Прикладная математика и механика. Том 51, вып. 5, 1987

УДК 532.5 : 534

НЕЛОКАЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

Доброхотов С. Ю., Жевандров П. Н., Кузьмина В. М.

Рассматривается эволюция двухслойной среды вода — воздух под действием ветра в приближении слабой нелинейности. Наряду с изученными в [1—3] эффектами, здесь при помощи операторного метода [4, 5] приводятся аналоги уравнений Буссинеска без предположения о малости глубины водного бассейна, а также при учете действия ветра, но в предположении, что амплитуды соответствующих волновых процессов малы, средняя скорость ветра и дно водного бассейна — заданные функции, «медленно» меняющиеся по горизонтальным координатам и времени. Получены нелокальные (псевдодифференциальные) уравнения, описывающие поведение изучаемой среды с учетом квадратичных и кубичных нелинейных слагаемых. Методами [6, 7] строятся асимптотические решения этих уравнений, учитывающие слабые резонансные взаимодействия. Указаны алгоритмы вывода подобных уравнений и построения их асимптотических решений при учете произвольной степени нелинейности.

1. Сведение исходной задачи к задаче на свободной границе. Эволюция двухслойной среды вода — воздух под действием ветра в бассейне с неровным дном рассматривается в следующих предположениях: вода и воздух — несжимаемые, невязкие, в воздухе поле скорости состоит из заданной средней скорости ветра и малых по сравнению с ней возмущений: $V = (U_1 + u_1,\ U_2 + u_2,\ w_2)$, движение воды описывается потенциалом скоростей $\Phi(x, z, t)$. Здесь t — время, $x = (x_1, x_2)$ — горизонтальные, z — вертикальная координаты, $z = 0$ соответствует невозмущенной границе раздела двух сред. Дно водного бассейна описывается уравнением $z = -D(x)$, свободная граница — уравнением $z = \eta(x, t)$, функция $D(x) > 0$ задана.

Исходными являются уравнения сохранения количества движения, массы, а также граничные условия: на дне водного бассейна (твердой стенки), на границе раздела (динамическое и кинематическое) и на верхней границе приводного слоя (возмущения пренебрежимо малы при $z \to \infty$). Эволюция изучаемой среды рассматривается на временах $\sim L/\sqrt{g\lambda}$, где $\lambda \sim U_\infty^2/g$, $L\,(h = \lambda/L \ll 1)$ — характерные для изучаемых волновых процессов длина волны и длина разгона, U_∞ — средняя скорость ветра на верхней границе приводного слоя, g — ускорение силы тяжести. Размеры водного бассейна предполагаются много большими L, что исключает из рассмотрения влияние береговых эффектов.

Введем безразмерные параметры $\delta = \rho_2/\rho_1 \ll 1$ и $\varepsilon = \eta_0/\lambda$, описывающие отношение плотностей воздуха и воды и характерный уклон волн. Здесь η_0 — характерная амплитуда изучаемого волнения, ε характеризует нелинейность, предполагается малым и связанным с δ соотношением $\delta = \varepsilon^2$. Рельеф дна водоема и среднюю скорость ветра считаем медленно меняющимися функциями x, t:

$$|\nabla D| \sim \frac{\lambda}{L},\quad |\nabla U_i| \sim \frac{\sqrt{g\lambda}}{L},\quad \frac{\partial U_i}{\partial z} \sim \sqrt{\frac{g}{\lambda}}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} \sim \frac{g\lambda}{L},\quad i = 1, 2,\quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

В безразмерных переменных $x' = x/L$, $z' = z/\lambda$, $t' = t\sqrt{g\lambda}/L$ система уравнений и граничных условий, описывающая эволюцию изучаемой среды, после исключения давления принимает вид

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} & z = \varepsilon\eta(x, t) \\ & h\nabla(\eta + h\Phi_t + {}^1/_2\varepsilon\,|h\nabla\Phi|^2 + {}^1/_2\varepsilon\Phi_z^2) + \\ & + \varepsilon h\nabla\eta\,(\partial/\partial z)\,(h\Phi_t + {}^1/_2\varepsilon\,|h\nabla\Phi|^2 + {}^1/_2\varepsilon\Phi_z^2) = \\ & = \varepsilon^2\{(1 + \varepsilon h w_t + \varepsilon^2 h\nabla w\cdot u + \varepsilon^2 w_z w)\,h\nabla\eta + h u_t + \\ & + \varepsilon\,(u\cdot h\nabla)\,u + U_z w + \varepsilon u_z w\} \\ & h\eta_t + \varepsilon h\nabla\eta\cdot u = w \\ & h\eta_t + \varepsilon h\nabla\eta\cdot h\nabla\Phi = \Phi_z \end{aligned}$$

$$(1.2)\qquad z = -D(x),\ \Phi_z + h\nabla D\cdot h\nabla\Phi = \Phi_z$$

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} & \varepsilon\eta(x, t) \leqslant z < \infty \\ & h u_{tz} + (\partial/\partial z)\,\{(U\cdot h\nabla)\,u + \varepsilon\,(u\cdot h\nabla)\,u + (u\cdot h\nabla)\,U + \\ & + U_z w + \varepsilon w u_z\} = h^2\nabla w_z + h\nabla\,(U\cdot h\nabla w + \varepsilon u\cdot h\nabla w + \varepsilon w_z w) \end{aligned}$$

