, 6].

Напомним, там изучался широкий класс задач, в который как частный случай входят задачи о периодических нелинейных колебаниях газа в трубах. Последовательный асимптотический анализ уравнений движения позволил корректно обосновать способ введения в течение сильных разрывов. Одновременно был предложен алгоритм построения решения эволюционным путем. В его основе лежит тот факт, что дифференциальные уравнения характеристик в силу специфики течения удается проинтегрировать и определить их координаты  $(x, t)$  на конечных расстояниях от места их зарождения (формулы (1.2), (1.3)).

Ударные волны в течении образуются от пересечения характеристик одного семейства. Этот факт отвечает возникновению многозначности

в профиле соответствующего инварианта, например в зависимости от  $t$  при фиксированном  $x$ . Разрыв в области многозначности решения вводится из условия равенства площадей фигур, ограниченных кривой  $J(x, t)$ , лежащих по разные стороны от ударного фронта [7].

Обоснование этого правила для задач о вынужденных колебаниях приведено в [5, 6]. Все выводы цитированных работ без изменения переносятся и на рассматриваемый в данной работе класс задач. Соотношения (1.2)—(1.5) и сформулированное выше правило введения в течение скачков в силу сделанных в п. 1 предположений о характере возмущений приводят к интегральному закону сохранения импульса

$$\int_0^{kn_0} J(\xi) d\xi = 0$$

**3. Численные результаты.** Периодические решения уравнений (1.2)—(1.5) строились по схеме [5, 6]. Первоначально на отрезке  $[\xi_0, \xi_0 + L]$  ( $L = kn$  для случаев 1, 2 соответственно) задавалось некоторое распределение  $J = J_0(\xi)$ , удовлетворяющее условиям

$$(3.1) \quad \int_{\xi_0}^{\xi_0+L} J(\xi) d\xi = 0, \quad J(\xi_0) = J(\xi_0 + L)$$

Под действием преобразований (1.2), (1.3) начальный отрезок переводился в  $[t(\xi_0), t(\xi_0) + L]$ . Если решение при этом «опрокидывалось», в областях многозначности вводились ударные волны по правилу площадей. Значения  $J(\xi)$  на  $[t(\xi_0), t(\xi_0) + L]$  определялись затем по формулам (1.4), (1.5). Очевидно, новая построенная функция на  $[t(\xi_0), t(\xi_0) + L]$  также удовлетворяет (3.1). Полученные новые значения  $J(\xi)$  периодически продолжались на  $[\xi_0, \xi_0 + L]$ , затем описанная процедура вновь повторялась до тех пор, пока не достигалось установление.

В изложенную схему расчета была введена дополнительная модификация. Она обусловлена тем, что в рассматривавшихся до сих пор задачах период вынужденных колебаний был заранее известен, а здесь он определялся в процессе построения решения. Из соображений удобства реализации вычислительного алгоритма решалась в известном смысле обратная задача: период  $T = kn_0$  задавался постоянным и в процессе счета подбирались длина трубы  $n$  с тем, чтобы численное решение имело период  $T$ .

Процедура корректировки длины трубы была организована следующим образом. Пусть известны величина  $n_i$  предыдущей итерации и координата некоторой выделенной точки решения  $t_i$  (ею может быть, например, точка на ударном фронте, либо один из нулей функции). Пусть в результате выполнения описанной выше процедуры преобразования профиля  $J$  и его периодического продолжения выделенная точка приобретает координату  $t_f$ . Длина трубы для проведения следующей итерации принималась равной