$$(1.4)\qquad \varepsilon\eta(x, t) \leqslant z < \infty,\ h\nabla\cdot u + w_z = 0$$

$$(1.5)\qquad -D(x) \leqslant z \leqslant \varepsilon\eta(x, t),\ h^2\Delta\Phi + \Phi_{zz} = 0$$

$$(1.6)\qquad \begin{aligned} & z \to \infty,\ u_i,\ w \to 0,\ i = 1, 2 \\ & \eta'(x', t') = \eta(x, t)/\eta_0,\ \Phi'(x', z', t') = \Phi(x, z, t)/(\eta_0\sqrt{g\lambda}), \\ & U'(x', t', z') = U(x, t, z)/\sqrt{g\lambda},\ (u', w')(x', t', z') = \\ & = (u, w)(x, t, z)/(\eta_0\sqrt{g/\lambda}),\ D'(x') = D(x)/\lambda \end{aligned}$$

Здесь $u = (u_1, u_2)$, $U = (U_1, U_2)$, $\Delta = \nabla^2$, $a_1\cdot a_2$ — скалярное произведение, штрихи опущены. Условие «медленности» изменения рельефа дна и средней скорости ветра в безразмерных переменных означает, что функции $D(x)$, $U(x, t, z)$ — гладкие и не зависят от h.

Для системы (1.1)—(1.6) рассмотрим задачу Коши—Пуассона, т. е. на свободной границе будем считать заданными при $t = 0$ Φ, Φ_t, u, w, и будем изучать ограниченные в $R_x^2 \times R_t^+$ решения, зависящие гладко от ε и нерегулярно от h так, что

$$\frac{\partial^{|\alpha|+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial z^\beta \partial t^\gamma} \sim h^{-|\alpha|-\gamma},\quad |\alpha|, \beta, \gamma = 0, 1, \ldots$$

на функциях Φ, u, w, η.

Естественная процедура при исследовании волновых движений на поверхности жидкости состоит в исключении переменной z и сведении задачи к исследованию уравнений для границы раздела $\eta(x, t)$ и функций, характеризующих потенциал Φ и скорость в воздушном слое u, w в переменных $x = (x_1, x_2)$, t. Эти функции могут быть введены неоднозначно. Например, можно задавать Φ, u, w при $z = 0$ или средние значения Φ, u, w в соответствующих слоях и т. п.

Для излагаемой здесь схемы наиболее удобным оказалось введение функций на свободной границе:

$$(1.7)\qquad \varphi = \Phi\,|_{z=\varepsilon\eta},\ v = w\,|_{z=\varepsilon\eta},\ \psi = u\,|_{z=\varepsilon\eta}$$

В отсутствии верхнего слоя функции φ и η для соответствующей системы составляют так называемые канонические переменные [8].

Без учета ветра для длинных волн со слабой дисперсией процедура исключения хорошо известна и приводит в предположениях $\varepsilon = \sqrt{h}$, $D = \sqrt{h}D_1$ в нулевом приближении по h к волновому уравнению, в следующем — к уравнению Буссинеска и т. д. [9]. В общем случае проведение подобной процедуры без дополнительных предположений, по-видимому, невозможно. Предположение о «медленности» изменения рельефа дна и средней скорости ветра дает возможность провести такую процедуру и свести задачу к исследованию более простой системы уравнений для φ, η, ψ, v, а затем и к скалярному, хотя и псевдодифференциальному, уравнению для φ, что приводит к существенному уменьшению объема вычислений по сравнению с исходной задачей (по крайней мере, в асимптотическом анализе). Такая процедура была проведена в [10] [1]. Подобный подход был использован в [11, 12] при доказательстве существования и единственности решений, описывающих поверхностные волны без учета ветра.

Поскольку получение точных формул в случае переменных коэффициентов невозможно, здесь пойдет речь только о разложениях по параметру ε с наперед заданной точностью. Для учета квадратичных и кубичных членов процедуру исключения z достаточно провести до членов порядка ε^2, поэтому все дальнейшие формулы приведены с точностью $O(\varepsilon^3)$. С этой степенью точности окончательные уравнения рассматриваются только на функции φ, η и имеют вид (схема их вывода приведена в п. 3)

$$
\begin{aligned}
&h^2\Delta \{\eta + h\varphi_t + {}^1/_2\varepsilon\, (\,|h\nabla\varphi|^2 - (B_0\varphi)^2) - \\
&- \varepsilon^2 (B_0\varphi\, (\eta\, (-h^2\Delta\varphi) - B_0\eta B_0\varphi))\} = \varepsilon^2 \{h^2\Delta\eta - \\
&-h\, (\partial/\partial t)\, (B_1 h\eta_t) + (h\nabla\cdot U_z{}^\circ)\, h\eta_t + U_z{}^\circ\cdot h^2\nabla\eta_t\} + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&h\eta_t - B_0\varphi + \varepsilon\, \{h\nabla\cdot\eta h\nabla\varphi + B_0\eta B_0\varphi\} - \varepsilon^2 \{B_0\varphi\, |h\nabla\eta|^2 + \\
&+ B_0\, (\eta B_0\eta B_0\varphi + {}^1/_2\eta^2 h^2\Delta\varphi) + \eta h^2\Delta\, (\eta B_0\varphi) - {}^1/_2\eta^2 \times \\
&\times h^2\Delta B_0\varphi\} = O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Здесь B_0, B_1 — псевдодифференциальные операторы, их символы имеют вид

$$
B_0 = \frac{\partial R}{\partial z}(x, p, 0, h), \qquad B_1 = \frac{\partial R_w}{\partial z}(x, t, p, \omega, 0, h)
$$

$$
R_w = R_{w_0} - ihR_{w_1} + \ldots
$$

Функция R_{w_0} определяется из задачи Релея (3.3), $U_z{}^\circ = (\partial U/\partial z)\,|_{z=0}$; запись $B_0\eta B_0\varphi$ означает $B_0\,[\eta B_0\varphi]$.

В левой части уравнения (1.8), главной по параметру ε, наличие оператора $h^2\Delta$, вообще говоря, может привести к появлению дополнительных по сравнению с исходной задачей решений или исчезновению части решений. Этого, однако, не происходит, если рассматривать только ограниченные φ и η.

От системы (1.8), (1.9) перейдем к рассмотрению одного уравнения на функцию φ. После применения к (1.9) оператора $h^2\Delta$, выражения $h^2\Delta\eta$ из (1.8) с точностью $O(\varepsilon^3)$ и η — с точностью $O(\varepsilon^2)$ уравнение (1.9) переходит в уравнение для φ:

$$
\begin{aligned}
&h^2\Delta \{[h^2\varphi_{tt} + B_0\varphi] + \varepsilon\, [{}^1/_2\, (h\partial/\partial t)\, (\,|h\nabla\varphi|^2 - (B_0\varphi)^2) + \\
&+ h\nabla\cdot (h\varphi_t h\nabla\varphi) + B_0 h\varphi_t B_0\varphi] + \varepsilon^2\, [(h\partial/\partial t)\, (B_0\varphi\, (h\varphi_t h^2\Delta\varphi + \\
&+ B_0 h\varphi_t B_0\varphi)) + {}^1/_2 h\nabla\cdot(\,|h\nabla\varphi|^2 - (B_0\varphi)^2)\, h\nabla\varphi + \\
&+ B_0\, (\,|h\nabla\varphi|^2 - (B_0\varphi)^2) B_0\varphi + (B_0\varphi\, |h^2\nabla\varphi_t|^2 - \\
&- B_0\, (h\varphi_t B_0 h\varphi_t B_0\varphi - {}^1/_2\, (h\varphi_t)^2\, (-h^2\Delta\varphi)) + \\
&+ h\varphi_t\, (-h^2\Delta\, (h\varphi_t B_0\varphi)) + {}^1/_2\, (h\varphi_t)^2\, h^2\Delta B_0\varphi]\} + \\
&+ \varepsilon^2\, \{h^2\Delta h\varphi_t - (h\partial/\partial t)\, B_1 h^2\varphi_{tt} + (h\nabla\cdot U_z{}^\circ)\, h^2\varphi_{tt} + \\
&+ U_z{}^\circ\cdot h^3\nabla\varphi_{tt}\} = O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

---

[1] Без учета ветра — в работе: *Доброхотов С. Ю.* Многофазовые асимптотики и теория Маслова в линейных и нелинейных уравнениях водяных волн. Воронеж, 1984. 90 с.— Деп. в ВИНИТИ 3.07.84; № 4585-84.

Это уравнение является нелокальным аналогом уравнения Буссинеска и переходит в него при $\varepsilon = \sqrt{h}$, $D = \sqrt{h}D_1$ в первом приближении по h. Оно учитывает все члены дисперсии, а также влияние ветра.

2. Слабонелинейные взаимодействия ветровых волн в бассейне с неровным дном. Найдем некоторые асимптотические решения уравнения (1.10). При $\varepsilon = 0$, $\delta = h$ (1.10) допускает решения в виде «искаженных» плоских волн, представляющие собой при $h \to 0$ быстро осциллирующие функции [10]. Асимптотика таких решений имеет вид

$$A\ (x,\ t) \exp \{iS\ (x,\ t)/h\} + o\ (1)$$

Естественно, что их суперпозиция тоже является решением. В частности, суперпозицией двух искаженных плоских волн, бегущих в противоположных направлениях, описывается решение задачи Коши с начальными условиями

$$t = 0,\ \varphi = A_1{}^\circ\ (x) \exp \{iS_0\ (x)/h\} + \text{к. с.} \tag{2.1}$$
$$h\varphi_t = A_2{}^\circ (x) \exp \{iS_0\ (x)/h\} + \text{к. с.}$$
$$A_j{}^\circ (x) \in C_0{}^\infty\ (R^2),\ j = 1,\ 2,\ S_0\ (x) \in C^\infty\ (R^2),\ \nabla S_0 \neq 0$$

Здесь к. с. означает комплексно-сопряженное выражение.