$$n_f = n_i - \min \{x_f - x_i, x_f - x_i + 2T, x_f - x_i - 2T\} / k$$

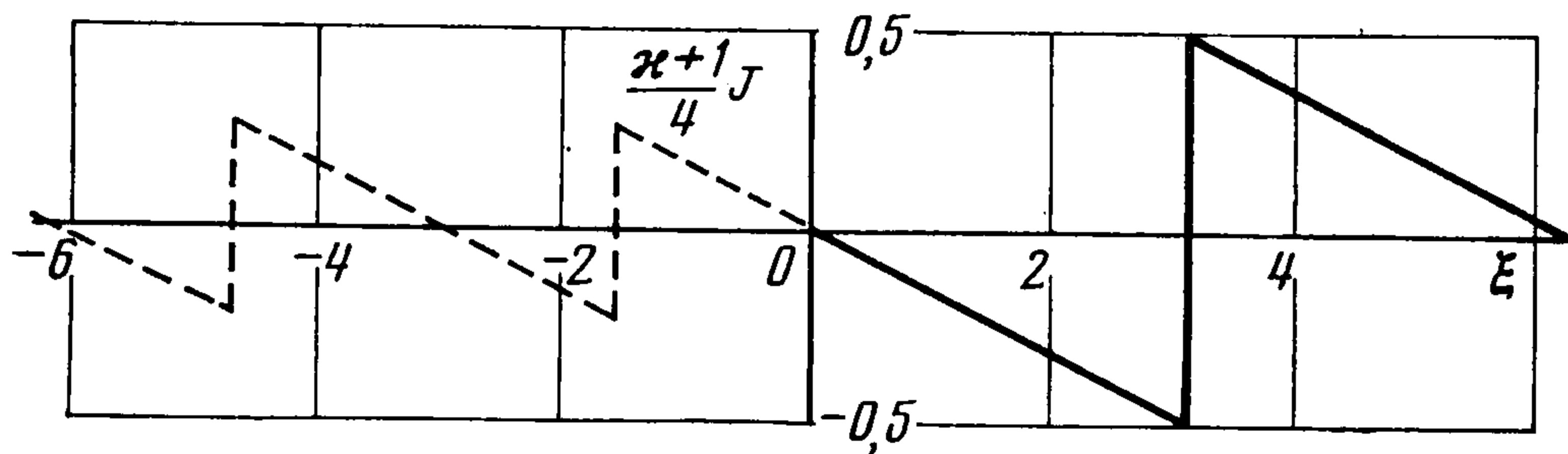
В качестве начального приближения величина  $n$  выбиралась равной  $n_0$ . Смысл такой корректировки понятен из рассмотрения формул (1.2), (1.3).

Фиг. 1 иллюстрирует результаты расчетов для случая 1. Здесь  $\varepsilon = \delta = 10^{-1}$ ,  $n_0 = \pi$ .