Возникает естественный вопрос о существовании аналогичных решений в нелинейном случае, а также о законе суперпозиции для них. Ответ на этот вопрос неоднозначен и определяется видом зависимости ε от h. Оказывается, если $\varepsilon = O\ (h^\alpha)$, то в главном члене (с точностью до поправок o (1) при $h \to 0$) нелинейные эффекты играют роль лишь при $\alpha \leqslant {}^1/_2$.

В случае $\alpha = {}^1/_2$ задача нахождения главного члена асимптотики изучаемой задачи Коши на рассматриваемых временах корректна.

Справедливы следующие результаты. Главный член асимптотического решения задачи Коши (1.10), (2.1) при некоторых дополнительных предположениях на временах $t \in [0,\ T]$ имеет вид

$$A_+\ (x,\ t) \exp\ [iS_+\ (x,\ t)/h] + \tag{2.2}$$
$$+ A_-\ (x,\ t) \exp\ [iS_-\ (x,\ t)/h] + h^{-1/2}A_0\ (x,\ t)$$
$$A_\pm\ (x,\ t) \in C_0{}^\infty\ (R^2 \times R^+),\ A_0 S_\pm \in C^\infty\ (R^2 \times R^+)$$
$$S_+ = -S_-,\ A_+ = \bar{A}_-,\ \nabla S_\pm \neq 0$$

При этом уравнения относительно фазы $S_\pm$ и квадрата модуля амплитуды $|A_\pm|^2$ остаются такими же, как и в линейном случае. Фаза определяется из уравнения Гамильтона—Якоби с начальным условием, соответствующим (2.1):

$$\partial S_\pm/\partial t \pm H\ (x,\ \nabla S_\pm) = 0;\ t = 0,\ S_+ = -S_- = S_0\ (x), \tag{2.3}$$
$$H\ (x,\ p) = (\ |p|\ \mathrm{th}\ (\ |p|\ D\ (x)))^{1/2}$$

и выражается через решения $X\pm$, $P\pm$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (системы Гамильтона)

$$x^\cdot = H_p,\ p^\cdot = -H_x;\ t = 0,\ x = \alpha,\ p = \partial S_0\ (\alpha)/\partial\alpha \tag{2.4}$$

Тогда, в предположении, что при всех $t \in [0,\ T]$ якобиан $J = \det\ |\partial X\pm/\partial\alpha|$ не равен нулю, имеем

$$S_\pm (x, t) = \pm S_0 (\alpha) + \int_0^t (P\pm X^\cdot\pm - H\ (X\pm,\ P\pm))\ d\tau$$

Величина $|A_\pm|^2$ удовлетворяет уравнению

$$J^{-1}\ (d/dt)\ (J\ |A_\pm|^2) = -2B_I\ (\omega,\ p,\ x,\ t)\ \omega^3 p^{-2}\ |A_\pm|^2$$

где $\alpha = \alpha^{\pm}(x, t)$ — решение уравнения $X^{\pm}(\alpha, t) = x$, $\alpha \in \operatorname{supp} A_1^\circ \cup \cup \operatorname{supp} A_2^\circ$, $p = \nabla S_{\pm}$, $\omega = \partial S_{\pm}/\partial t$, функция $B_I = \operatorname{Im} B_1$ (см. (1.10)) определяется из задачи Релея (3.3), d/dt — производная вдоль траектории $(X^{\pm}, P^{\pm})$ системы (2.4).

Нелинейность сказывается лишь в поправке к фазе, определяемой из уравнения для амплитуд ((2.8) при $N = 1$). При определении этой поправки дополнительно требуется решить волновое уравнение на A_0 ((2.9) при $N = 1$), правая часть которого пропорциональна производным от квадрата модуля амплитуды. Отметим, что при вычислении поля скоростей последнее слагаемое в (2.2) дает поправку к главному члену $O(h^{1/2})$.

Таким образом, для задачи Коши (1.10), (2.1) главный член асимптотики определяется аналогично линейному случаю, нелинейность вносит лишь малую добавку к фазе. При этом фаза существенно зависит от неоднородностей рельефа дна, а влияние ветра сказывается лишь при определении амплитуды, что приводит, как и в линейном приближении, к появлению инкремента [10].

Рассмотрим вопрос о суперпозиции большого числа решений, т. е. для уравнения (1.10) исследуем решение задачи Коши с начальными условиями

(2.5) $$t = 0,\ \varphi = \varphi_1(x),\ h\varphi_t = \varphi_2(x)$$
$$\varphi_j = \Sigma,\ A_k^j(x) \exp\{iS_k^\circ(x)/h\},\ j = 1, 2$$
$$A_k^{1,2} \in C_0^\infty(R^2), \qquad S_k^\circ \in C^\infty(R^2), \qquad S_k^\circ = -\overset{\circ}{S}_{-k}$$
$$A_k^{1,2} = \bar{A}_k^{1,2}, \qquad \nabla S_k^\circ \neq 0, \qquad k = \pm 1, \ldots, \pm N$$

Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях (см. ниже), как и в линейном случае, главный член асимптотики (1.10), (2.5) представим в виде

(2.6) $$k = -2N, \ldots, 2N,\ k \neq 0$$
$$\Sigma A_k(x, t) \exp\{iS_k(x, t)/h\} + h^{-1/2} A_0(x, t)$$

Каждая из фаз S_k в (2.6) — по-прежнему решение задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби (2.3) (ср. с (2.5))

(2.7) $$t = 0,\ S_{2l-1} = -S_{2l} = S_l^\circ(x),\ l = 1, \ldots, N$$

как и ранее, выражается через решения системы Гамильтона, удовлетворяющие условиям

$$t = 0,\ x_{2l-1} = x_{2l} = \alpha,\ p_{2l-1} = p_{2l} = \partial S_l^\circ(\alpha)/\partial\alpha$$
$$l = 1, \ldots, N,\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Уравнения относительно квадратов амплитуд, вообще говоря, получаются не такими, как в линейном случае: они существенно зависят от наличия резонансного взаимодействия между отдельными волнами. Для описания резонансного взаимодействия введем в рассмотрение удовлетворяющие одному из начальных условий (2.7) функции $S^{mnl} = S_m + S_n + S_l$ с попарно различными $n, m, l \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2N\}$ и множества Γ_{mnl} нулей функций $\{\partial S^{mnl}/\partial t \pm H(x, \nabla S^{mnl})\}$. Возможны следующие случаи.

1°. Для всевозможных наборов m, n, l $\Gamma_{mnl} = \varnothing$. В этом случае резонансное взаимодействие отсутствует. Уравнения относительно квадратов модулей амплитуд определяются аналогично линейному случаю. Нелинейность приводит лишь к возникновению в главном члене поправок к фазам, которые находятся из уравнений, аналогичных случаю $N = 1$.

2°. Существуют такие наборы m, n, l, что $\Gamma_{mnl} = R^2$, остальные $\Gamma_{mnl} = \varnothing$. Такие резонансы назовем сильными. В этом случае резонансное взаимодействие приводит к появлению новой фазы $S_k = S^{mnl}$ с номером $k \neq m, n, l$ и при определении главного члена асимптотики нелинейность играет роль даже в уравнениях относительно квадратов модулей амплитуд $|A_k|^2$. Уравнения относительно амплитуд и гладкой составляющей с соответствующими (2.5) начальными условиями имеют вид (схема их вывода приведена в п. 4)

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad & iJ^{-1/2}(d/dt_k)(J^{1/2}A_k) = -\omega_k p_k^{-2}(p_k^2 - B_1(p_k, \omega_k)\omega_k^2 + \\
& + U_z^{\circ}\cdot p_k\omega_k)A_k + {}^1/_2\omega_k^{-1}A_k(\Sigma|A_m|^2\alpha_m^k(x,t) + 2\omega_k p_k\cdot\nabla A_k + \\
& + p_k^2\,\mathrm{ch}^{-2}(|p_k|D)A_{0t}) + {}^1/_2\omega_k^{-1}\Sigma'(\beta_{mnl}^k(x,t)A_mA_nA_l), \\
& m = \pm 1, \ldots, \pm 2N \\
& t = 0,\ A_{2l-1} = \bar{A}_{-2l+1} = {}^1/_2(A_l^1 + iA_l^2(H(x, \nabla S_l^0))^{-1}) \\
& A_{-2l} = \bar{A}_{2l} = {}^1/_2(A_l^1 - iA_l^2(H(x, \nabla S_l^0))^{-1}) \\
& l = 1, 2, \ldots, N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2.9)\qquad & A_{0tt} - \nabla\cdot(D\nabla A_0) = \Sigma\{\partial/\partial t(|A_m|^2(\omega_m^4 - p_m^2)) - \\
& - 2\nabla\cdot(|A_m|^2\omega_m p_m)\} \\
& t = 0,\ A_{0t} = A_0 = 0,\ m = \pm 1, \ldots, \pm 2N
\end{aligned}
$$

Здесь, как и выше, предполагается, что при всех $t \in [0, T]$ якобианы $J_k = \det|\partial X_k(\alpha, t)/\partial\alpha| \neq 0$, d/dt_k — производная вдоль траектории (X_k, P_k) гамильтоновой системы, $p_k = \nabla S_k$, $\omega_k = \partial S_k/\partial t$, B_1 определена в (1.10), суммирование в Σ' производится по таким m, n, l, для которых $\Gamma_{mnl} = R^2$, коэффициенты α_m^k, β_{mnl}^k определяются из равенств