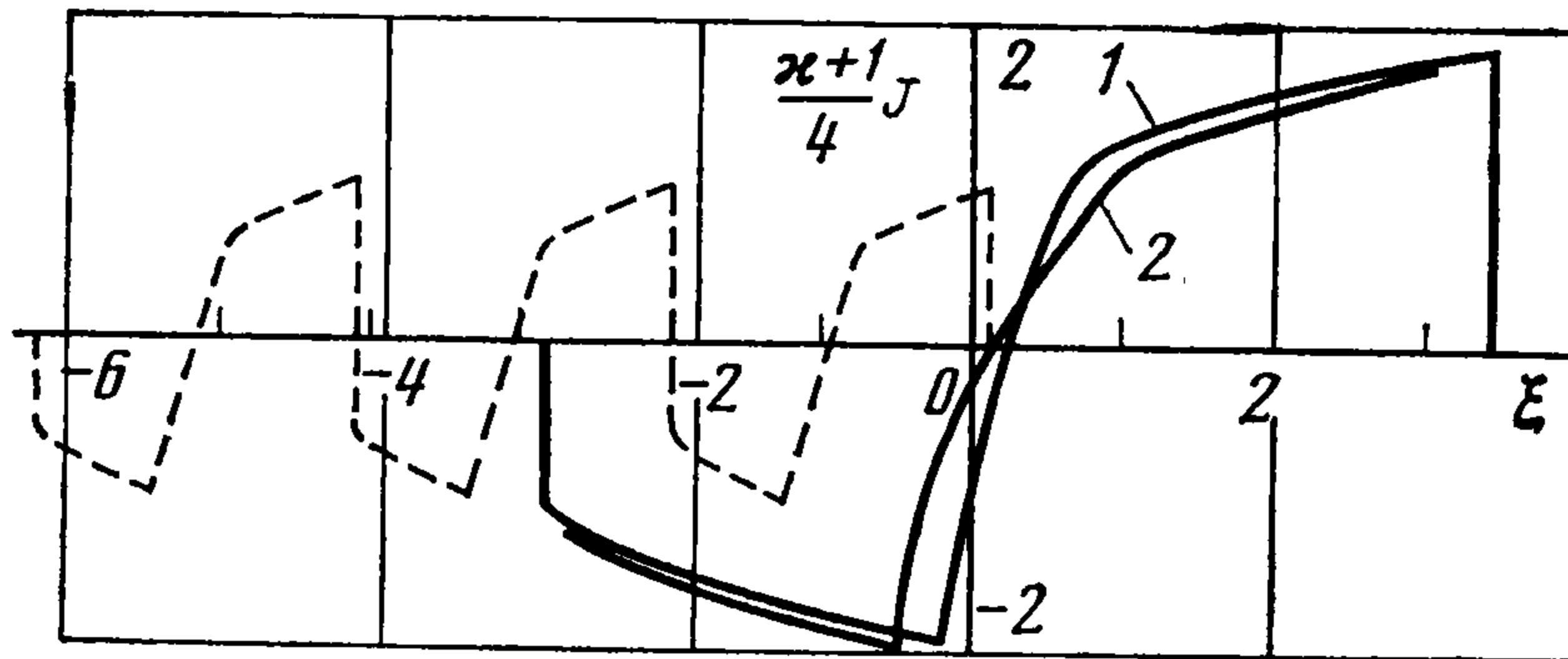
Сплошной линией представлен результат, когда в качестве начальной принималась функция

$$(3.2) \quad J_0(\xi) = -4(\kappa + 1)^{-1} \sin \xi$$

Как показали расчеты,  $\Delta = 0$ . В согласии с выполненными в п. 2 аналитическими исследованиями искомое решение на периоде состоит из двух



Фиг. 1



Фиг. 2

участков прямых, соединенных ударным фронтом, или, иначе говоря, представляет собой симметричную  $N$ -волну. (Будем для характеристики получающихся профилей использовать этот термин, хотя обычно в гидродинамике он относится к решению из двух ударных волн, соединенных участком прямой.)

Штриховой линией представлен результат расчетов при

$$J_0 = -4(x+1)^{-1} \sin 2\xi$$

Видно, что здесь имеются две симметричные  $N$ -волны, что можно было ожидать на основании выводов линейной теории (1.6).

Вообще оказалось, что произвольное начальное распределение  $J_0(\xi)$  дает решение, представимое на отрезках  $(\varphi + 2\pi m, \varphi + 2\pi(m+1))$  ( $\varphi$  — фаза, определяемая  $J_0$ ) в виде совокупности независимых симметричных  $N$ -волн, разделенных участками покоя. Однако, как показали численные расчеты, эти решения неустойчивы относительно малых возмущений. При искусственном введении таких возмущений они сливаются и дают одну  $N$ -волну (сплошная линия на фиг. 1). Последняя устойчива относительно возмущений, которые приводят к сдвигу фазы решения. Решение с одной  $N$ -волной рассмотрено в [13] в связи с исследованием окolorезонансных колебаний в движущемся газе.