$$
\begin{aligned}
& \alpha_m^k = 2b_{k,-m}\{\omega_k^2\omega_m^2(\omega_k - \omega_m) + G_{k,-m}\omega_m] - (p_k - p_m)\times \\
& \times(\omega_k p_m + \omega_m p_k) - \omega_k\omega_m^2 G_{k,-m} - p_k\cdot p_m(\omega_k - \omega_m)\} + \\
& + {}^1/_2(\omega_k^2\omega_m^2 + p_k^2\omega_m^4 - p_k^2\omega_k^2\omega_m^2 + 3\omega_k^2\omega_m^4 - \omega_k^4 p_m^2 - \\
& - p_k^2 p_m^2) - \omega_k^2\omega_m^2 G_{k,-m}(\omega_k^2 - \omega_m^2) \\
& b_{km} = [(\omega_k + \omega_m)(\omega_k^2\omega_m^2 + 2p_k\cdot p_m) + p_k^2\omega_m + p_m^2\omega_k - \\
& - G_{m,-k}(\omega_m\omega_k^2 + \omega_k\omega_m^2)][G_{m,k} - (\omega_m + \omega_k)^2]^{-1} \\
& G_{m,k} = |p_m + p_k\,\mathrm{th}(|p_m + p_k|D(x)) \\
& \beta_{mnl}^k = -\omega_k\omega_m^2\omega_l p_n^2 + \omega_k\omega_m^2 G_{l,n}\omega_l\omega_n^2 + \\
& + {}^1/_2 p_k\cdot p_m(p_l\cdot p_n + \omega_l^2\omega_n^2) + {}^1/_2\omega_k^2\omega_l^2(p_l\cdot p_n + \omega_l^2\omega_n) - \\
& - p_m\cdot\omega_m p_l\omega_l\omega_n^2 + {}^1/_2\omega_m\omega_l\omega_n^2 p_n^2 - \omega_m\omega_n^2\omega_l(p_l + p_n)^2 + \\
& + \omega_k^2\omega_m\omega_l\omega_n^2 G_{l,n} - {}^1/_2\omega_k^2\omega_l p_n^2\omega_m + \omega_k p_n\cdot(p_m + p_l)b_{ml} + \\
& + \omega_k G_{m,l}b_{ml} + p_k(\omega_m + \omega_l)\cdot p_n b_{ml} + p_k\cdot(p_m + p_l)\omega_n b_{ml} + \\
& + \omega_k^2[(\omega_m + \omega_l)\omega_n^2 + G_{m,l}\omega_n]b_{ml}
\end{aligned}
$$

3°. Существуют такие m, n, l, что Γ_{mnl} не совпадает ни с R^2, ни с $\varnothing$. Этот случай возможен, только если S^{mnl} нелинейно зависит от x, t, что, в частности, обусловлено неоднородностями дна $D(x)$. Такие резонансы назовем слабыми. При произвольном Γ_{mnl} вопрос об определении главного члена асимптотического решения в этом случае остается открытым. Однако когда Γ_{mnl} — одномерная кривая: $\Gamma_{mnl} = \{x = \chi(t, s),\ s \in R^1\}$, оказывается, что при дополнительном условии на S^{mnl} слабые резонансы не вносят вклада в главный член асимптотики (см. п. 4) и уравнения на A_k, A_0, как и в случае (2), имеют вид (2.8), (2.9). Это условие имеет вид

$$(2.10)\qquad (\partial/\partial t)\{S_t^{mnl} \pm H(x, \nabla S^{mnl})\} \neq 0 \text{ на } \Gamma_{mnl}$$

3. Схема исключения z для получения уравнений на свободной границе. Для исключения z и сведения задачи к системе уравнений на свободной границе в (1.1), (1.4) выразим Φ_z, w_z, u_z при $z = \varepsilon\eta$ через φ, v, ψ, η.

Уравнения (1.2), (1.5) и условие $\varphi = \Phi|_{z=\varepsilon\eta}$ составляют эллиптическую краевую задачу в слое $-D(x) \leqslant z \leqslant \varepsilon\eta$. В силу предположения о регулярной зависимости от ε функция $\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \ldots$, где Φ_j, $j \geqslant 0$ удовлетворяют цепочке рекуррентных задач в слое $-D \leqslant z \leqslant 0$ [13]:

$$
(3.1)\qquad
\begin{aligned}
&\Phi_{jzz} + h^2\Delta\Phi_j = 0\\
&z = -D(x),\ \Phi_{jz} + h\nabla D\cdot h\nabla\Phi_j = 0;\\
&z = 0,\ \Phi_j = \varphi_j\\
&(\varphi_0 = \varphi,\ \varphi_j = -\Sigma\eta^{j-m}((j-m)!)^{-1}[\partial^{j-m}\Phi_m/\partial z^{j-m}]|_{z=0},\\
&m = 0, 1, \ldots, j-1,\ j \geqslant 1)
\end{aligned}
$$

Решения (3.1) выражаются через φ_j $(j \geqslant 0)$ в виде h-псевдодифференциального оператора

$$
(3.2)\qquad \Phi_j = R(x, -ih\nabla, z, h)\,\varphi_j
$$

символ [14] которого допускает регулярное разложение по h при $h \to +0$. Явный вид символа оператора R приведен в [13, 15].

Аналогично уравнения (1.3), (1.4), (1.6) и условия $w = v$ и $u = \psi$ при $z = \varepsilon\eta$ составляют задачу в слое $\varepsilon\eta \leqslant z < \infty$, решение которой позволяет определить w_z, u_z при $z = \varepsilon\eta$. В силу предположения о регулярной зависимости от ε имеем

$$
u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots,\ w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \ldots
$$

Разложение u_j, w_j, $j \geqslant 0$ в ряды Тейлора по степеням $\varepsilon\eta$ приводит к краевым задачам уже в более простом «невозмущенном» слое $0 \leqslant z < \infty$. Учитывая, что для получения решения исходной задачи с точностью $O(\varepsilon^3)$ достаточно (см. выше) рассмотреть воздушный слой в квазилинейном приближении, из полученной системы (уже в слое $0 \leqslant z < \infty$) сохраним лишь члены при ε°.

Для получения большей точности по ε необходимо рассматривать члены при ε^k, $k > 0$.

С точностью $O(\varepsilon)$ достаточно получить w_{0z} при $z = \varepsilon\eta$. Здесь функцию w_0 в слое $0 \leqslant z < \infty$ предполагаем представимой в виде h-псевдодифференциального оператора, примененного к функции v: $w_0 = R_w(x, t, -ih\nabla, -ih\partial/\partial t, z, h)\,v$. Символ этого оператора допускает при $h \to 0$ разложение: $R_w = R_{w0} + (-ih)R_{w1} + \ldots$. Функции R_{wj} $(j \geqslant 0)$ определяются [10] из цепочки рекуррентных задач, состоящих из обыкновенных дифференциальных уравнений по z и краевых условий при $z = 0$, $z \to \infty$. Переменные x, p, t, ω входят в эти задачи как параметры. В частности, R_{w0} определяется из задачи Релея с параметрами x, p, t, ω:

$$
(3.3)\qquad
\begin{aligned}
&(\omega + U\cdot p)\{(R_{w0})_{zz} - |p|^2 R_{w0}\} - U_{zz}\cdot pR_{w0} = 0\\
&z = 0,\ R_{w0} = 1;\ z \to \infty,\ R_{w0} \to 0
\end{aligned}
$$

4. Схема получения уравнений (2.3), (2.8), (2.9). Уравнения (2.3)—(2.9) получаем следующим образом. Ищем решение уравнения (1.10) $\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$ [5, 6]. Считаем, что главный член φ_0 можно представить в виде суперпозиции отдельных волн

$$\Sigma A_k \exp\{iS_k/h\},\ k = \pm 1, \ldots \pm N$$
$$S_{-k} = -S_k,\ \bar{A}_k = A_{-k},\ \nabla S_k \neq 0$$

(φ_1, φ_2 — поправки к φ_0). Подставляя φ в (1.10) и приравнивая коэффициенты при h° и одинаковых экспонентах, получим уравнение (2.3) для определения фаз S_k.

Для поправки φ_1 имеем уравнение

$$h^2\partial^2/\partial t^2\varphi_1 + B_0\varphi_1 = ih^{1/2}\,[\Sigma C_{nl}{}^1 A_n A_l \exp\{i\,(S_n + S_l)\,/\,h\}] + (\text{правая часть (2.9)});\quad l, n = \pm 1, \ldots \pm N,\ l \neq -n$$

Обращение оператора $\{h^2\partial^2/\partial t^2 + B_0\}$ на первой группе слагаемых приводит к умножению каждого слагаемого на величину вида $\{(\omega_m + \omega_l)^2 + G_{ml}\}^{-1}$, на второй группе слагаемых — к появлению гладкой составляющей A_0, удовлетворяющей уравнению (2.9). В этом случае обращение оператора на первой группе слагаемых возможно, поскольку равенство $S_k = S_m + S_l$ не может быть выполнено (см., например, [2]).

Аналогичным образом рассмотрим уравнение для поправки φ_2. Здесь, в отличие от предыдущего случая, уже необходимо учитывать резонансные члены. Из уравнения для φ_2 получаем уравнение (2.8) относительно амплитуд A_k. Резонансный вклад в это уравнение вносят лишь такие S_k, S_m, S_n, S_l ($k, m, n, l \neq 0$, $k \neq -m$, $k \neq -n$, $k \neq -l$, $m \neq -n$, $m \neq -l$, $n \neq -l$), для которых $S_k = S^{mnl} = S_m + S_n + S_l$ всюду в $R_x{}^2$. В случае слабого резонанса оказывается, что при условии (2.10) обращение оператора $\{h^2\partial^2/\partial t^2 + B_0\}$ приводит к результатам $o\,(1)$. Иначе говоря, слабые резонансы не дают вклада в уравнение (2.8), а значит, и в главный член асимптотики (2.2) [6].

Действительно, пусть выполнено условие (2.10) для функции $F = S_n + S_m + S_l$ на кривой $\Gamma \subset R_x{}^2$. Тогда решение задачи

$$h^2\varphi_{tt} + B_0\varphi = hA\,(x, t)\exp\{iF\,(x, t)/h\} \tag{4.1}$$
$$t = 0,\ \varphi = h,\ \varphi_t = 0,\ A \in C_0{}^\infty$$

является при $h \to +0$ величиной $o\,(1)$. В самом деле, следуя [7], представим решение задачи (4.1) следующим образом:

$$\varphi = \sum_{+,-}\int_0^t \psi^\pm(x, t, \tau)\exp\{iS^\pm(x, t, \tau)/h\}\,d\tau \tag{4.2}$$