На фиг. 2 нанесены результаты расчетов для случая 2 при  $\delta = \varepsilon^2$ ,  $n_0 = \pi/2$ ,  $\varepsilon = 0,1$  (кривая 1) и  $\varepsilon = 0,2$  (кривая 2). В качестве начальных распределений для 1 и 2 принималась одна и та же функция (3.2) и графики приведены к одной фазе. Видно, что оба решения близки одно к другому везде, кроме окрестности волны сжатия, протяженность которой для кривой 2 в соответствии с формулой (1.3) приблизительно в два раза больше, чем для кривой 1. В отличие от случая 1 здесь имеется зависимость периода колебаний от амплитуды решения. Расчеты показали, что  $\Delta = 0,866\varepsilon^2\beta$ ,  $\beta = 4,71$  для решения 1;  $\Delta = 0,855\varepsilon^2\beta$ ,  $\beta = 4,30$  для решения 2. Выводы о близости решений для разных  $\varepsilon$  находятся в согласии с законами подобия, полученными в результате аналитического исследования, приведенного в п. 2.

Были выполнены расчеты с целью построения нелинейных аналогов (1.6) с более высокими гармониками. Их результаты для начальной функции  $J_0 = -4(x+1)^{-1} \sin 3\xi$ ,  $\varepsilon = 0,1$  изображены на фиг. 2 штриховой

линией ( $\Delta = 0,9\epsilon^2\beta$ ,  $\beta = 1,3$ ). Указанное решение с высокой точностью можно принять установившимся в течение большого числа итераций (это число растет по мере увеличения количества узлов при дискретной аппроксимации уравнений (1.3), (1.5) в вычисленном алгоритме на ЭВМ), однако в конце концов оно разрушается и переходит в изображенное сплошной линией  $I$  (с точностью до фазового сдвига). Заметим, что неустойчивость высокочастотных режимов относительно вычислительного алгоритма имеет место и в случае 1.

Исследование полученных решений на устойчивость можно, по-видимому, провести строго. Однако довольно очевидно, например из рассмотрения штриховой кривой на фиг. 1, что нарушение симметрии  $N$ -волн при выполнении условия

$$\int_0^{2n_0} J(\xi) d\xi = 0$$

с необходимостью должно привести к слиянию двух ударных волн в одну, что и означает переход к режиму, показанному на фиг. 1 сплошной линией.

Низкочастотное решение, показанное сплошными кривыми на фиг. 2, устойчиво относительно как расчетной схемы, так и малых возмущений. Последние приводят к фазовому сдвигу этих кривых, тем меньшему, чем меньше амплитуда возмущений.

Автор благодарит А. Н. Крайко и В. Е. Фортова за внимание к работе и поддержку.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горьков Л. П. Нелинейные акустические колебания столба газа в закрытой трубе // Инж. журн. 1963. Т. 3. Вып. 2. С. 246—250.
2. Chester W. Resonant oscillations in closed tubes // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. Pt 1. P. 44—64.
3. Галиев Ш. У., Ильгамов М. А., Садыков А. В. О периодических ударных волнах в газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 2. С. 57—66.
4. Jimenez J. Nonlinear gas oscillations in pipes. Theory // J. Fluid Mech. 1973. V 59. Pt 1. P. 23—46.
5. Крайко А. Н., Ни А. Л. О приближении нелинейной акустики в задачах о колебаниях газа в трубах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 77—88.
6. Ни А. А. Нелинейные резонансные колебания газа в трубе под воздействием периодически изменяющегося давления // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 607—618.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат. 1953. 788 с.
8. Зайдель Р. М., Зельдович Я. Б. Одномерная неустойчивость и затухание детонации // ПМТФ. 1963. № 6. С. 59—65.
9. Черный Г. Г. Возникновение колебаний при ослаблении волн детонации // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 465—475.
10. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Исследование устойчивости течения идеального газа в квазицилиндрическом канале // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 473—484.
11. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Об устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при одновременном отражении от сечения выхода акустических и энтропийных волн // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 469—478.
12. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И., Широносков В. А. Анализ устойчивости одномерного течения в канале при произвольном изменении параметров стационарного потока между сечением замыкающего скачка и выходом из канала // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 637—645.
13. Егорушкин С. А. Околорезонансные колебания газа, движущегося в канале переменного сечения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 107—115.