Подставим (4.2) в (4.1), после дифференцирований и применения формулы коммутации h-псевдодифференциального оператора с экспонентой [4] под знаком интеграла, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h, получим

$$S_t{}^\pm \pm H\,(x, \nabla S^\pm) = 0;\ t = \tau,\ S^\pm = F\,(x, \tau) \tag{4.3}$$
$$(J^\pm)^{-1/2}\,(d/dt^\pm)\,[(J^\pm)^{1/2}\psi^\pm] = 0$$
$$t = \tau,\ \psi^\pm = \mp A\,(x, \tau)\,(2iH\,(x, \nabla F))^{-1}$$

Здесь $X^\pm\,(\alpha, \xi, t), P^\pm\,(\alpha, \xi, t)$ — решения уравнения (2.4) с начальными условиями $X^\pm = \alpha$, $P^\pm = \xi$ при $t = 0$, $d/dt^\pm$ — производная вдоль траекторий $X^\pm\,(\alpha, \nabla F\,(\alpha, \tau),\ t - \tau)$, $P^\pm\,(\alpha, \nabla F\,(\alpha, \tau),\ t - \tau)$.

Рассмотрим в (4.2) только слагаемое со знаком плюс, слагаемое со знаком минус рассматривается аналогично. Применим к интегралу (4.2) метод стационарной фазы. Для этого вычислим производную $\partial S/\partial\tau$. Покажем, что $dS_\tau/dt = 0$. Действительно, $dS_\tau/dt = S_{\tau t} + H_p\cdot\nabla S_\tau$, но

$S_{\tau t} = -H_p(\cdot)\nabla S_\tau$. Очевидно, что при $t=\tau$ $S_\tau = F_t(x,\tau) + H(x, \nabla F(x,\tau))$. Тогда для того, чтобы $\partial S/\partial\tau$ обратилась в нуль в точке (x°, τ°), необходимо и достаточно, чтобы в этой точке было выполнено условие $X(x^\circ, \nabla S(x^\circ, t, \tau^\circ), \tau^\circ - t) \in \Gamma$.

В точке (x°, τ°) имеем

$$S_{\tau\tau}(x,t,\tau) = (\partial/\partial\tau)(F_t(X(x,\nabla S, \tau - t),\tau) + H(X(x,\nabla S, \tau-t), P(x,\nabla S, t-\tau))) = F_{tt} + \nabla F_t \cdot H_p + H_x(\partial X/\partial\xi)\nabla S_\tau + H_p(\partial P/\partial\xi)\cdot\nabla S_\tau + \nabla F_t(\partial X/\partial \xi)\cdot \nabla S_\tau \tag{4.4}$$

Здесь у функции H и ее производных опущены аргументы (X, P), у функции $F - (X, \tau)$ и у функций $X, P - (x, \nabla S, \tau - t)$.

Из (4.4) вытекает, что если $|\nabla S_\tau| = 0$ в точке (x°, τ°), то $S_{\tau\tau} \neq 0$ в этой точке в силу условия (2.10).

Отсюда, согласно [7] (с. 659), следует оценка

$$\|\varphi\|_{L_2^1}(R^2) \leqslant \text{const}\, h^{1/2}$$

Таким образом, главный член асимптотики (2.6) определяется уравнениями (2.3), (2.8), (2.9) и начальными условиями (2.5).

Авторы благодарят В. П. Мясникова за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benney D.* Nonlinear gravity wave interactions // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. Pt 4. P. 577—584.
2. *Захаров В. Е., Заславский М. М.* Кинетическое уравнение и колмогоровские спектры в слаботурбулентной теории ветровых волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. Т. 18. № 9. С. 970—979.
3. *Лаврова О. Ю.* О поперечной неустойчивости волн на поверхности жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1983. Т. 19. № 10. С. 1068—1074.
4. *Маслов В. П.* Операторные методы. М.: Наука. 1973. 544 с.
5. *Маслов В. П.* Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука. 1986. 420 с.
6. *Maslov V. P.* Resonance processes in the wave theory and self-focalization. M.: MIEM. 1983. 120 p. (Moscow Inst. Electron. Machinenbuild.)
7. *Кучеренко В. В.* Асимптотика решения системы $A(x, -ih\partial/\partial x)\, u = 0$ при $h \to 0$ в случае характеристик переменной кратности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38. № 3. С. 625—662.
8. *Захаров В. Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхность в глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86—94.
9. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
10. *Доброхотов С. Ю., Кузьмина В. М.* Квазилинейная теория эволюции поверхностных волн под действием ветра в бассейне с неровным дном // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21. № 12. С. 1299—1307.
11. *Garipov R. M.* On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness // Arch. Ration. Mech. Analysis. 1967. V. 24 No. 5. P. 352—362.
12. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. 1985. 318 с.
13. *Доброхотов С. Ю.* Нелокальные аналоги нелинейного уравнения Буссинеска для поверхностных волн над неровным дном и их асимптотические решения // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1987. Т. 292. № 1. С. 63—67.
14. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука. 1976. 296 с.
15. *Доброхотов С. Ю.* Методы Маслова в линеаризованной теории гравитационных волн на поверхности жидкости // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1983. Т. 269. № 1. С. 76—80.

Москва

Поступила в редакцию
8.X.1986